

再帰サブルーティンにおける パラメタの数について

電子技術総合研究所ソフトウェア部
二 木 厚 吉

1. まえがき

再帰的に自分自身を呼び出すことが出来るようなサブルーティンは、アルゴリズムの記述において基本的である。実際多くの問題に対して、再帰サブルーティンを使った簡単で効率のよいアルゴリズムが示されている。(例えば[7]参照)このような再帰サブルーティンにおいて、情報の授受の総量を規定するパラメタの数によりアルゴリズムの記述かにどのような差が生ずるかは、興味深い問題である。

本稿では、高々 n 個の入力パラメタと m 個の出力パラメタを持つ再帰サブルーティンの使用が許されるプログラミング言語をモデル化したプログラム図式のクラス $Pr(m, n)$ を定義し、この問題をプログラム図式比較論 (comparative schematology) 的観点から考察する。

プログラミング言語のある特徴の有無による表現力の差異

を形式化して捉える手段として、プログラム図式のレベルでの能力比較が有力であることは、Paterson & Hewitt[1]により最初に指摘された。その後この方法に基づいた研究がいくつも行われている[2, 3, 4, 5]。

2. プログラム図式 (Program Schema) によるモデル化

2.1 $PR(m, n)$, $PR^a(m, n)$ の定義

プログラム図式は各節点に適切な命令がラベル付けされたフローグラフの有限集合として定義される。フローグラフは図1の4種類の節点と矢印の方向が一統するようにつないで得られる有限有向グラフで、次の(i), (ii), (iii)の条件を満たすのである。(i)ただ1つの開始節点を持つ、(ii)すべての演算節点および点節点は開始節点から停止節点に至るパス上にある、(iii)すべての停止節点へは開始節点からのパスがある。

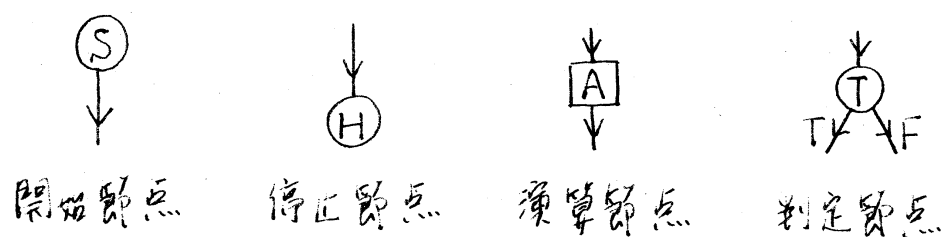


図1 フローグラフを構成する4種類の節点

本稿で考察する種々のプログラム図式を定義するためには

次のような命令が必要である。

開始節点にラベル付けされる命令

(S1) $\text{START}(x_1, x_2, \dots, x_e)$

(S2) $F_i^{m,n}(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$

演算節点にラベル付けされる命令

(A1) $x_j \leftarrow x_i$ (A2) $x_j \leftarrow f_i^m(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$

(A3) $(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}) \leftarrow F_i^{m,n}(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$

判定節点にラベル付けされる命令

(T1) $P_i^m(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$

停止節点にラベル付けされる命令

(H1) $\text{HALT}(x_i)$ (H2) $\text{RETRURN}(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$

ここで、 x_i, x_j は変数記号、 f_i^m は m -ary 基本関数記号、 P_i^m は m -ary 基本判定記号、 $F_i^{m,n}$ は m 入力 n 出力再帰リドルティン記号である。ただし、 $i, j, e, m, n = 0, 1, 2, \dots$ とする。

以上の準備のもとに、高々 m 個の値を入力し、高々 n 個の値を出力する再帰リドルティンの使用が許されたプログラミング言語をモデル化したプログラム図式のクラスを定義することが出来る。

〔定義1〕上で導入された命令を各節点にラベル付けされたフローグラフの有限集合で、次の (a), (b), (c), (d) の条件を

満たすものを (m, n) -再帰プログラム図式 (RPS: Recursive Program Schema) といい、そのクラスを $\underline{P_R}(m, n)$ で表わす。特に、各フローグラフが有向閉路を持たないとき、その (m, n) -RPS をアサイクリックと呼び、そのクラスを $\underline{P_R^a}(m, n)$ で表わす。

- (a) ただ一つのフローグラフだけが開始節点に (SI) タイプの命令をラベル付けされている。

このフローグラフを主プログラム図式、その他のフローグラフを副プログラム図式という。

- (b) 主プログラム図式の停止節点には (HI) タイプの命令が、各副プログラム図式の停止節点には、その開始節点にラベル付けされた (SZ) タイプの命令と n の値が一致した (HZ) タイプの命令が、それぞれラベル付けされている。

