

一般化 Niederreiter 列による数値積分の誤差評価

政策研究大学院大学 諸星穂積
南山大学 伏見正則

Experimental Studies on the Error Estimation of the Numerical Integration by
Generalized Niederreiter Sequences

National Graduate Institute for Policy Studies
Hozumi MOROHOSI
Nanzan University Masanori FUSHIMI

1 はじめに

s 次元の単位立方体 $[0, 1]^s$ 上の関数 $f(\mathbf{x})$ の積分

$$I = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

に, 準乱数を用いた数値実験の結果について報告する. 実験の主眼は, 1) 準乱数を用いた数値積分に確率的誤差評価を導入し, いくつかの現実的問題について数値実験を行いその有効性を確かめること, 2) Niederreiter[2] によって提案された一連の準乱数のそれぞれについて, 上記実験を行い, 準乱数の違いによる効果があるかどうか調べること, である.

準乱数による数値積分の誤差評価については, 既に [1] で, Sobol' 列と Faure 列について 2 種類の誤差評価方法, scramble 法と shift 法, による数値実験の結果を報告している. ここでは, Niederreiter による一般的な準乱数の生成法— 基数 b の (t, s) -sequence の生成法, その枠組では, Sobol' 列は, 基数 2 の (t, s) -sequence, Faure 列は, 基数 p の $(0, s)$ -sequence, ただし p は次元 s 以上の最小の素数, になる— に従って $2 \leq b \leq s$ なる素数を基数とする (t, s) -sequence を生成し, 先の 2 種類の誤差評価法の有効性を調べた. また, 基数の違いによる数値積分の誤差の影響を調べてみた.

実験上は, 2 種類の誤差評価は, どの基数の (t, s) -sequence でも信頼できる誤差評価を与えている. また, 基数の違いは数値積分の誤差に影響を与えるようである. しかし, 実験の結果を定量的に説明することは今のところ出来ていない.

2 問題設定

準乱数による数値積分は, (1) の積分を, サンプル点 $\{\mathbf{x}_i\}$ による算術平均

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) \quad (2)$$

によって近似する. 本論では, 準乱数として (t, s) -sequece を利用する. その定義は以下の通り.

いくつかの予備的定義を行なう.

定義 [基本区間] 整数 $s \geq 1$ と $b \geq 2$ が与えられたとき, b を基数とする基本区間を

$$E = \prod_{j=1}^s \left[\frac{a_j}{b^{d_j}}, \frac{a_j + 1}{b^{d_j}} \right) \quad (3)$$

で定義する. ここで, d_j, a_j は整数で, $d_j \geq 0, 0 \leq a_j < b^{d_j}$ を満たすものとする.

定義 $[(t, m, s)\text{-net}]$ s, m, t, b は整数で $s \geq 1, m \geq 0, 0 \leq t \leq m, b \geq 2$ とする. s 次元の単位立方体 I^s 内の点集合 $\{\mathbf{a}_i : i = 1, \dots, b^m\}$ が, 任意の体積 b^{t-m} の基本区間にちょうど b^t 個含まれるとき, この点集合は基数 b の (t, m, s) -net であるという.

以上の定義の下で, (t, s) -sequence を次のように定義する.

定義 $[(t, s)\text{-sequence}]$ $t \geq 0$ を整数とする. 点列 $\{\mathbf{a}_n\}$ において, 任意の整数 $k \geq 0, m > t$ に対して $\{\mathbf{a}_n : n = kb^m, \dots, (k+1)b^m - 1\}$ が (t, m, s) -net になるとき, 基数 b の (t, s) -sequence であるという.

Niederreiter[2] は, 任意の素巾を基数 b とする (t, s) -sequence を, 有限体 $\text{GF}(b)$ 上の既約多項式によって構成する方法を与えた. ここでは彼の方法を利用して, 基数 b を素数に限定して (t, s) -sequence を作成し, 以下に述べる確率的誤差推定法を適用してみる.

