

情報力学と量子マルコフ過程

東京理科大学 理工学部 情報科学科

須鎗弘樹 (Hiroki Suyari)

1. はじめに

古典的なマルコフ過程の拡張として, L. Accardi によって定義された量子マルコフ過程は, その数学的構成の汎用性から, 定義に用いられている transition expectation を具体的に与えることによって, 様々なタイプのマルコフ過程を記述することができる[A1]. そこで, このような多種多様な量子マルコフ過程を, エントロピー等の複雑量を用いて分類することが, 量子マルコフ過程の応用を考える上で重要であると考えられる. つまり, 相互エントロピーのような複雑量を用いることによって, 初期状態の情報量がどれだけ正確に伝わるかという議論を, 様々な量子マルコフ過程を用いて行うことは, 各々のマルコフ過程を分類し, 特徴付ける意味において, 興味深いことであろう. また, 相互エントロピーの収束について, 議論すること, 対象とする物理系の非可逆性及び平衡状態への推移を考える上で, 重要なことと思われる.

以上のような観点で, M. Ohya によって提唱されている情報力学に付随する2つの複雑量のうち, 相互エントロピータイプの複雑量を用いて, 量子マルコフ過程を分類する方法について述べる. その上で, 具体例として, 量子光学の分野で広く用いられている開放系のモデルを量子マルコフ過程に適用し, 相互エントロピーの計算結果について, 簡潔に記す.

2. 情報力学

ここでは, M. Ohya によって提唱されている情報力学[O6]について簡単に述べる.

近年, エントロピー, フラクタル次元, ファジィー, 不確定性等の, 対象とする系の複雑さを表す量, つまり, 複雑量が各々個々の分野でさかんに議論されている. このような複雑量は, 各々の分野で対象となる物理系の状態に対して定められているが, その情報論的意味はほぼ同等であると思われる. そこで, 個々の物理系(力学系)において, その複雑量を議論するだけでなく, その共通の性質を用いて, 他の物理系へ応用することができないだろうか考えることは, ごく自然なことであろう. 例えば, エントロピーを用いて議論している物理系に, フラクタル次元を適用できれば, エントロピーでは解析できない系の側面が見えるのではないかというのである. このような応用を考えるために, 個々の物理系のもつ数理構造を見直し,

その上で、複雑量のもつべき性質について、特徴付けることは、今まで別々に議論されていたことを、統一的に考えるにあたって、重要なことと思われる。このように、状態とそれに付随する複雑量の変化の力学を情報力学という。この概念は、単なる一般化ではなく、今まで個々の系において議論されてきた複雑量のもつべき共通の性質を抽出し、特徴付け、それらを他の系へ応用することがその目的であることを、再度強調しておこう。

まず、系の数理構造について述べる。一般に、どのような系も、その系のもつ状態とその変化によって、記述されている。通常、そのような系の数理構造は、次の一次構造で与えられている。

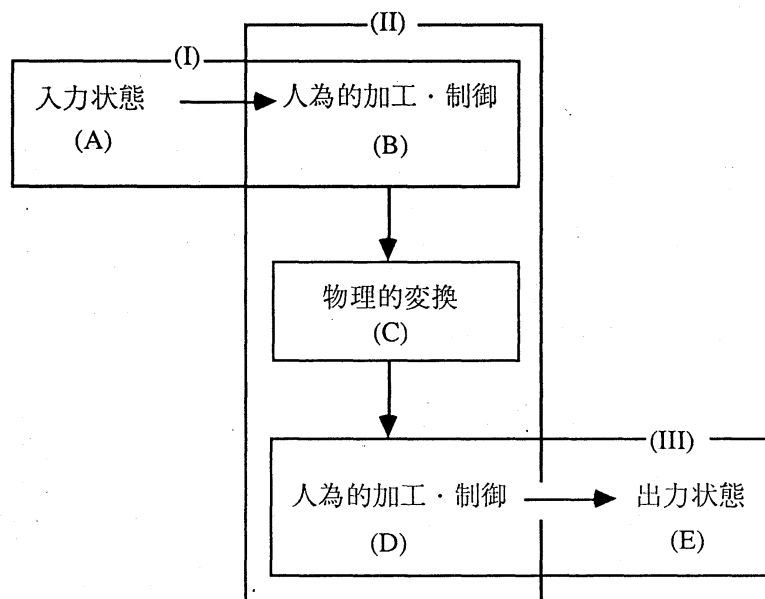


図1 系の数理構造

上の(I)(= A + B)を入力系、(II)(= B + C + D)を変換系(チャネル)、特に(C)を実変換系、(III)(= D + E)を出力系と呼ぶ。この一次構造が階層を成すと様々な系が出来上がることになる。

入力系は、準備された状態、シグナル、符号化されたシグナルなどと呼ばれる状態、いわゆる、“裸”の状態を人為的に加工したり制御したりして目的に応じたものに作りかえる系で、こうして作られた状態を“衣を着た(入力)状態”と呼ぶ。この衣を着た状態が、意図的には制御できない実変換系で外的変化を受け、それが再び人為的な加工を施され、出力状態として取り出されるのである。なお、最も基本的な構造は、BとDを除いた「A→C→E」である。