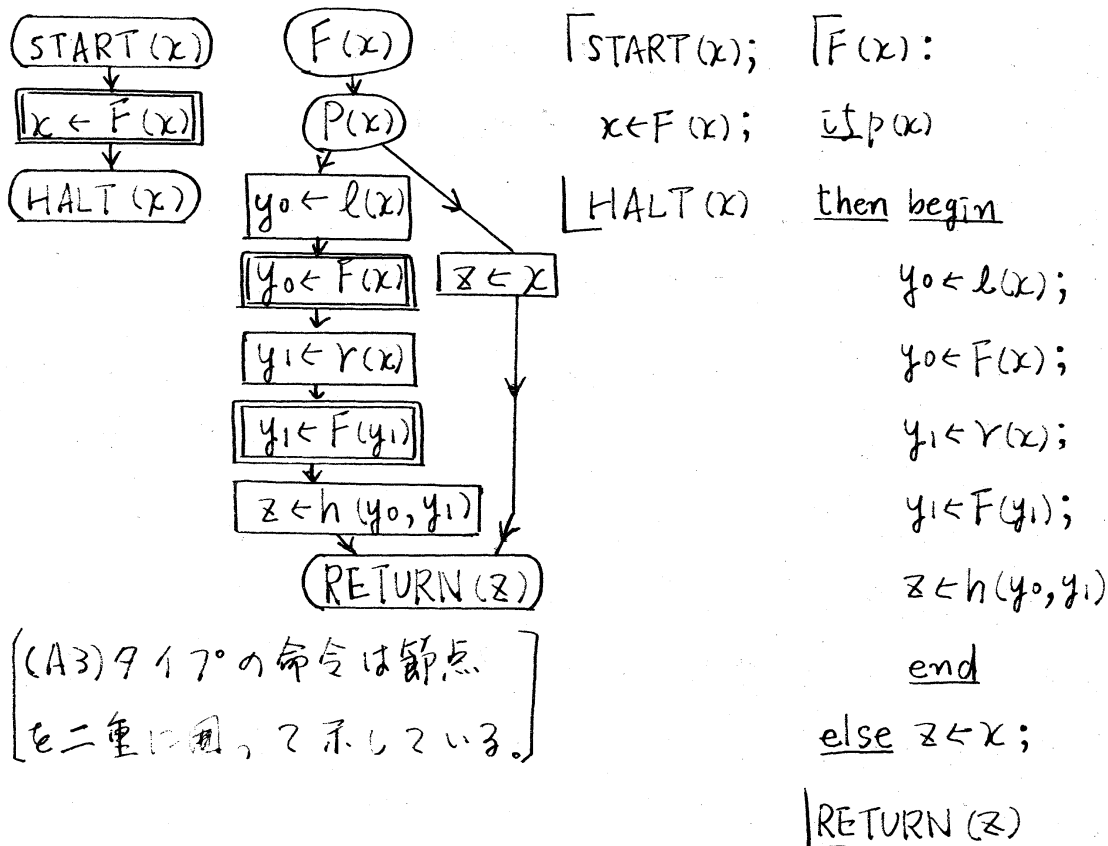
- (c) (AZ) タイプの命令がラベル付けされているとき、そしてそのとき限り、その命令と、 m, n の値が一致した (SZ) タイプの命令を開始節点にラベル付けされた副プログラム図式がただ一つ存在する。

- (d) 副プログラム図式が l 個あり、それらの開始節点に、 $F_i^{m, n_i}(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ ($1 \leq i \leq l$) のような命令がラベル付けされているとすると、

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : m_i \leq m \wedge n_i \leq n$$

である。

(例1) 図2にプログラム図式の一例として, アサイクリック (1,1)-RPS S_0 とその線形記法 (linear notation) を示す。



(A3) タイプの命令は節点を二重に囲って示している。

$$S_0 \in P_R^a(1,1)$$

S_0 の線形記法

$$\text{図2} \quad \text{プログラム図式} \quad S_0 \in P_R^a(1,1)$$

線形記法はフローグラフを Algol-like な記法で示したものである。両者の対応は明らかであろう。以後は簡単のために

線形記法を用いてプログラム図式を表わす。また、 $x, y, z, \dots$ で変数記号を, $f, g, h, \dots$ で基本関数記法を, $p, q, r, \dots$ で基本判定記号を, $F, G, H, \dots$ で再帰サドル記号を表わす。

2.2 プログラム図式の等価性 Val と OP

プログラム図式は、予-今領域が特徴付けられず、基本関数及び基本判定記号それぞれが f^m 及び p^m ($m=0, 1, \dots$) といった記号としてだけ示されたプログラムである。従って、プログラム図式はプログラムの集合を表わしていると考えられる。

この集合に属するプログラムは、基本関数記号及び基本判定記号に解釈を与えることにより得られる。つまり、予-今領域を与え、基本関数記号 f^m 及び基本判定記号 p^m にそれぞれ予-今領域上の関数及び判定関数 (true または false を値と返す関数) を割り当てることにより、プログラム図式から一つのプログラムが得られる。