確率的な誤差評価法の基本的な考えかたは以下の通りである. もともとの準乱数列から複数の独立な点列をつくり, それらで (2) を評価しそのばらつきをもとに誤差を見積もる. 確率的に独立な点列を生成する方法として以下の 2 つを用いた.

scramble 法 [3]

点列 $\{\mathbf{a}_i\}$ を (t, m, s) -net とする. $\mathbf{a}_i = (a_i^1, \dots, a_i^s)$ と座標成分で表示したとき, 各成分を $a_i^j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ijk} b^{-k}, 0 \leq a_{ijk} < b$ と書く. この $\{\mathbf{a}_i\}$ から $\{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^s), x_i^j = \sum_{k=1}^{\infty} x_{ijk} b^{-k}$ を次のように決める.

$$\begin{aligned} x_{ij1} &= \pi_j(a_{ij1}), \\ x_{ij2} &= \pi_{ja_{ij1}}(a_{ij2}), \\ &\vdots \\ x_{ijk} &= \pi_{ja_{ij1}a_{ij2}\dots a_{ij,k-1}}(a_{ijk}). \end{aligned}$$

各 π は $0, 1, \dots, b-1$ の置換で, 全置換 $b!$ 個の上で一様に分布しているとする. π_j は全ての i について各 a_i^j の最初の桁を置換する. $\pi_{ja_{ij1}}$ は同様に第 2 桁を置換するが, 第 1 桁の値毎に互いに独立な置換とする. 以下同様に, 第 k 桁の置換は, $k-1$ 桁までの値に依存して決まる.

この方法は次のような操作を行なっているものと解釈できる。積分領域を各座標軸ごとに b 分割して得られた b 個の小領域をランダムに並べ換え、次に各小領域の中で更に b 分割を行なうランダムに並べ換えを行なう、各小領域での並べ換えが互いに独立になるようにすることが、 $\pi_{jz_{ij1}}$ という置換を用いたことに対応する。以下分割で得られた小領域のなかで、この操作を繰り返す。

shift 法

$\mathbf{u}$ を $[0, 1]^s$ 上一様分布するベクトルとして、 $\mathbf{x}_i = \mathbf{a}_i + \mathbf{u} \pmod{1}$ とする。つまり、もとの点列 $\{\mathbf{a}_i\}$ を一斉にある方向に平行移動させて、領域 $[0, 1]^s$ からはみ出した点については、周期性条件によって $[0, 1]^s$ 内に引きもどす。

以上の方法を M 回独立に繰返し独立な点列の組 $\{\mathbf{x}_i^{(1)}\}, \dots, \{\mathbf{x}_i^{(M)}\}$ を得、それらによって得られた積分の計算値を $\hat{I}^{(1)}, \dots, \hat{I}^{(M)}$ とし、これらから積分 I の推定値

$$\bar{I} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \hat{I}^{(j)}, \quad (4)$$

を求める。また、各計算値から誤差の推定値として分散

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{j=1}^M (\hat{I}^{(j)} - \bar{I})^2, \quad (5)$$

を計算する。

3 数値実験

Niederreiter の構成法を用いて、基数 b をいろいろな素数に選び、 (t, s) -sequence の基数の選択が、数値積分の誤差に影響を及ぼすかどうか、数値的に調べた。数値実験の問題は、(7) 式の離散化

$$S_{i+1} = S_i \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} N_{i+1} \right\}, \quad i = 0, \dots, s-1 \quad (6)$$

($\Delta t = T/s$ とおいた。また、 $S_i = S_{i\Delta t}$ とあらたに置いた。 N_i は標準正規分布に従う確率変数) を利用して、次の 3 種類のオプションの各 pay-off 関数の期待値 $E[p(S)] = E[p(N_1, \dots, N_s)]$ を求めることである。適当な変数変換により、この期待値を $[0, 1]^s$ 上の積分として (t, s) -sequence を適用する。 S_t は原資産の価格を表し、Black-Shole 型の方程式

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (7)$$

に従うとする。 B_t は標準 Brown 運動、 r は非危険利子率、 σ はボラティリティ。 $t = 0$ をオプション契約の開始時点、 $t = T$ を満期とする。

1. Barrier Option (正確には up-and-out call option). オプションの pay-off は, $p(S) = \max\{S_T - K, 0\} \mathbf{1}_{S_t \leq H}$ である. K はオプションの行使価格, H は上側 barrier. $\mathbf{1}_{\{\cdot\}}$ は $\{\cdot\}$ 内の条件が成立すれば 1, そうでなければ 0 をとる指示関数. 即ち, オプションの生存期間内に, 原資産価格が barrier H を上回ることなく, かつ満期に於いて行使価格を上回ったときのみ $S_T - K$ が支払われる.
2. Asian Option (average-rate option). オプションの pay-off は期間中の価格の平均に依存して, $p(S) = \max\{\frac{1}{s} \sum_{i=1}^s S_i - K, 0\}$ で与えられる.
3. Lookback Option (fixed strike lookback call). オプションの pay-off は期間中の最大価格に依存して, $p(S) = \max\{\max_i S_i - K, 0\}$ で与えられる.