このような力学系の例[06]は様々あるが、ここでは、より一般的なC*系の記述について、その対応関係を表すと、次のように書ける。

< C^* 系 >

- (A) $\cdots \varphi \in \mathfrak{S}$ (C^* 代数 $\mathcal{A}$ 上の状態の集合)
- (B) $\cdots$ 自己同型写像 $\alpha: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$
- (C) $\cdots$ ある変換 $\Gamma: \mathfrak{S} \rightarrow \overline{\mathfrak{S}}$. ただし, $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathfrak{S}})$ は出力系である.
- (D) $\cdots$ 自己同型写像 $\bar{\alpha}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \overline{\mathcal{A}}$
- (E) $\cdots \bar{\varphi} = \Gamma\varphi$

この C^* 系の記述を用いると, 一般に, 系は次の 3 組 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha(G))$ で表される.

$\mathcal{A}$: 考察の対象 (観測量など) となるものの全体

$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$ の元に対し, ある科学量 (観測値など) を対応させる仕方 (関数) の集合

$\alpha(G)$: $\mathcal{A}$ の元や $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ の元の意図的变化を表す $g \in G$ をパラメータにもつ写像

例えば,

$\mathcal{A}$: Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A の集合

$\mathfrak{S}(\mathcal{A})$: Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素 ρ の集合

$\alpha(G)$: Hamiltonian H より生成されるユニタリー変換 $U_t = \exp(itH)$

$$A_t = U_t A U_t^*, \quad \rho_t = U_t \rho U_t^*$$

と定めると, 3 組 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha(G))$ は量子系の記述を与えている. このように,

『 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}(\mathcal{A}), \alpha(G))$ に数理構造を与える. $\Leftrightarrow$ 系を記述する理論が決まる.』

と考えることができる.

ここで, 入力系と出力系が各々 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(G))$ と $(\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathfrak{S}}, \bar{\alpha}(\overline{G}))$ で表されたとき, 写像 $\Lambda^*: \mathfrak{S} \rightarrow \overline{\mathfrak{S}}$ をチャンネルという. 特に, 図 1 の (II) に対応するチャンネルは他の系を包含する階層性を持っているので, 統計物理でよく扱われる開放系の構造を持っている. 例えば, 第 3 の系 $(\mathcal{B}, \mathfrak{S}', \beta(G'))$ と $(\overline{\mathcal{B}}, \overline{\mathfrak{S}'}, \bar{\beta}(\overline{G}'))$ が入出力系に影響を及ぼす次の形は, その一例である.

$$\mathfrak{S} \rightarrow \boxed{\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}' \rightarrow \overline{\mathfrak{S}} \otimes \overline{\mathfrak{S}'}} \rightarrow \overline{\mathfrak{S}}$$

この具体例として, 4 章で議論する量子光学における開放系のモデルがある.

次に, チャンネルについて述べる.

定義 2.1: (1) Λ^* がアファイン (i.e., 任意の $\varphi, \psi \in \mathfrak{G}$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対して, $\Lambda^*(\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi) = \lambda\Lambda^*\varphi + (1-\lambda)\Lambda^*\psi \in \mathfrak{G}$) であるとき, Λ^* は線形チャネルであるという.

(2) $\Lambda: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}$ が, 任意の自然数 n に対して,

$$\sum_{i,j=1}^n B_i^* \Lambda(A_i^* A_j) B_j \geq 0 \quad \forall B_i \in \mathcal{A}, \forall A_i \in \overline{\mathcal{A}}$$

を満たすとき, Λ^* は完全正チャネルであるという. ただし, Λ はチャネル Λ^* の共役変換である. (i.e., $\Lambda^*\varphi(A) = \varphi(\Lambda A)$, $\varphi \in \mathfrak{G}$, $A \in \mathcal{A}$)

さて, このチャネルという概念は, 次に述べるリフティング[A2]という概念と深く関わっている.

定義 2.2: 連続写像 $\mathcal{E}^*: \mathfrak{G}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{G}(\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}})$ をリフティングという.

このリフティングが与えられると, 次のように 2 種類のチャネル Λ_1^* と Λ_2^* を構成することができる.

$$\begin{aligned} \Lambda_1^*: \mathfrak{G}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{G}(\overline{\mathcal{A}}), & \Lambda_1^*\varphi(\overline{A}) &\equiv (\mathcal{E}^*\varphi)(I \otimes \overline{A}) \quad \forall \overline{A} \in \overline{\mathcal{A}} \\ \Lambda_2^*: \mathfrak{G}(\mathcal{A}) &\rightarrow \mathfrak{G}(\mathcal{A}), & \Lambda_2^*\varphi(A) &\equiv (\mathcal{E}^*\varphi)(A \otimes I) \quad \forall A \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

これらはいずれも, より大きな系 $\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$ における状態 $\mathcal{E}^*\varphi$ を各々 1 つの系へ制限することによって得られるチャネルであり, 先に述べた開放系におけるリダクション等はその一例である.