二つのプログラム図式は、START 命令中で示される入力変数ベクトル、基本関数記号の集合、基本判定記号の集合の三つがともに等しいとき 比較可能 であるという。等価性は比較可能なプログラム図式についてのみ問題とされ、その定義は自由解釈 (free interpretation) だけに基づいて行なわれ

る。自由解釈だけを考慮することが一般性を失わないことについては(6)p260~262などを参照されたい。

自由解釈は、データ領域として入力変数と基本関数記号から生成される項(term)の集合^{*}を持ち、各基本関数には、

$$f_i^m: t_1, t_2, \dots, t_m \rightarrow f_i^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

で定義される関数を割当てる。従って自由解釈は、各基本判定記号にどのような項の集合上の判定関数を割当てるかで特徴付けられる。以下では自由解釈のことを単に解釈という。

プログラム図式に解釈を与えれば実行可能なプログラムが得られる。この実行に際し、入力変数以外のすべての変数はある特別な初期値を与えられているとする。ただし、この初期値が、基本関数又はSTART, RETURN文の引数として使われることはないとし、この規則に反する実行は停止しないと約束する。また、各サブルーティン・コールで呼び出される副プログラムの変数はすべてそのコールに固有で局所的なものであり、パラメタの授受はcall by valueで行われるとする。

プログラムの実行の途中のある時点で変数 $y_1, y_2, \dots, y_m$

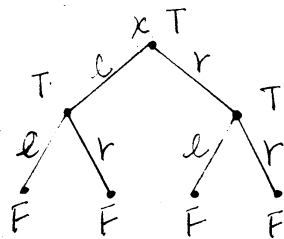
*正確には次のように定義される。

- i) 入力変数及び0-ary基本関数記号は項である。
- ii) f_i^m p-m-ary基本関数記号で $t_1, t_2, \dots, t_m$ が項ならば,
 $f_i^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ も項である。
- iii) i) ii) で項とされるものだけp-項である。

の内容が項 $t_1, t_2, \dots, t_m$ であったとする。このとき、 $y \leftarrow f^m(y_1, y_2, \dots, y_m)$ のような演算命令に出会ったとすれば、この実行は項 $f^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ を算出したという。また、 $p^m(y_1, y_2, \dots, y_m)$ のような判定命令に出会い、かつその値が true のときは原子式 $p^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ を、false のときは否定原子式 $\neg p^m(t_1, t_2, \dots, t_m)$ を、それぞれ判定したという。

(定義 3) プログラム図式 S に解釈 I を与えて得られるプログラムの実行が出力を出すまでに算出または判定する項及び基本式 (原子式と否定原子式を統称して基本式という) の系列の前後に入力と出力を付加した系列を 計算系列 といい、 $\langle S, I \rangle$ で表わす。また、その出力を $Val(S, I)$ で表わす。プログラムが停止しなければ、 $\langle S, I \rangle$ 及び $Val(S, I)$ は定義されない。さらに、すべての解釈に対する $\langle S, I \rangle$ の集合を $\Pi(S)$ で表わし、 S の 計算集合 という。 ■

(例 2) 図 2 のプログラム図式 S_0 に対する次のような 2 進木で示される解釈 I_0 を考える。ここで、2 進木の各節点は $ax (a \in \{l, r\}^*)$ のような項を表わし、それにラベル付けさ



れた T または F は、それぞれ

$I(p)(ax) = \text{true}$ または false を示している。他のす

べての項に対して $I(p)$ は false となるとする。

$$\begin{aligned}
\langle S_0, I_0 \rangle = & (x) \$ p(x) \$ lx \$ p(lx) \$ llx \$ \neg p(llx) \\
& \$ rlx \$ \neg p(rlx) \\
& \$ h(llx, rlx) \\
& \$ rx \$ p(rx) \$ lrx \$ \neg p(lrx) \\
& \$ rrx \$ \neg p(rrx) \\
& \$ h(lrx, rrx) \\
& \$ h(h(llx, rlx), h(lrx, rrx)) \\
& \$ (h(h(llx, rlx), h(lrx, rrx)))
\end{aligned}$$

となる。ここで、区切り記号として\$を用い、入出力はそれぞれ()でくくって示している。

〔定義3〕比較可能なプログラム図式 S と S' は、

- (i) 任意の解釈 I に対して $Val(S, I) \equiv Val(S', I)$ のとき出力等価といい $S \stackrel{Val}{=} S'$ と記し、
- (ii) 任意の解釈 I に対して $\langle S, I \rangle \equiv \langle S', I \rangle$ のとき動作等価といい $S \stackrel{OP}{=} S'$ と記す。

ここで、記号 $\equiv$ は、両辺が共に定義されないか、または共に定義されてその値が等しいかのいずれかである、という意味を持つ。

次の命題が成立することは容易に示される。証明は略す。

〔命題1〕 (i) $\stackrel{Val}{=} \supset \stackrel{OP}{=}$

(ii) $S \stackrel{OP}{=} S' \Leftrightarrow \Pi(S) = \Pi(S')$

(例3) 図3の2つのプログラム図式 $S_1 \in \text{Pr}(0, *)^*$, $S_2 \in \text{Pr}^a(1, 1)$ を考える。

