

巾零 Lie 群に付随する Gelfand 対

京大 理 菊地 克彦 (Katsuhiko KIKUCHI)

§ 0 序

N を連結かつ単連結な巾零 Lie 群, K を N に自己同型として作用する compact 群とする. すると, K は群代数 $L^1(N)$ にも自己同型として作用する. $L^1(N)$ の K 不変元全体のなす部分代数を $L_K^1(N)$ で表す. このとき, 対 $(K; N)$ が N に付随する Gelfand 対 (以下単に Gelfand 対) であるということ, $L_K^1(N)$ が可換であることとする. Benson-Jenkins-Ratcliff によると, $(K; N)$ が Gelfand 対ならば, N は高々 2-step である. ([BJR]). 今回は, 一般の 2-step 巾零 Lie 群について, $(K; N)$ が Gelfand 対であることの判定を, Heisenberg 群の場合に帰着させる方法を論じる. これは本質的には Carcano の判定条件に依存するが, その際に使われる N の既約 unitary 表現の代わりに, その表現に自然に付随する Heisenberg 群を用いて判定するという方法である.

その応用例として、 N の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ と導来 ideal $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ が異なる場合の様相を論じる。その際、compact 群 K の $Z(\mathfrak{g})$ への作用が Gelfand 対の判定に強く関わることを反例を用いて示す。

さらに、 K が n 次 torus T^n の場合の、 $(K; N)$ が Gelfand 対となる条件を決定する。これは、Leptin が [L] において行、た $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = Z(\mathfrak{g})$ の場合の結果の拡張をなすものである。

なお、以下において、中零 Lie 群は常に連結かつ単連結を仮定する。

§ 1 準備

$\hat{N}$ を N の既約 unitary 表現の同値類のなす空間とし、 Fell 位相が入っているとする。 $\pi \in \hat{N}$ とするとき、 $h \in K$ について N の表現 π_h を $\pi_h(x) = \pi(h \cdot x)$ で定義する。すると、 π_h も N の既約 unitary 表現になる。 K における π の安定化部分群を K_π とする: $K_\pi = \{h \in K \mid \pi_h \simeq \pi\}$ 。 π の表現空間を $\mathcal{H}_\pi$ とするとき、 $h \in K_\pi$ に対し、ある $\mathcal{H}_\pi$ 上の unitary 作用素 $W_\pi(h)$ が存在して、 $\pi_h(x) = W_\pi(h) \pi(x) W_\pi(h)^{-1}$ ($x \in N$)。 W_π は K_π の $\mathcal{H}_\pi$ 上の射影表現になる。 compact 群の unitary 表現の理論と同様にして、 W_π は K_π の既約射影表現の直和に分解される:

$$W_\pi = \sum c(T, W_\pi) T.$$

ここで, $c(T, W_h)$ は W_h における T の重複度である.

定理 1.1. [C] 以下の 3 つの条件は同値である:

- (1) $(K; N)$ は Gelfand 対.
- (2) 任意の $\pi \in \hat{N}$ について $c(T, W_h) \leq 1$.
- (3) ある稠密な部分集合 $S \subset \hat{N}$ が存在し, 任意の $\pi \in S$ について $c(T, W_h) \leq 1$.

$\hat{N}$ の部分集合 S に対し, $S \cdot K = \{\pi_h \mid \pi \in S, h \in K\}$ とおく.

系 1.2. 定理 1.1. の各条件は, 次の条件とも同値である:

- (4) $S \cdot K$ が稠密になるような $S \subset \hat{N}$ が存在し, 任意の $\pi \in S$ について $c(T, W_h) \leq 1$.

Kirillov の理論によると, 余随伴軌道の空間 $\mathfrak{n}^*/N$ と $\hat{N}$ には 1 対 1 対応がある ([Ki]). さらに, $\mathfrak{n}^*/N$ に $\mathfrak{n}^*$ からの商位相を入れると, この対応は同相になる ([Br]). ℓ に対応する N の既約 unitary 表現を π_ℓ と表す. いま, K の $\mathfrak{n}^*$ への右作用を $(\ell \cdot h)(X) = \ell(h \cdot X)$ ($\ell \in \mathfrak{n}^*, h \in K, X \in \mathfrak{n}$) で与える. すると, $(\pi_\ell)_h \simeq \pi_{\ell \cdot h}$. さらに, $((\text{Ad}^*(x)\ell) \cdot h)(X) = (\text{Ad}^*(h^{-1} \cdot x)(\ell \cdot h))(X)$ ($x \in N, \ell \in \mathfrak{n}^*, h \in K, X \in \mathfrak{n}$).

よって, $(\text{Ad}^*(N)l) \cdot K = \text{Ad}^*(N)(l \cdot K) \quad (l \in \mathfrak{n}^*)$. この
 ことにより, 系 1.2. における S として, $\bigcup_{\alpha \in A} (\text{Ad}^*(N)l_\alpha \cdot K)$
 が $\mathfrak{n}^*$ において稠密になるような $\{l_\alpha\}_{\alpha \in A}$ について, $\{\pi l_\alpha\}_{\alpha \in A}$
 をとればよい.

