

$$\begin{cases} L_1 \varphi = \lambda \varphi \\ \varphi_\tau = L_2 \varphi \end{cases} \quad (10)$$

$$(11)$$

ただし

$$\begin{cases} L_1 = u^2 \partial_\xi^2 + u u_\xi \partial_\xi + u \\ L_2 = -(u^2 + u u_\xi^2 + u^2 u_{2\xi} - 4\lambda u) \partial_\xi - u u_\xi \end{cases} \quad (12)$$

$$(13)$$

ここで

$$\varphi = \exp \left\{ \int^\xi \left(\frac{k}{u} + \chi(u, k) \right) d\xi' \right\} \quad (14)$$

$$\lambda = k^2$$

$$\chi = \sum_{i=1}^{\infty} k^{-i} \chi_i$$

と置くと、(10)式より k の各巾に応じて保存密度が得られ、無限個の保存量の存在が言える。

しかし、Hamiltonian形式、Lax pairの擬微分作用素による表現、Lax pairとrecursion operatorとの関係については未解決である。

文献

- 1) K. Konno, Y. Ichikawa and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 1025.
- 2) Y. Ishimori, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 2471.

2次元非線型波動系のトポロジカルな渦のダイナミクス

京大・工 石 森 勇 次

トポロジカルな欠陥を許す非線型波動系が積分可能か否かは、その欠陥のダイナミクスと深くかかわっている。例えば1次元sine-Gordon方程式は積分可能系として知られているが、欠陥として現われるソリトンは互いの衝突によってもその個性が失われず、系の作用角変数としての役割りを果たす。一方非可積分系である1次元 ϕ^4 方程式のソリトンは、そのような性質を持たない。一般に欠陥の種類は、系を記述する秩序パラメータの成分の数 n と空間の次元 d

によって分類される．しかしそのダイナミクスは，方程式の形に依存し一般的議論は難しい．特に多次元系では，欠陥の運動様式が複雑で，ダイナミクスにどのような特徴があるのかあまりわかっていない．

ここでは渦を欠陥として許す $n = d = 2$ の系について考える．そのような系としては，超流動の Gross-Pitaevskii 方程式，古典 x - y スピン系，2次元 sine-Gordon 方程式，超伝導の Ginzburg-Landau 方程式，素粒子物理の Higgs 方程式や abelian Higgs モデル等が知られている．我々は特に Gross-Pitaevskii 方程式

$$2i\phi_t + \nabla^2 \phi + (1 - |\phi|^2)\phi = 0, \quad (1)$$

及び Higgs 方程式

$$\phi_{tt} - \nabla^2 \phi - (1 - |\phi|^2)\phi = 0, \quad (2)$$

を考える．

今， N 個の渦以外の場の励起はないものとする．このとき渦のダイナミクスは，渦間距離が渦のコアの大きさに比べて十分大きいと仮定すると，有限自由度の問題に帰着される．（同程度の場合このような単純化は不可能であり，もとの無限自由度で考えねばならない．）我々はこれを Lagrangian を用いて定式化する．(1)式及び(2)式は各々 Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} \int d\vec{r} [i(\phi^* \phi_t - \phi \phi_t^*) - |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{2}(|\phi|^2 - 1)^2], \quad (3)$$

及び

$$L = \frac{1}{2} \int d\vec{r} [|\phi_t|^2 - |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{2}(|\phi|^2 - 1)^2], \quad (4)$$

に対する Euler-Lagrange 方程式により導かれる． N 渦解を

$$\phi = \phi_N = \prod_{j=1}^N f_j \exp [i(\sum_{j=1}^N \theta_j + \alpha(t))], \quad (5)$$

$$\theta_j = q_j \tan^{-1} \frac{y - y_j(t)}{x - x_j(t)}, \quad q_j = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} f_j &= F(|\vec{r} - \vec{r}_j(t)|; q_j) \\ \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \frac{q^2}{r^2} + (1 - F^2(r; q)) \right] F(r; q) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

のように仮定すると、 N 渦系に対する Lagrangian $L_N = L\{\Phi_N\}$ は、(3)式及び(4)式に対して各々、

$$L_N \approx \pi \sum_{j=1}^N q_j (\dot{x}_j y_j - \dot{y}_j x_j) + \pi \sum_{j \neq k} q_j q_k \ln(r_{jk}/r_0) - R^2 \dot{\alpha} + \text{const}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L_N \approx & \frac{\pi}{2} \ln(R/r_0) \left(\sum_{j=1}^N q_j \dot{\vec{r}}_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j^2 \\ & - \frac{\pi}{2} \sum_{j \neq k} q_j q_k \left[\dot{\vec{r}}_j \cdot \dot{\vec{r}}_k \ln(r_{jk}/\tilde{r}_0) - (\dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{r}_{jk})(\dot{\vec{r}}_k \cdot \vec{r}_{jk})/r_{jk}^2 \right] \\ & + \pi \sum_{j \neq k} q_j q_k \ln(r_{jk}/r_0) \\ & + \frac{1}{2} R^2 \dot{\alpha}^2 - \pi \dot{\alpha} \sum_{j=1}^N q_j (\dot{x}_j y_j - \dot{y}_j x_j) + \text{const}, \end{aligned} \quad (9)$$