<pre> START(x); y ← x; while p(x) do x ← f(x); while p(y) do begin y ← f(y); x ← g(x); end; HALT(x) </pre>	<pre> START(x); x ← F(x); HALT(x) </pre>	<pre> F(x): if p(x) then begin x ← f(x); x ← F(x); x ← g(x); end; RETURN(x) </pre>
--	--	--

$S_1 \in P$

$S_2 \in \text{Pr}^a(1, 1)$

図3 プログラム図式 S_1 と S_2

この2つのプログラム図式に対しては, $S_1 \stackrel{\text{Val}}{=} S_2$ であるが, $S_1 \stackrel{\text{pr}}{=} S_2$ は成立しない。

* 入力変数のないプログラム図式は必ず発散して停まらねいとしているので, (P7 参照) 任意の $n \geq 0$ に対し $\text{Pr}(0, n)$ は全プログラム図式から成る単独プログラム形のクラスを表わすとする。このクラスを $\text{Pr}(0, *)$ には単に P と記す。同様の理由で $\forall n \geq 0 \text{ Pr}^a(0, n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Pr}^a(0, *)$ とする。

3. 能力比較

C と C' をプログラム図式のクラスとする。プログラム図式間の2つの等価性に基づいて C と C' の間には次のような2つの変換可能性が定義される。

〔定義4〕 C に属する任意のプログラム図式 S に対して $S \equiv S'$ なるプログラム図式 S' が C' 中に存在するとき、 C は C' に等価性 $\equiv$ に基づいて変換可能である といい、 $C \leq C'$ と記す。ここで α は Val または op である。

以下では、2.1 で定義した種々のプログラム図式のクラス、 $PR(m, n)$, $PR^a(m, n)$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, に対し、それらが相互にどのように変換可能であるのかを考察していく。

ただし、定理の証明は付録にまとめて示す。

〔記法〕 (i) $C \leq C' \stackrel{\text{def}}{\iff} C \leq C' \wedge C \leq C'$

(ii) $C < C' \stackrel{\text{def}}{\iff} C \leq C' \wedge \neg (C \geq C')$

フロッググラフにループを許す影響に関しては次の定理が成立する。

〔定理1〕 (i) $U_{m,n=0}^{\infty} PR(m, n) \stackrel{\text{op}}{\equiv} U_{m,n=0}^{\infty} PR^a(m, n)$

(ii) $\forall m \geq 0 \forall n \geq 0 : \neg (PR(0, *) \stackrel{\text{Val}}{\leq} PR^a(m, n))$

入力パラメタの数を制限する影響に関しては次の定理が成

立する。

(定理 2) $\forall m \geq 1 \forall n \geq 0 : \neg (P_R^a(m, 0) \stackrel{\text{val}}{\leq} P_R(m-1, n))$ ■

出力パラメタの数を制限する影響に関しては次の定理が成立する。

(定理 3) (i) $\forall m \geq 1 \forall n \geq 1 : P_R^a(m, n) \stackrel{\text{val}}{=} P_R(m, 1)$

(ii) $\forall m \geq 1 \forall n \geq 1 : P_R(m, n) \stackrel{\text{val}}{=} P_R(m, 1)$

(iii) $\forall m \geq 1 : \neg (P_R^a(1, 1) \stackrel{\text{val}}{\leq} P_R(m, 0))$

(iv) $\forall n \geq 1 \forall m \geq 0 : \neg (P_R^a(n, n) \stackrel{\text{val}}{\leq} P_R(m, n-1))$ ■

定理 1-(i)は、フローグラフにループも含んだどんな再帰プログラム図式に対して、それと動作等価なループフリーな再帰プログラム図式 (RPS) が、(新しい再帰ワイルディンを導入することにより)書けることを示している。しかし、定理 1-(iii)から、再帰ワイルディンの入出力パラメタの数に界を設けてしまえば、再帰ワイルディンを含まない単純プログラム図式のクラス P (≒ $P_R(a, 1)$) の中にさえ、ループフリーなどんな再帰プログラム図式 (RPS) とも出力等価^にな(従って当然動作等価にも)たり得ないものが存在する。

定理 2は、出力パラメタの数を制限すれば再帰プログラム図式的能力は出力等価の意味で制限されることを示している。

つまり, $P_R^a(m, 0) \subseteq P_R^a(m, n) \subseteq P_R(m, n)$ であり,
 $P_R(m-1, n) \subseteq P_R(m, n)$ だから, 定理 2 から次の系が導び
 かれる。

$$[系 1] (i) \forall m \geq 1 \forall n \geq 0 \quad P_R^a(m-1, n) \text{ val } P_R^a(m, n)$$

$$(ii) \forall m \geq 1 \forall n \geq 0 \quad P_R(m-1, n) \text{ val } P_R(m, n) \quad \blacksquare$$

m 変数再帰図式 (recursive schema) のクラスを $R(m)$
 で表わすことにする。(再帰図式の定義については [6] p319
 参照) ここで m 変数とは, 再帰図式のどの関数変数記号 (本
 稿での再帰サブルーティン記号に対応する) も高々 m 個のパラ
 メータしか持たないことを意味する。[6]の定理 4-5, p324 及び
 [2]の 3-6, p33 の構成法から直ちに次の命題が導びかれる*。

$$[命題 2] \quad \forall m \geq 1 : R(m) \stackrel{op}{=} P_R^a(m, 1) \quad \blacksquare$$