一方, チャネル $\Lambda^*: \mathfrak{G} \rightarrow \overline{\mathfrak{G}}$ と状態 $\varphi \in \mathcal{S} \subset \mathfrak{G}$ ($\mathcal{S}$ は $\mathfrak{G}$ の部分集合で基準系という.) が与えられたとき, 状態 φ のスペクトル分解やシャッテン分解などのような分解:

$$\varphi = \int_{\mathcal{S}} \omega d\mu$$

をとると, リフティング (合成状態) $\mathcal{E}^*\varphi$ は次のように定められる.

$$\mathcal{E}^*\varphi = \int_{\mathcal{S}} \omega \otimes \Lambda^*\omega d\mu$$

このリフティングは量子マルコフ過程の生成に有用なのであるが, 詳細は次章で述べる. また, このリフティングの構築において重要なのは, 状態の非線形性と非破壊性を有していることである[A2].

以上の議論より，チャンネルが与えられると，リフティングが得られ，リフティングが与えられると，チャンネルが得られることがわかる．これらの対応関係の例はいくつかあるが，第4章で述べる開放系のモデルについて，その例を示す．

例：開放系のモデル

2つの系 Σ_1 と Σ_2 が相互作用しているとき， Σ_1 における状態 ρ に着目することにする．つまり， Σ_1 における状態 ρ が Σ_2 における状態 σ との相互作用の結果，どのように影響を受け，どのような(平衡)状態に推移するのかという議論をすることが統計力学などでよく見られる．この変化は，合成系 $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ のハミルトニアンを H とし，その時間発展を $U_t = \exp(itH)$ とすると，合成系 $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ における初期状態 $\rho \otimes \sigma$ は，リフティング：

$$\mathcal{E}_t^* \rho \equiv U_t^*(\rho \otimes \sigma)U_t$$

によって変化するので， Σ_1 における状態 ρ は

$$\Lambda^* \rho = \text{tr}_{\Sigma_2} \mathcal{E}_t^* \rho$$

によって，その変化が記述できる．

さて，今まで状態の変化に力学について述べてきたが，情報力学のもう一方の概念である複雑量について述べる．

$\mathcal{S} \subset \mathfrak{S}$ を基準系とすると，次の2種類の複雑量が導入される．

- (1) $C^{\mathcal{S}}(\varphi)$ ：基準系 $\mathcal{S}$ からみた状態 φ の有する複雑量
- (2) $T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*)$ ：状態 φ が他の状態 $\bar{\varphi} (= \Lambda^* \varphi)$ に変化したとき， φ より $\bar{\varphi}$ へ遺伝した複雑量

このような複雑量の満たすべき数学的条件は次のように与えられている[06]．

複雑量の満たすべき条件：

- (1) 正值性：考察の対象となる $\mathcal{S} \subset \mathfrak{S}$ に対して，

$$C^{\mathcal{S}}(\varphi) \geq 0$$

- (2) 不変性：適当な条件を満たす $\mathfrak{S}(\mathcal{A})$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{B})$ への全単射 j に対して，

$$C^{\mathcal{S}}(\varphi) = C^{j(\mathcal{S})}(j(\varphi))$$

$$T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*) = T^{j(\mathcal{S})}(j(\varphi); \Lambda^*)$$

- (3) 劣加法性： $\Phi \in \mathcal{S} \subset \mathfrak{S}$, $\varphi \equiv \Phi \upharpoonright \mathcal{A} \in \mathcal{S}_1 \equiv \mathcal{S} \upharpoonright \mathcal{A}$, $\psi \equiv \Phi \upharpoonright \mathcal{B} \in \mathcal{S}_2 \equiv \mathcal{S} \upharpoonright \mathcal{B}$ であるとき，

$$C^{\mathcal{S}}(\Phi) \leq C^{\mathcal{S}_1}(\varphi) + C^{\mathcal{S}_2}(\psi)$$

(4) 基本不等式： $0 \leq T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*) \leq C^{\mathcal{S}}(\varphi)$

上の条件を満たす複雑量として、 $C^{\mathcal{S}}(\varphi)$ にはエントロピー、 $T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*)$ には相互エントロピー等があるが、まだその例は多くない。現在これらの条件を満たす複雑量を各力学系において、比較検討、応用する研究が続けられている[O8].

以上の準備の下、情報力学は次のように定義されている[O6].

定義 2.3：情報力学とは組

$$\{\mathcal{A}, \mathfrak{G}, \alpha(G); \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathfrak{G}}, \overline{\alpha}(\overline{G}); \Lambda^*; C^{\mathcal{S}}(\varphi), T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*); R\}$$

のことをいう。ここで、 R は操作（観測）に関わる各要素間の”関係”である。

この定義より、数理物理における様々な力学系を数理的に扱うとは、次のことをいう。

- (1) $\{\mathcal{A}, \mathfrak{G}, \alpha(G); \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathfrak{G}}, \overline{\alpha}(\overline{G})\}$ に数学的な構造を与えること。
- (2) チャネル Λ^* を決めること。
- (3) 2つの複雑量 $C^{\mathcal{S}}(\varphi)$ と $T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*)$ を定めること。