数値実験の条件

以下のような条件で実験を行った: $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $s = 50, 100$. 基数 b は 2 から次元 s までの間の素数.

Barrier option の場合について, scramble 法と shift 法で, 計算値の収束の様子を図 1 に示す. 図で推定値 $\bar{I}$ に誤差の推定値 $\hat{\sigma}$ を error bar として重ねて表示した. 2 つの方法とも, 安定した収束状況を示しており, 推定値, 誤差評価ともに信頼できると考えられる. 示したのは $b = 97$ の場合のみであるが, 他の場合も同様の結果を得ている.

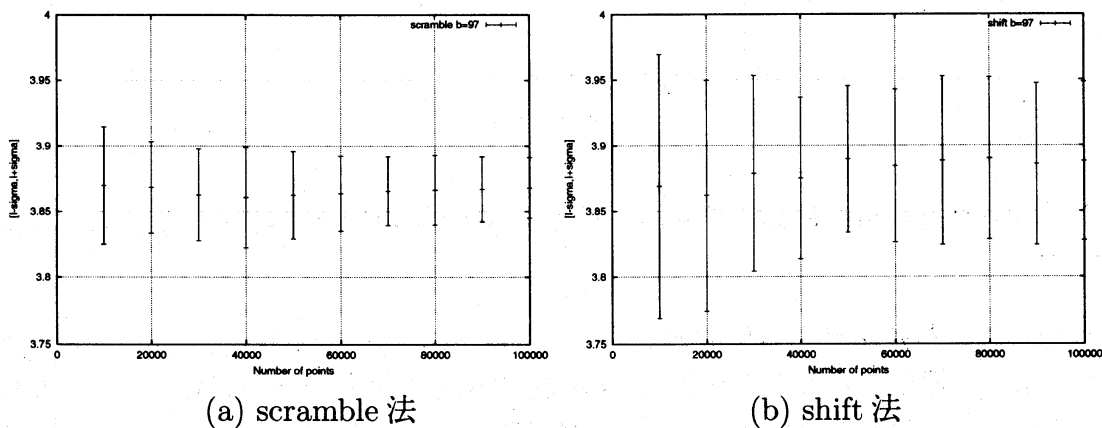


図 1: Barrier option での scramble 法と shift 法の収束の様子. $s = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $S = 100$, $K = 100$, $H = 140$.

次に, 基数 b の誤差に与える影響だが, 上記どの option でも概ね同じ傾向がみられた. 図 2 に Barrier option の計算結果を示す. 横軸に (t, s) -sequence の基数を取り, 縦軸は標準化誤差として $\hat{\sigma}/\bar{I}$ をとった. 時間軸の分割数 (次元) は $s = 100$ である. サンプル数が $N = 10^4, 5 \times 10^4, 10^5$ の場合を表示した. 比較的小さい b ($b < 10$) については, scramble 法と shift 法の与える標準化誤差を見ると, shift 法のほうが, 小さい推定誤差を与える傾向がある. これに対し b が大きくなると, scramble 法の

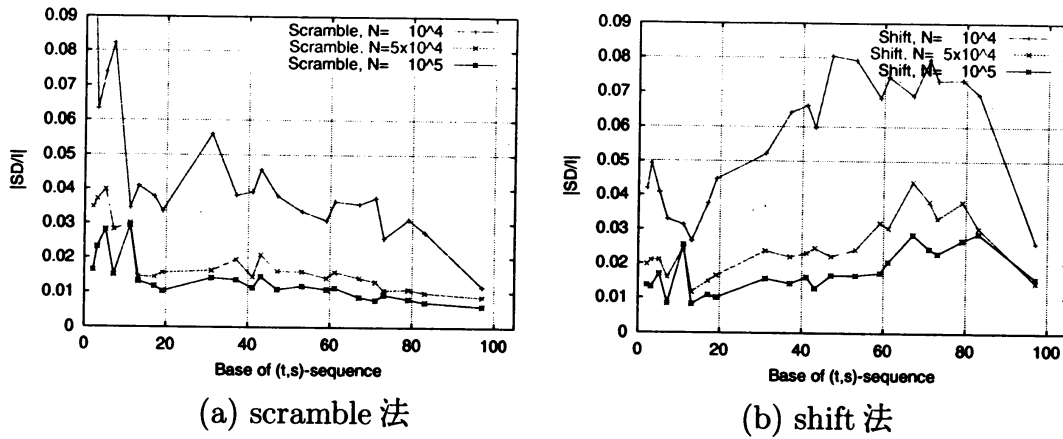


図 2: Barrier option の計算での scramble 法と shift 法の標準化誤差. $s = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $S = 100$, $K = 100$, $H = 140$.