この命題と定理 2 及び, $P_R^a(m-1, 1) \subseteq P_R(m-1, 1)$,
 $P_R^a(m, 0) \subseteq P_R^a(m, 1)$ から次の系が導びかれる。

$$[系 2] \quad \forall m \geq 1 : R(m) \text{ val } R(m+1) \quad \blacksquare$$

また, 定理 1-(i), 定理 3-(i) から $P \stackrel{op}{\leq} P_R^a(m, n) \text{ val}$
 $P_R^a(m, 1)$ だから, 定理 2 から次の系も導びかれる。

$$[系 3] \quad P \text{ val } R \stackrel{def}{=} \bigcup_{m=0}^{\infty} R(m) \quad \blacksquare$$

系 2 は [4] で, 系 3 は [2] でそれぞれ示された結果である。

* 再帰図式における計算規則 (computation rule) は, leftmost-
 onnermost rule ([6], p321) とする。再帰図式に対しても定義 2, 3
 と同様にして出力, 動作の同等価性が定義される。

定理 3-(i), (ii) は, 出力パラメタの数を 1 つに制限しても出力等価の意味では能力を小さくすることはないことを示している。しかし, 定理 3-(iii) は, 出力パラメタの数が 1 より多いときは, 能力に出力等価の意味で差が出ることを示し, 定理 3-(iv) は, 入力パラメタの数を越えない範囲で, 出力パラメタの数に応じて, 動作等価の意味で能力に差が出ることを意味している。つまり次の系が導びかれる。詳細は略す。

$$\text{[系 4]} \quad (i) \quad \forall m \geq 1 : P_R^a(m, 0) \text{ val } P_R^a(m, 1)$$

$$(ii) \quad \forall m \geq 1 : P_R(m, 0) \text{ val } P_R(m, 1) \quad \blacksquare$$

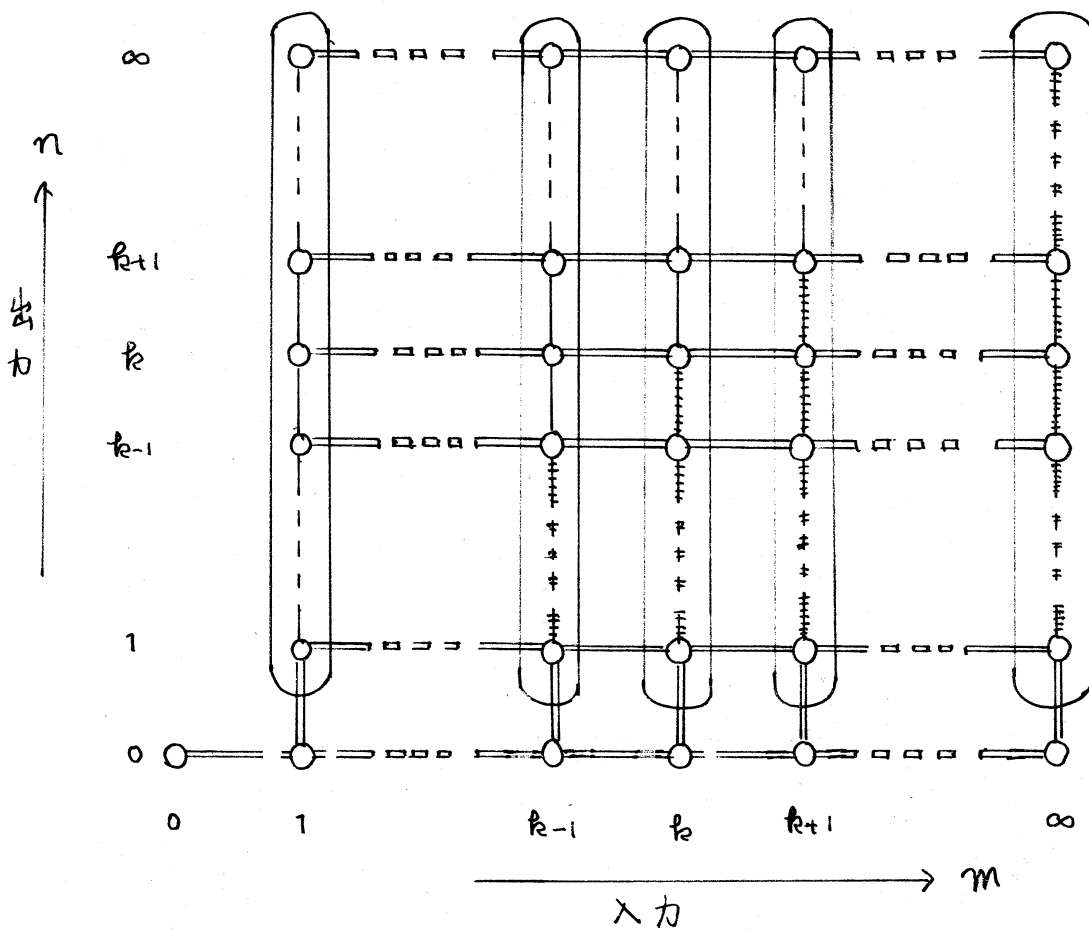
$$\text{[系 5]} \quad (i) \quad \forall m \geq 1 \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, m\} : P_R^a(m, n-1) \supseteq P_R^a(m, n)$$