このような数理構造を与えることによって、扱う力学系に様々な複雑量を用いて、統一的な見解を与えることができる。本論文では、相互エントロピータイプの複雑量 $T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*)$ に量子系の相互エントロピーを用いて、量子マルコフ過程の簡単なモデルにおいて、その計算を示す。そこで、量子系の相互エントロピーの定義とその基本的性質を与えておく。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の密度作用素 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ のシャッテン分解を、

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_k \lambda_k E_k \\ \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \\ E_i &\perp E_j \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

とする。ここで、 λ_k は ρ の固有値であり、 E_k は λ_k に関する 1 次元射影作用素である。このとき、定義 2.1 で与えられる完全正チャネル $\Lambda^*: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{K})$ を用いて、次の 2 つの合成状態を用意する。

$$\mathcal{E}_0^* \rho = \sigma_0 = \rho \otimes \Lambda^* \rho, \quad \mathcal{E}_E^* \rho = \sigma_E = \sum_k \lambda_k E_k \otimes \Lambda^* E_k$$

これらの合成状態を用いて、相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は次のように与えられる。

定義 2.4 [O2]: シャッテン分解 $\rho = \sum_k \lambda_k E_k$ と 2 つの合成状態 σ_0, σ_E を用いて、相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup_E \{S(\sigma_E | \sigma_0) \mid E = \{E_k\}\}$$

で与えられる。ここで、 $S(\sigma_E | \sigma_0)$ は相対エントロピー：

$$S(\sigma_E | \sigma_0) = \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0)$$

である。

補題 2.5 [O2]:

$$S(\sigma_E | \sigma_0) = \sum_n \lambda_n S(\Lambda^* E_n | \Lambda^* \rho)$$

定理 2.6 [O2]: 入力状態 ρ とチャネル Λ^* に対して、次式が成り立つ。

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min\{S(\rho), S(\Lambda^* \rho)\}$$

これは、前述の複雑量の性質の (4) に相当する。この定理は、チャネル Λ^* を通って正しく伝えられた情報量は初期状態のそれよりも常に小さいことを表している。言い換えれば、相互エントロピーは通信などの効率に有用であることを示しているとも言える [O6, W1, W2]。他の相互エントロピーの性質については、[O5, O7] を参照。

3. 量子マルコフ過程

ここでは、L.Accardi によって定義された量子マルコフ過程について述べる。

まず、量子マルコフ過程の定義に必要な transition expectation は次のように定義される。

定義 3.1: $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ を各々ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$ 上の有界線形作用素の全体とする。このとき、transition expectation $\mathcal{E}: \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0$ は次の条件を満たす完全正写像で与えられる。

$$\mathcal{E}(1 \otimes 1) = 1 \quad (3.1)$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_1$ のとき, $\mathcal{E}$ を $\mathcal{B}$ 上の transition expectation という.

この transition expectation を用いて, 量子マルコフ過程は次のように与えられる.

定義 3.2 [A1, A3, A4]: $\{\mathcal{E}_n\}_{n \geq 0}$ を $\mathcal{B}$ 上の transition expectation の集合列とする. このとき, 次の条件を満たすような, 単位元を保存する完全正写像 $E_{01}: \otimes_N \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ が一意に存在する. 任意の自然数 n と任意の $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ に対して,

$$E_{01}(A_0 \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_n \otimes 1 \otimes \dots) = \mathcal{E}_0(A_0 \otimes \mathcal{E}_1(A_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n(A_n \otimes 1) \dots)) \quad (3.2)$$

ここで, φ_0 を $\mathcal{B}$ 上の状態とすると, $\otimes_N \mathcal{B}$ 上の状態 φ を次のように定義する.

$$\varphi = \varphi_0 \circ E_{01} \quad (3.3)$$

このとき, φ は次式を満たす.

$$\varphi(A_0 \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_n \otimes 1 \otimes \dots) = \varphi_0(\mathcal{E}_0(A_0 \otimes \mathcal{E}_1(A_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{E}_n(A_n \otimes 1) \dots))) \quad (3.4)$$

(3.3) によって与えられた状態 φ を $(\varphi_0, \{\mathcal{E}_n\})$ によって決まる一般化マルコフ過程という. 特に, 任意の n に対して,

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0 \quad (3.5)$$

が成り立つとき, 状態 φ を斉次的 (homogeneous) という.

定義 2.2 と定義 3.1 より明らかに, 線形なリフティングの共役写像が transition expectation である. よって, 任意の線形なリフティングを量子マルコフ過程の構成に用いることができる [A2]. 特に, リフティングが convex product type と呼ばれる形の場合, 線形リフティングに限らず, その特徴を量子マルコフ過程の構成に適用することができる.

定義 3.3: リフティング $\mathcal{E}^*: \mathcal{G}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}})$ が convex product type であるとは, 任意の状態 $\rho \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ がリフティング $\mathcal{E}^*$ によって, $\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$ 上の product state の凸結合に写される場合をいう.