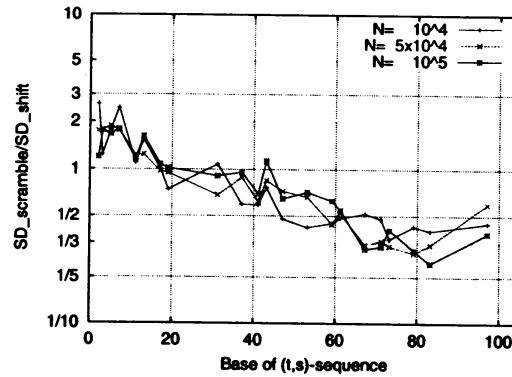


図 3: Barrier option の計算での scramble 法と shift 法の標準偏差の比 $\sigma_{\text{scramble}}/\sigma_{\text{shift}}$, $s = 100$

ほうが小さい誤差を与える傾向が見られる。最小の推定誤差は, scramble 法を大きい b の場合に適用したとき得られた。 $s = 50$ の場合も同じ傾向が認められた (図 4)。基数 b が大きくなると, (t,s) -sequence の最初のほうの項は非常に規則的になる (超立方体 $[0, 1]^s$ の対角線上に並ぶ) ことが知られている。scramble 法はこのような規則性を壊すことができるが, shift 法ではそのような規則性が残ってしまう。以上が 1 つの定性的な説明になると思うが, 不十分であり, 今後より詳しい解析が必要であろう。

Asian option と lookback option についても, 同様な計算結果が観察された (図

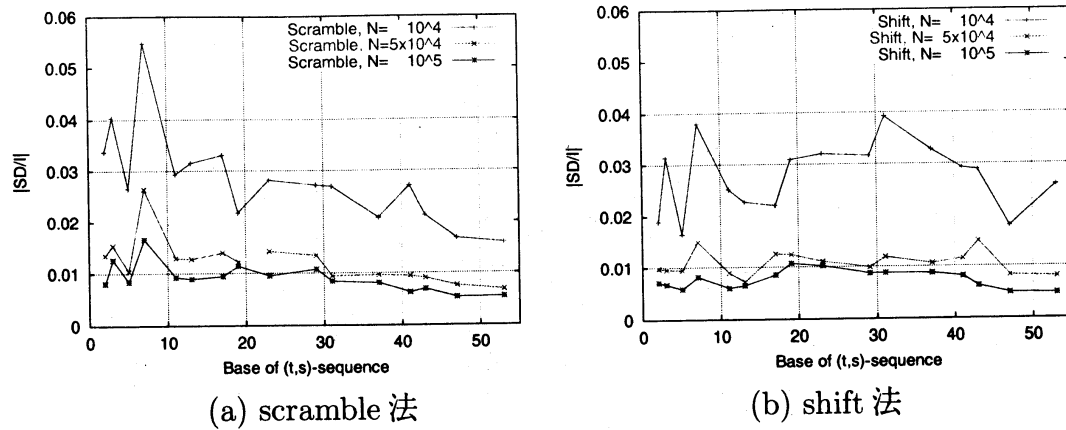


図 4: Barrier option の計算での scramble 法と shift 法の標準化誤差. $s = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $S = 100$, $K = 100$, $H = 140$.