$$(ii) \quad \forall m \geq 1 \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, m\} : P_R(m, n-1) \supseteq P_R(m, n) \quad \blacksquare$$

動作等価性はある意味で厳しい等価性と考えられる。定理 3-(i), (ii) がこの厳しい等価性について成立し得ないことは, 定理 3-(iii), (iv) で示されたが, これらほどの程度まで厳しい等価性に基づいて成立するのは, 今後に残された問題である。また, $m < n$ なる m, n に対して, $P_R^a(m, n-1) \supseteq P_R^a(m, n)$, $P_R(m, n-1) \supseteq P_R(m, n)$ が成立するかどうかは未解決の問題である。

4. 比較図

3 節で得た結果を図示すると, 図 4 に示る。図 4 の各節点



$\left[\begin{array}{l} \forall n \geq 0 \quad P_R(0, n) \stackrel{\text{def}}{=} P_R(0, *) \text{ なので, このクラスを} \\ P_R(0, 0) \text{ で示している. } P_R^a(0, n) \text{ についても同じ.} \end{array} \right]$

— : 包含関係がある。

+ + + + : op の意味の真の能力差がある。

= = : Val の意味の真の能力差がある。

○ : Val の意味で等価である。

図4 $P_R(m, n)$, $P_R^a(m, n)$ の比較図

は, プログラム図式のクラス $P_R(m, n)$ とは $P_R^A(m, n)$ を表わしている。つまり, $P_R(m, n)$ と $P_R^A(m, n)$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) は同じ構造の比較図を持つ。また, $P_R(m, n)$ と $P_R^A(m, n)$ の間の関係は,

$$(1) \quad \forall m \geq 0 \quad \forall n \geq 0 : P_R^A(m, n) \subseteq P_R(m, n)$$

$$(2) \quad \bigcup_{m, n=0}^{\infty} P_R(m, n) \stackrel{op}{=} \bigcup_{m, n=0}^{\infty} P_R^A(m, n)$$

$$(3) \quad \forall m \geq 0 \quad \forall n \geq 0 : \exists (P_R(0, k) \cup P_R^A(m, n))$$

が成り立つことになる。

最後に, 本研究の機会を与えられた石井ソフトウェア部長, 日頃御指導いただく鳥居言語処理研究室長に感謝いたします。

[参考文献]

- [1] Paterson & Hewitt: Record of Proj. MAC Conf. P119 (1970)
- [2] Constable & Gries: SIAMJ. Computing 1, P66 (1972)
- [3] Brown et al.: SIAMJ. Computing 1, P242 (1972)
- [4] Chandra & Manna: J. Computer Languages 1, P219 (1975)
- [5] 二本, 木村: 信学論D Vol 59-D, No. 10 P725 (1976)
- [6] Manna: Mathematical Theory of Computation, McGraw-Hill, N.Y., (1974)
- [7] Aho, Hopcroft & Ullman: The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass., (1974)

付 録 (定理の証明の概要)

(定理 1 - (i)) 任意の $S \in PR(m, n)$ に対して, $S \equiv S'$ なる $S' \in PR^a(m', n')$ を構成出来ることを示す。 S を構成する各フローグラフごとに次の操作により, それに対応した有限個のアサイクリック・フローグラフを作る。

1. フローグラフ中のどのループも少くとも 1 つの切断点を含むように, 適当なエッジ上に切断点を作り, 各切断点に新しい再帰サドルティン記号を対応させる。
2. フローグラフを切断点で分断して, 次のようなアサイクリック・フローグラフを作る。(a) 各アサイクリック・フローグラフの開始節点は元のフローグラフ開始節点又は切断点である。(b) 各アサイクリック・フローグラフの停止節点は元のフローグラフの停止節点又は切断点である。(c) 各切断点及び元のフローグラフの開始節点を開始節点とするアサイクリック・フローグラフを正確に 1 つ作る。
3. 切断点以外の節点へは元のフローグラフと同じ命令をうべし, 切断点へは次のような命令をうべし。 (a) 各アサイクリック・フローグラフの開始節点となっている切断点へは, その切断点に対応する再帰サドル

ルファン記号 F_i を使った (S2) タイプの命令 $F_i(\bar{x})$.