そこで, convex product type のリフティング $\mathcal{E}^*: \mathfrak{S}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}})$ を次のように定める.

$$\mathcal{E}^* \rho = \sum_k \lambda_k \rho_k \otimes \Lambda^* \rho_k \quad (3.6)$$

ただし, $\rho = \sum_k \lambda_k \rho_k$ はスペクトル分解またはシャテン分解とする.
そこで, 初期状態 $\rho \in \mathfrak{S}$ が次のように与えられたとき,

$$\rho = \sum_{k_1} \lambda_{k_1}^{(1)} \rho_{k_1}, \quad (3.7)$$

(3.6) より, $\mathcal{E}^* \rho$ は次のように決まる.

$$\mathcal{E}^* \rho = \sum_{k_1} \lambda_{k_1}^{(1)} \rho_{k_1} \otimes \Lambda^* \rho_{k_1} \quad (3.8)$$

(3.8) の $\Lambda^* \rho_{k_1}$ にリフティング $\mathcal{E}^*$ を施すと, $(\otimes \mathfrak{S})^3$ 上の状態:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1} \lambda_{k_1}^{(1)} \rho_{k_1} \otimes \mathcal{E}^*(\Lambda^* \rho_{k_1}) \\ &= \sum_{k_1} \lambda_{k_1}^{(1)} \rho_{k_1} \otimes \sum_{k_2} \lambda_{k_2}^{(1,2)} \rho_{k_2} \otimes \Lambda^* \rho_{k_2} \\ &= \sum_{k_1, k_2} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(1,2)} \rho_{k_1} \otimes \rho_{k_2} \otimes \Lambda^* \rho_{k_2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

が定まる. ここで, $\Lambda^* \rho_{k_1} = \sum_{k_2} \lambda_{k_2}^{(1,2)} \rho_{k_2}$ を用いた. このような操作を n 回繰り返すと, 状態 $\mathcal{E}_n^* \rho \in (\otimes \mathfrak{S})^{n+1}$ は次式で与えられる.

$$\mathcal{E}_n^* \rho = \sum_{k_1, \dots, k_n} \lambda_{k_1}^{(1)} \lambda_{k_2}^{(1,2)} \dots \lambda_{k_n}^{(n-1,n)} \rho_{k_1} \otimes \rho_{k_2} \otimes \dots \otimes \rho_{k_n} \otimes \Lambda^* \rho_{k_n}. \quad (3.10)$$

ただし,

$$\Lambda^* \rho_{k_i} = \sum_{k_{i+1}} \lambda_{k_{i+1}}^{(i,i+1)} \rho_{k_{i+1}} \quad (i=1, \dots, n-1) \quad (3.11)$$

(3.6) が古典系における同時確率の自然な拡張になっていることが, 容易にわかるだろう. 実際, 状態 $\mathcal{E}_n^* \rho$ は, M.Ohya によって導入された合成状態に他ならない [O6]. これは, 量子系においては, 古典系における同時確率の概念は存在しないことが知られており, それに対応するものとして, 合成状態が用いられている. この古典系と量子系の確率の違いについては, [B1] を参照.

(3.10) より, n 回のチャネルが施されたときの終状態 $\Lambda^{*n} \rho \in \mathfrak{S}$ は, 最初の $\otimes^n \mathcal{H}_0$

について部分トレースをとると得られる。

$$\Lambda^{**}\rho = \text{tr}_{[1,n]}\mathcal{E}_n^*\rho. \quad (3.12)$$

(3.10), (3.11), (3.12) を用いると, 相互エントロピーの収束状況 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(\rho; \Lambda^{**})$ を解析することができる。このような

以上のようなプログラムは量子系の相互エントロピーに限らず, 他の複雑量 $T^{\mathcal{S}}(\varphi; \Lambda^*)$ にも適用することができると思われる。情報力学を用いた複雑量の推移について, より一般的な議論として, 論文[O9] に詳しく, 減衰過程を表すチャンネルを用いたときの議論は, 論文[O10] に詳しい。

4. 量子光学における開放系のモデルへの応用

統計力学でよく見られるように, 注目しているある系 (以下, 観測系という。) があり, 観測系が他の系と相互作用を繰り返した場合, 観測系の状態はどのような平衡状態に推移していくかという問題は, 多くの数理論理学者によって, 研究されてきた。このようなモデルは開放系のモデルといわれる。

この章では, 量子光学における開放系のモデルを量子マルコフ過程に適用し, 相互エントロピーを用いて, 平衡状態への推移に関する議論について, 簡単に述べる。

まず, 開放系のモデルの数学的表現は次のように与えられる。

系 Σ_0 をヒルベルト空間 $\mathcal{H}_0$ で表し, この系と相互作用をおこすもうひとつの系 Σ_1 (以下, reservoir という。) をヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ で表す。系 Σ_0, Σ_1 の初期状態を各々 $\rho \in \mathfrak{G}_0, \omega \in \mathfrak{G}_1$ ($\mathfrak{G}_i$ は, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_i$ ($i=0,1$) 上の状態の全体) とする。このとき, 2つの系 Σ_0 と Σ_1 の相互作用の後の状態 $\tilde{\rho} \in \mathfrak{G}_0 \otimes \mathfrak{G}_1$ は次のように与えられる。

$$\tilde{\rho} = U^*(\rho \otimes \omega)U \quad (4.1)$$

ここで, $U = \exp(-itH)$ で, H は $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$ 上のハミルトニアンを表す。