ここで R は、系の大きさで渦間距離 r_{jk} より十分大きいとした。 r_0 はコア半径、 $\tilde{r}_0 = r_0/\sqrt{e}$ 、 m_j は大きさが1程度の定数である。

L_N に対する Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_N}{\partial \dot{\vec{r}}_j} - \frac{\partial L_N}{\partial \vec{r}_j} = 0 \quad (10)$$

は、渦の位置 $\vec{r}_j$ に対する運動方程式を与える。(8)式の場合、運動方程式(10)は別の方法で得られた式 (Takeno & Homma: Prog. Theor. Phys. **69** (1983) 773.) と同じである。(9)式の場合、 α に対する方程式から、 $\dot{\alpha}(t=0) = 0$ のとき $\dot{\alpha}(t) = O(1/R^2)$ なので $\dot{\alpha}$ を含む項は $\vec{r}_j$ の方程式に寄与しない。

さて、Gross-Pitaevskii 方程式及び Higgs 方程式が時間推進、空間推進、回転、ゲージ変換に対する作用積分の不変性から、エネルギー、運動量、角運動量、チャージの5個の保存量を持つことは、連続系に対する Noether の定理により容易にわかる。またこれらと N 渦系(8)及び(9)の対称性との関係も、離散系に対する Noether の定理及び(5)~(7)式により理解される。 N 渦系の一般化座標の自由度は重心の座標及び α を除くと、Gross-Pitaevskii 方程式の場合、 x_j と y_j が互いに共役なので $N-1$ であり、Higgs 方程式の場合、 $2N-2$ である。これらが重心と α の自由

度 3 を上記の保存量の数 5 より引いた 2 に等しくなるのは, Gross-Pitaevskii 方程式の場合 $N = 3$ であり, Higgs 方程式の場合 $N = 2$ である. 従って, Gross-Pitaevskii 方程式の渦は 3 個まで, Higgs 方程式の渦は 2 個まで, 渦のダイナミクスは積分可能である. もし, (1)式及び(2)式にこれ以外の保存量が存在すれば, N のもっと大きな渦のダイナミクスも積分可能なはずである. (8)式に対する(10)式は流体の渦に対する運動方程式と同じであり, 最近の研究 (Aref: Ann. Rev. Fluid Mech. 15 (1983) 345.) によれば, 4 個の渦は適当な配位ではカオティックな振舞いをする. 従って Gross-Pitaevskii 方程式には, 5 個の基本的な保存量以外に保存量はないと思われる. 一方著者は Higgs 方程式の 3 個の渦の振舞いを調べた. 3 個の渦の強さ q_j がそれぞれ $-1, +1, +1$ のとき, 運動方程式(10)は -1 の渦を中心に $+1$ の渦が互いに回転する解を持つ. この解を, 中心の -1 の渦の位置をわずかにずらした解と比較すると, 2 つの解の軌道のずれは指数関数的に増大することがわかった. 従って Higgs 方程式も基本的な保存量以外の保存量は持っていないと思われる. 即ち, Gross-Pitaevskii 方程式も Higgs 方程式も非可積分系と考えられる.

渦間距離がコアの大きさと同程度になるとコアの変形や, 渦の消滅生成等が起こるが, これらの現象と軌道不安定性との関係については, 計算機シミュレーションによる研究を進めているところである.

$n = d = 2$ の他の系, 特にゲージ場が入ったときの渦のダイナミクスは興味ある問題である. Jacobs & Rebbi (: Phys. Rev. B19 (1979) 4486) は Higgs 場とゲージ場の比が適当な値のとき, 静的な渦の相互作用エネルギーがなくなることを示した. これは, このときに限り系が積分可能であることを暗示している.

最近著者は $n = 3, d = 2$ の系で, 渦の数 N が任意でも積分可能であるモデルを見い出した. (Ishimori: Prog. Theor. Phys. 72 (1984) 33.) 最初に述べたように $d = 1$ の系では, $n = 2$ の sine-Gordon 系が可積分で $n = 1$ の ϕ^4 系が非可積分である. これらの事実は, $n \geq d + 1$ の系でなければ可積分系は存在しないことを示しているのかもしれない.