(b) 停止節点となっている切断点へは (H2) タイプの命令 $\text{RETURN}(\bar{x})$.

ここで $\bar{x}$ は、元のフローグラフの各節点にラベル付けされた命令中に現れた変数記号全部を集めたベクトルである.

各フローグラフに対し、上述の 1, 2, 3 の操作を施こして得られたアサイリット・フローグラフの集合が S' とする.

[定理 7-(ii)] 次のようなプログラム図式 $S_{RWH}(m+1) \in PR(0, *)$ を考える.

```

START(x);
 $y_1 \leftarrow x$ ;
 $y_2 \leftarrow g(y_1); y_3 \leftarrow g(y_2); \dots; y_{m+1} \leftarrow g(y_m);$ 
L:  if  $\neg p(y_1)$   then  HALT( $y_1$ )
      else   $y_1 \leftarrow f(y_1);$ 
      if  $\neg p(y_2)$   then  HALT( $y_2$ )
      else   $y_2 \leftarrow f(y_2);$ 
       $\vdots$ 
      if  $\neg p(y_{m+1})$  then  HALT( $y_{m+1}$ )
      else   $y_{m+1} \leftarrow f(y_{m+1});$ 
      goto L.
  
```

このプログラム図式は, Restricted Witch Hunt と呼ばれ, Chandra & Manna [4] において導入されたものであり, 次のような性格を持つ。

```

if (  $\exists i \geq 0 \exists j \leq m : p(f_i g_j x) = \text{false}$  )
  then return  $f_i g_j x$ 
  else diverge .

```

[4] ではこういった性質を持つプログラム図式が決して $R[m]$ の中には存在しないことが証明されている。ところがこの証明が, そのまま $\bigcup_{n=0}^{\infty} P_R^a[m, n]$ に対しても有効であることは容易に了解される。従って,

$\forall S \in \bigcup_{n=0}^{\infty} P_R^a[m, n] : \neg (S \stackrel{\text{val}}{=} S_{RW H}(m+1))$
 が示されることになり, 定理が証明される。

[定理2] 次のような性質を持つプログラム図式を考える。
 入力 x , unary 基本関数 l, r , 基本判定 p , ある自然数 m に対し,

```

if (  $\exists a_0, a_1, a_2, \dots : (a_0 = \varepsilon)$ 
       $\wedge (\forall i \in \{0, 1, 2, \dots\} : a_{i+1} = l \cdot a_i \vee a_{i+1} = r \cdot a_i)$ 
       $\wedge (\forall t \in \{lx, lrx, lr^2x, \dots, lr^{m-2}x, r^{m-1}x\}$ 
           $\forall a \in \{a_0, a_1, a_2, \dots\} : p(at) = \text{True})$ 
  then diverge

```

else return x .

ここで、 ε は空語を表わしている。このような性質を持つプログラム図式を今後 m -TS (Tree Search) 図式と呼ぶ。

次の $STS(m) \in PR^a(m, 0)$ が m -TS 図式であることは容易に了解される。

[START (x); $i \leftarrow 0$; $x_0 \leftarrow x$

while $i < m-1$ do

begin $y_i \leftarrow l(x_0)$; $x_0 \leftarrow r(x_0)$; $i \leftarrow i+1$ end;

$y_{m-1} \leftarrow x_0$;

$() \leftarrow F(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$

[HALT (x).

[$F(x_0, x_1, \dots, x_{m-1})$:

if $p(x_0) \wedge p(x_1) \wedge \dots \wedge p(x_{m-1})$

then begin

$y_0 \leftarrow l(x_0)$; $y_1 \leftarrow l(x_1)$; $\dots$; $y_{m-1} \leftarrow l(x_{m-1})$;

$() \leftarrow F(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$;

$y_0 \leftarrow r(x_0)$; $y_1 \leftarrow r(x_1)$; $\dots$; $y_{m-1} \leftarrow r(x_{m-1})$;

$() \leftarrow F(y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$;

end;

[RETURN ($()$).

ここで、 m は定数なので、便法として使っている、

while $i < m-1$ do ... といった、一見プログラム図式の定義に反するような記法は取り除くことが出来る点に注意されたい。

ところが、 $U_{n=0}^{\infty} PR(m-1, n)$ に属するどんなプログラム図式も m -TS 図式にはなり得ない。つまり、

$$\forall S \in U_{n=0}^{\infty} PR(m-1, n) : \neg (S \stackrel{\text{val}}{=} S_{TS}(m))$$

を示される。直観的には、 $m-1$ 個の入カパラメータしか持たない再帰サブルーティンでは、 $lx, lrx, \dots, lrx^{m-1}$ の下にぶらさがる m 個の木 (tree) を同時に探索するアルゴリズムが書けないということである。これから定理が示される。詳細は略す。