量子光学において, two weakly coupled oscillars と呼ばれる弱い相互作用を起こす2つの調和振動子のハミルトニアン H は次のように与えられる。[L2]

$$H = H_0 + H_1 + H_{01} \quad (4.2)$$

$$H_0 = \hbar\omega_0 a^*a, \quad H_1 = \sum_j \hbar\omega_j b_j^*b_j, \quad H_{01} = \hbar \sum_j (\varepsilon_j b_j a^* + \varepsilon_j^* b_j^* a) \quad (4.3)$$

ここで, H_0, H_1, H_{01} は各々, 注目している系, reservoir, これらの相互作用のハミルトニアンを表している。また, a, a^* は $\mathcal{H}_0$ 上の, b_j, b_j^* は $\mathcal{H}_1$ 上の生成作用素, 消滅作用素を表し, $\varepsilon_j (j \in N)$ は, 相互作用の強さを表す定数である。

以下, 簡単のため, reservoir がシングルモード, $\hbar=1$ と仮定して, 全系のハミルトニアン H を, 次のように表す.

$$H = H_0 + H_1 + H_{01} = a^*a + b^*b + \varepsilon(a^*b + ab^*) \quad (4.4)$$

このとき, 初期状態 $\rho \in \mathfrak{S}_0$ の変換は数学的に次のように表現出来る.

$$\Lambda^* \rho = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} U_i (\rho \otimes \omega) U_i^* \quad (4.5)$$

ただし, $U_i = \exp(-itH)$, $\text{tr}_{\mathcal{H}_1}$ は, $\mathcal{H}_1$ に関する部分トレースを表す.

ここで, (4.5) のチャネルを用いて, 相互エントロピーを計算する上で, 次の Stinespring-Kraus の表現が有効である. ここでは, 簡単のため, Kraus の定理を示す [K1, S1].

定理 4.1

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする. 線形写像 $\Lambda: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が完全正写像であるのは, 次の形をしているときに限る.

$$\Lambda(A) = \sum_{i=1}^n V_i^* A V_i \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (4.6)$$

ただし, $V_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ は, 半等距離作用素であり, $n \leq \dim(\mathcal{H})$.

ここで, (4.5) で表されたチャネルに対する Stinespring-Kraus の表現の導出を簡単に示す. 詳細は, 論文[A5] 参照.

まず, (4.4) より,

$$[H_0 + H_1, H_{01}] = 0 \quad (4.7)$$

が成り立つことが容易にわかる. $H_0 + H_1$ の固有値は, 自然数であるから, 各固有値 $n \in \mathbb{N}$ に対する $H_0 + H_1$ の固有空間を K_n とすると, K_n は $\{[j \otimes n - j]; j=0, \dots, n\}$ で張られた $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$ の部分空間であり, $H_{01}K_n \subseteq K_n$ が成り立つ. よって, $H_{01}^{(n)}$ を

$$H_{01}^{(n)} \equiv H_{01} \upharpoonright K_n \quad (4.8)$$

で定義すると, $H_{01}^{(n)}$ は $C^{n+1} \rightarrow C^{n+1}$ への有限自己共役作用素であり, $(n+1)$ 個の固有値 $\lambda_0^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ を持つ. このとき, 固有値 $\lambda_j^{(n)} (j=0, \dots, n)$ に対応する固有ベクトルを $\psi_j^{(n)}$ とすると,

$$H_{01}^{(n)} \psi_j^{(n)} = \lambda_j^{(n)} \psi_j^{(n)} \quad (j=0, \dots, n) \quad (4.9)$$

が成り立つ。ただし, $\psi_j^{(n)}$ は, $\psi_j^{(n)} \in K_n$ より

$$\psi_j^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^n C_{\alpha}^{(n,j)} |\alpha \otimes n - \alpha\rangle \in K_n. \quad (4.10)$$

と書け, $C_{\alpha}^{(n,j)}$ は, $\text{CONS } \{\psi_j^{(n)}\}$ の条件を満たす係数である。(4.9) より,

$$H_{01}^{(n)} = \sum_{j=0}^n \lambda_j^{(n)} |\psi_j^{(n)}\rangle \langle \psi_j^{(n)}| \quad (4.11)$$

$$H_{01} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{01}^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \lambda_j^{(n)} |\psi_j^{(n)}\rangle \langle \psi_j^{(n)}| \quad (4.12)$$

が成り立つから, 全系 $\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_1$ 上のユニタリー作用素 $U_t = \exp(-itH)$ は, 次のように展開できる.

$$\begin{aligned} U_t &= \exp(-itH) = \exp(-it(H_0 + H_1)) \exp(-itH_{01}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n \sum_{\alpha, \beta=0}^n e^{-it(n+\varepsilon\lambda_j^{(n)})} C_{\alpha}^{(n,j)} \overline{C_{\beta}^{(n,j)}} |\alpha\rangle \langle \beta| \otimes |n-\alpha\rangle \langle n-\beta| \end{aligned} \quad (4.13)$$