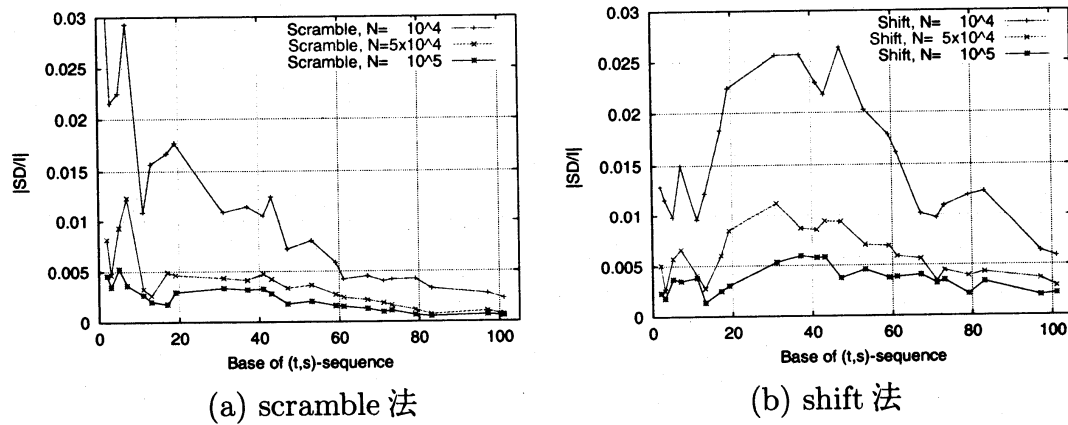


図 5: Asian option の計算での scramble 法と shift 法の標準化誤差. $s = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $S = 100$, $K = 100$.

参考文献

- [1] Morohosi, H. and M. Fushimi: A Practical Approach to the Error Estimation of Quasi-Monte Carlo Integrations, *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1998*, Springer, 2000.
- [2] Niederreiter, H.: *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*, CBMS-NSF 63, SIAM, 1992.
- [3] Owen, A. B.: Monte Carlo Variance of Scrambled Net Quadrature, *SIAM J. Numerical Analysis*, Vol. 34(1997), No. 5, pp. 1884–1910.

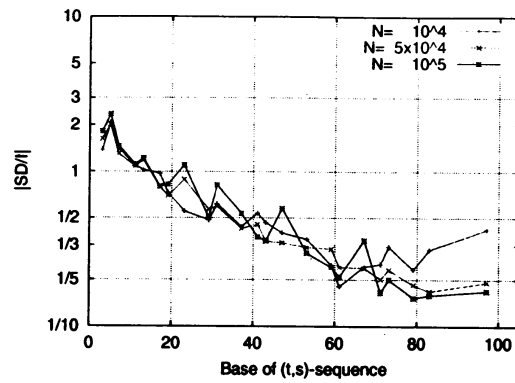
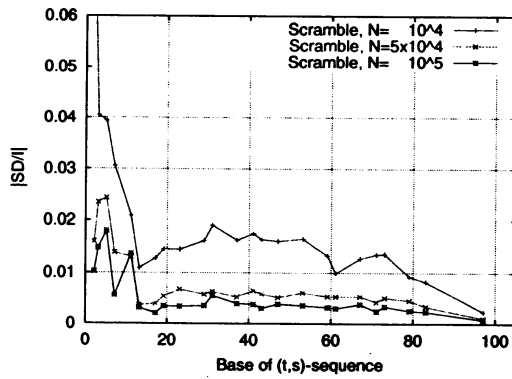
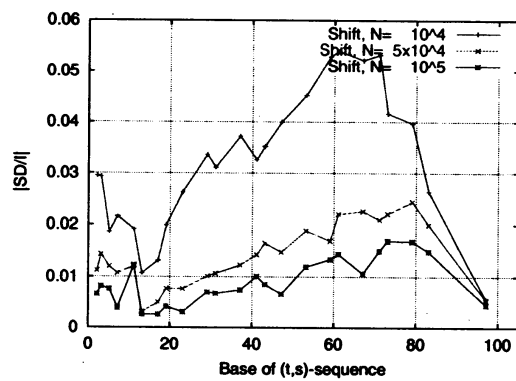


図 6: Asian option の計算での scramble 法と shift 法の標準偏差の比 $\sigma_{\text{scramble}}/\sigma_{\text{shift}}$, $s = 100$



(a) scramble 法



(b) shift 法

図 7: Lookback option の計算での scramble 法と shift 法の標準化誤差. $s = 100$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $S = 100$, $K = 100$.

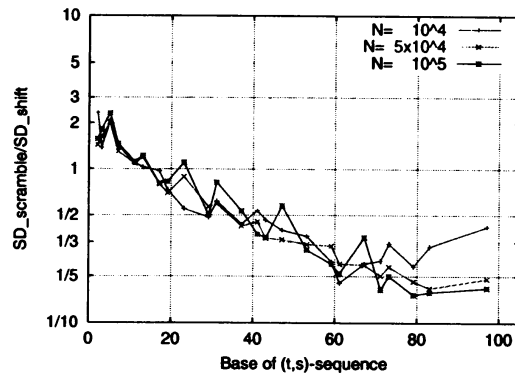


図 8: Lookback option の計算での scramble 法と shift 法の標準偏差の比 $\sigma_{\text{scramble}}/\sigma_{\text{shift}}$, $s = 100$