(定理 3-(i), (ii)) $PR(m, n)$ に属する任意のプログラム図式 S に対して、 $S \stackrel{\text{val}}{=} S'$ なる $S' \in PR(m, 1)$ の存在を示せばよい。 S 中の n 個の出カパラメータを持つサブルーティンに対して、 S' ではそれをシミュレートする n 個のサブルーティンを作る。すなわち、 S 中のサブルーティン $F_{i,n}^{m,n}$ に対し、 S' 中には $F_{i,1}^{m,1}, F_{i,2}^{m,1}, \dots, F_{i,n}^{m,1}$ なる n 個のサブルーティンがある。ここで、 $F_{ij}^{m,1}$ は $F_{i,n}^{m,n}$ と同じ入出ベクトルに対し、 $F_{i,n}^{m,n}$ の出カベクトルの第 j 番目の要素を返すサブルーティンである。 $F_{i,n}^{m,n}$ から $F_{i,1}^{m,1}, F_{i,2}^{m,1}, \dots, F_{i,n}^{m,1}$ を構成するには $F_{i,n}^{m,n}$ の

RETURN $\bar{z}$ 也, RETURN $(z_1, \dots, z_n)$ 也, RETURN (z_j)
 $(1 \leq j \leq n)$ とするだけでよい。ただし, S 中のサブルーティン
 の呼び出し文,

$$(y_1, \dots, y_n) \leftarrow F_{\bar{c}}^{m,n}(x_1, \dots, x_m)$$

は, begin $y_1 \leftarrow F_{\bar{c}1}^{m,1}(x_1, \dots, x_m);$
 $y_2 \leftarrow F_{\bar{c}2}^{m,1}(x_1, \dots, x_m)$
 $\vdots$
 $y_n \leftarrow F_{\bar{c}n}^{m,1}(x_1, \dots, x_m)$ end

に変わらなければならない。

$S \in PR^a(m, n)$ に対しても同様である。

[定理 3-(iii), (iv)] 次のプログラム図式 $ST_k(n) \in PR^a(n, n)$
 を考える。

```

┌ START (x);  $\bar{c} \leftarrow 0$ ;
  while  $\bar{c} < n-1$  do
    begin  $y_0 \leftarrow l(x); x \leftarrow r(x); \bar{c} \leftarrow \bar{c} + 1$  end;
     $y_{n-1} \leftarrow x$ ;
     $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \leftarrow F(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ;
     $z \leftarrow h(y_{n-2}, y_{n-1}); z \leftarrow h(y_{n-3}, z); \dots$ ;
     $z \leftarrow h(y_0, z)$ ;
└ HALT (z).
```

```

┌ F(x0, x1, ..., xn-1);
  if p(x0) ∧ p(x1) ∧ ... ∧ p(xn-1)
    then begin
      y0 ← l(x0); y1 ← l(x1); ...; yn-1 ← l(xn-1);
      (yl0, yl1, ..., yl,n-1) ← F(y0, y1, ..., yn-1);
      y0 ← r(x0); y1 ← r(x1); ...; yn-1 ← r(xn-1);
      (yr0, yr1, ..., yr,n-1) ← F(y0, y1, ..., yn-1);
      z0 ← h(yl0, yr0); z1 ← h(yl1, yr1); ...;
      zn-1 ← h(yl,n-1, yr,n-1);
    end
  else begin z0 ← x0; z1 ← x1; ...; zn-1 ← xn-1
    end
└ RETURN (z0, z1, ..., zn-1).

```

次のような解釈 Im を考える。

$$\begin{aligned}
 Im(p)(t) &= \text{False if } (t = a \cdot b \cdot x \wedge |a| = m \\
 &\quad \wedge b \in \{l, lr, \dots, lr^{m-2}, r^{n-1}\}) \\
 &= \text{True otherwise}
 \end{aligned}$$

ただし, $n=1$ のとき $\{l, lr, \dots, lr^{n-2}, r^{n-1}\} = \{\varepsilon\}$ と考える。このような解釈に対して, $STK(n)$ は次のような項 τ を値として返す。

$$\tau = h(\tau_m(lx), h(\tau_m(lr)x, h(\dots h(\tau_m(lr^{n-2}x, r^{n-1}x)) \dots)))$$

ここで, $\tau_m(y)$ は次のように, 帰納的に定義される。

$$\tau_0(y) = y,$$

$$\tau_{i+1}(y) = h(\tau_i(l(y)), \tau_i(r(x)))$$

このように再帰的関数式 $STK(n)$ に對して,

$$\forall S \in U_{m=0}^{\infty} \text{ Pr}[m, 0] : \neg (S \stackrel{\text{val}}{=} STK(1))$$

$$\forall n > 1 \quad \forall S \in U_{m=0}^{\infty} \text{ Pr}[m, n-1] :$$

$$\neg (S \stackrel{\text{op}}{=} STK(n))$$

が示され定理が証明される。詳細は略す。