よって, 終状態 $\Lambda^* \rho \in \mathfrak{S}_0$ は,

$$\begin{aligned} \Lambda^* \rho &= \text{tr}_{\mathcal{H}_1} U_t (\rho \otimes \omega) U_t^* \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{\alpha, \beta=0}^n \sum_{\alpha', \beta'=0}^m d_{\alpha, \beta}^{(n)} \overline{d_{\alpha', \beta'}^{(m)}} \langle n-\beta | \omega | m-\beta' \rangle \langle \beta | \rho | \beta' \rangle \delta_{m-\alpha', n-\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha'| \end{aligned} \quad (4.14)$$

となる。ただし,

$$d_{\alpha, \beta}^{(n)} \equiv \sum_{j=0}^n e^{-it\varepsilon\lambda_j^{(n)}} C_{\alpha}^{(n,j)} \overline{C_{\beta}^{(n,j)}} \quad (4.15)$$

以下, 計算[A5]により, 次の Stinespring-Kraus の表現が得られる.

$$\Lambda^* \rho = \sum_{v=0}^{\infty} T_v (\rho \otimes \omega) T_v^* \quad (4.16)$$

ただし,

$$T_v \equiv \sum_{n=v}^{\infty} |n-v\rangle \langle \varphi_{n-v}^{(n)}| \quad (4.17)$$

$$\langle \varphi_{n-v}^{(n)}| \equiv \sum_{\beta=0}^n d_{n-v, \beta}^{(n)} \langle \beta| \otimes \langle n-\beta| \in K_n \quad (4.18)$$

ここで, $\{\varphi_{n-v}^{(n)}; n \geq v, n, v \in N\}$ に対して, 次の補題が成り立つことがわかっている.

補題 4.2

$$\langle \varphi_{n-v}^{(n)} | \varphi_{n'-v'}^{(n')} \rangle = \delta_{n, n'} \delta_{v, v'} \quad (4.19)$$

よって, (4.17) の T_v は半等距離作用素である。つまり, (4.16) は, Stinespring-

Kraus の具体的な表現に他ならない。この表現は、様々な複雑量を計算するのに有効であるが、ここでは、相互エントロピーを計算する。

(4.16) と (4.17) より、

$$\Lambda^* \rho = \sum_v \sum_{m, n \geq v} \langle \varphi_{n-v}^{(n)} | \rho \otimes \omega | \varphi_{m-v}^{(m)} \rangle |n-v\rangle \langle m-v| \quad (4.20)$$

以下の計算において、次のシャッテン分解：

$$\rho = \sum_i \lambda_i^p |i\rangle \langle i|, \omega = \sum_\gamma \mu_\gamma^\omega |\gamma\rangle \langle \gamma| \quad (4.21)$$

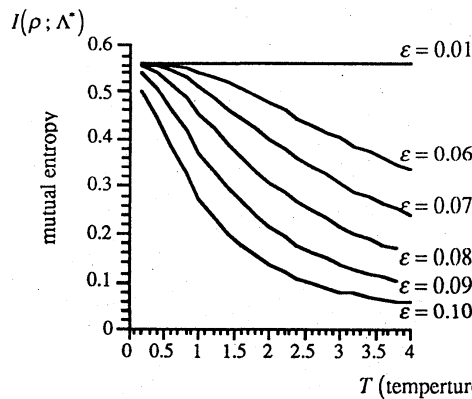
をおくと、(4.20) は、

$$\Lambda^* \rho = \sum_i \left(\sum_{\substack{l, v \\ (v-l)+i \geq 0}} \lambda_i^p \mu_{(v-l)+i}^\omega |d_{i,l}^{(v+i)}|^2 \right) |i\rangle \langle i|. \quad (4.22)$$

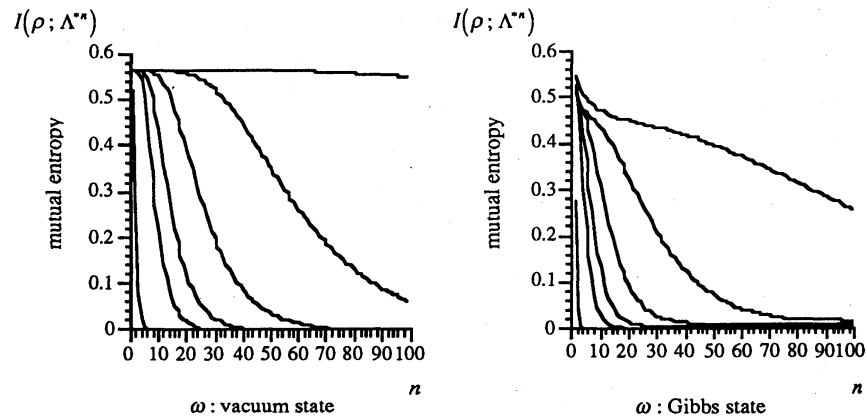
となる。明らかに、(4.22) はシャッテン分解である。以下、 ρ のシャッテン分解が一意であると仮定すると、相互エントロピー $I(\rho; \Lambda^*)$ は次のように得られる。

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sum_{k,l} \lambda_k^p \sum_{\substack{v \\ (v-k)+l \geq 0}} \mu_{(v-k)+l}^\omega |d_{l,k}^{(v+l)}|^2 \log \frac{\sum_{\substack{v_1 \\ (v_1-k)+l \geq 0}} \mu_{(v_1-k)+l}^\omega |d_{l,k}^{(v_1+l)}|^2}{\sum_{\substack{l, v \\ (v-l)+l \geq 0}} \lambda_l^p \mu_{(v-l)+l}^\omega |d_{l,l}^{(v_2+l)}|^2}. \quad (4.23)$$

この (4.23) を用いて、様々な場合の相互エントロピーが計算できることがわかる。その具体的な例として、reservoir の状態が真空状態のときと Gibbs 状態のときのグラフを示す。これらの詳細な議論については、論文 [A6] 参照。



$$\begin{aligned} \Lambda^* \rho &= tr_{\gamma_t} U_t (\rho \otimes \omega) U_t^* \\ U_t &= \exp(-itH_{01}), \quad H_{01} = \varepsilon(a^*b + ab^*) \\ \rho &= 0.75|0\rangle\langle 0| + 0.25|10\rangle\langle 10| \\ t &= 10 \end{aligned}$$



5. おわりに

本論文では、情報力学に付随する複雑量のうち、相互エントロピータイプの複雑量を用いて、量子マルコフ過程の分類などに応用するプログラムを述べた。さらに、その具体例として、量子光学によく見られる開放系のモデルを量子マルコフ過程に適用し、具体的な計算を行った。今後、これらの研究をさらに進めるために、他の複雑量を用いた解析を行う予定である。

謝辞

本研究において、ローマII大学 Volterra Center の Luigi Accardi 教授と東京理科大学理工学部の大矢雅則教授に深く感謝の意を表します。

参考文献

- [A1] Accardi L. ; Noncommutative Markov chains. In : international School of Mathematical Physics, Camerino, 268-295 (1974).
- [A2] Accardi L. and Ohya M. ; Compound channels, transition expectations and liftings", to appear in J. Multivariate Analysis.
- [A3] Accardi L. ; An outline of Quantum Probability, unpublished manuscript, 1990.
- [A4] Accardi L. ; Foundation of Quantum Probability, to be published.
- [A5] Accardi L., Ohya M. and Suyari H. ; Computation of mutual entropy in quantum Markov chains, submitted.
- [A6] Accardi L., Ohya M. and Suyari H. ; Dynamical change of mutual entropy in quantum Markov chains, in preparation.
- [B1] Bendjaballah C., Hirota O. and Ohya M. ; Optical Communication Theory, to be

published in Springer-Verlag.

- [D1] Davies, E.B. ; Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, 1976.
- [K1] Kraus K. ; States, effects and operations, Springer LNP N.190, 1983.
- [K2] Kummerer B. and Schroder W. ; in Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes, Springer LNM 1055, 1982, - (ed) Accardi L. and von Waldenfels W.
- [L1] Lindblad, G. ; Completely positive maps and entropy inequality Commun. Math. Phys. 40, 1975, 147-151
- [L2] Louisell, W.H. ; Quantum Statistical Properties of Radiation, John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [O1] Ohya M. ; Quantum Ergodic Channels in Operator Algebras. Journal of Mathematical Analysis and Applications 84, 1981, 318-327.
- [O2] Ohya M.; On Compound State and Mutual Information in Quantum Information Theory. IEEE Transactions of Information Theory IT-29, 1983, 770--774.
- [O3] Ohya M. ; Note on Quantum Probability. Letter al Nuovo Cimento 38, 1983, 402-404.
- [O4] Ohya M. ; State Change and Entropies in Quantum Dynamical Systems. Springer LNM 1136, 1985, 397-408 (ed) Accardi L. and von Waldenfels W.
- [O5] Ohya M. ; Some Aspects of Quantum Information Theory and Their Applications to Irreversible Processes, Reports on Mathematical Physics, 27, 1989, 19--47.
- [O6] Ohya M. ; Information dynamics and its application to optical communication processes, in Quantum Aspects of Optical Communication, Springer LNP 378, 1991, 81-92 (ed) Benjaballah C., Hirota O., Reynaud S.
- [O7] Ohya M. and Petz D. ; Quantum Entropy and its Use, Springer-Verlag 1993.
- [O8] M.Ohya and S.Naritsuka, On fuzzy relative entropy, Open Systems and Information Dynamics, Vol.1, No.3, 1993.
- [O9] Ohya M. ; State change, complexity and fractal in quantum systems, to be published.
- [O10] Ohya M. and Watanabe N. ; A mathematical study of information transmission in quantum communication processes, to be published.
- [S1] Stinespring W.F. ; Positive functions on C^* -algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 6, 1965, 211-216.
- [W1] Watanabe N. ; Efficiency of optical modulations with coherent state, Springer LNP 378, 1991, 350-360.
- [W2] Watanabe N. ; Efficiency of optical modulations for photon number states, Quantum Probability and related Topics 6, 1991, 489-498.