§ 2 Heisenberg 群への帰着

まず, $(2n+1)$ 次 Heisenberg 群 H_n の場合について考える. $\mathfrak{h}_n$
 を H_n の Lie 代数, K を自己同型群 $\text{Aut}(\mathfrak{h}_n)$ の compact 部分群
 とする. $\mathfrak{h}_n$ の中心 $\mathcal{Z}(\mathfrak{h}_n)$ は K 不変であり, K は compact だか
 ら, $\{1\}$ または $\{\pm 1\}$ を像にもつ K の character χ が存在し,

$$h \cdot \chi = \chi(h) \chi \quad (\chi \in \mathcal{Z}(\mathfrak{h}_n), h \in K).$$

いま, K が $\mathcal{Z}(\mathfrak{h}_n)$ に自明に作用しているとしよう. $\mathfrak{h}_n$ にお
 ける $\mathcal{Z}(\mathfrak{h}_n)$ の K 不変な補空間を V とする. このとき, V に適
 当な複素構造 I 及び複素内積 ω をとることにより, K は ω に
 関する unitary 群の部分群とみなせる.

H_n の既約 unitary 表現で, 中心において自明でないものは
 λ の central character で決定される. $\mathcal{Z}(\mathfrak{h}_n)$ の生成元を T
 とし, central character χ_λ を $\chi_\lambda(\exp tT) = e^{i\lambda t} \quad (t \in \mathbb{R})$
 とおくとき, 対応する H_n の既約 unitary 表現を R_λ と表す.
 $\{R_\lambda\}_{\lambda \neq 0}$ は $\hat{H}_n$ において稠密である. 定理 1.1 より, $\{R_\lambda\}_{\lambda \neq 0}$
 のみ考察すればよい. R_λ を Fock model で実現する.

$\lambda > 0$ に対し, $\mathcal{H}_\lambda$ ($\mathcal{H}_\lambda$) を V 上全体で正則 (反正則) な関数 f であって, $\int_V |f(w)|^2 e^{\frac{\lambda}{2}|w|^2} dw < +\infty$ となるもの全体のなす Hilbert 空間とする. ただし, dw は V を $\mathbb{R}$ 上 vector 空間とみたときの Lebesgue 測度. 表現 R_λ は次の形で与えられる:

$$(2.1) \quad (R_\lambda(z, t)f)(w) = e^{\sqrt{\lambda}t - \frac{\lambda}{2}w\bar{z} - \frac{\lambda}{4}|z|^2} f(w+z), \quad (\lambda > 0)$$

$$(2.2) \quad (R_\lambda(z, t)f)(w) = e^{-\sqrt{\lambda}t - \frac{\lambda}{2}w\bar{z} - \frac{\lambda}{4}|z|^2} f(w+z),$$

$\lambda > 0$ のとき, $\mathcal{H}_\lambda$ は正則多項式環 $\mathbb{C}[V]$ を, $\mathcal{H}_\lambda$ は反正則多項式環 $\overline{\mathbb{C}[V]}$ をそれぞれ稠密に含む.

$h \in K$ は, central character を不変にすることにより, K における R_λ の安定化部分群は K 自身になる. $h \in K$ に対し, $\mathcal{H}_\lambda$ 上の unitary 作用素 $W_\lambda(h)$ を次で定義する:

$$(W_\lambda(h)f)(w) = f(h^{-1} \cdot w), \quad (f \in \mathcal{H}_\lambda, w \in V).$$

簡単な計算により, $R_\lambda(h \cdot (z, t)) W_\lambda(h) = W_\lambda(h) R_\lambda(z, t)$ となることが分かる. 明らかに $W_\lambda(h_1 h_2) = W_\lambda(h_1) W_\lambda(h_2)$. さらに, $\mathbb{C}[V]$ は W_λ について不変であり, W_λ の $\mathbb{C}[V]$ 上の作用は $\lambda > 0$ のとり方に依らない. $\lambda < 0$ のときも, 正則関数を反正則関数に読み換えれば同様の議論がなされる. よって, ただ1つの実数 $\lambda_0 \neq 0$ について考察すればよい.

命題 2.1. [BJR] $(K; H_n)$ が Gelfand 対であるのは, ある $\lambda_0 \neq 0$ について W_{λ_0} が 高々 重複度 1 に既約分解される ときである.

話を一般の 2-step 中零 Lie 群 N に戻そう. N の既約 unitary 表現の構造を考える. $\ell \in \mathfrak{n}$ に対し, $\mathfrak{n}$ 上の交代形式を次で定義する:

$$B_\ell(X, Y) = \ell([X, Y]), \quad (X, Y \in \mathfrak{n}).$$

この B_ℓ を用いて, $\mathfrak{n}$ の部分空間 $\mathfrak{n}(\ell)$, $\mathfrak{b}(\ell)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} (2.3) \quad \mathfrak{n}(\ell) &= \{X \in \mathfrak{n} \mid B_\ell(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{n}\} \\ \mathfrak{b}(\ell) &= \mathfrak{n}(\ell) \cap \ker \ell \end{aligned}$$

命題 2.2. $\ell \in \mathfrak{n}$ を 0 でない元とする. このとき,

- (1) $\mathfrak{n}(\ell)$ は $\mathfrak{n}$ の ideal である.
- (2) $\mathfrak{b}(\ell)$ は $\mathfrak{n}$ の ideal である.
- (3) $\dim(\mathfrak{n}(\ell)/\mathfrak{b}(\ell)) = 1$.
- (4) $\ell|_{[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]} \neq 0 \Leftrightarrow \mathfrak{n}(\ell) \neq \mathfrak{n}$. このとき $\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(\ell)) > 1$.

さらに,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(\ell)) &= \mathfrak{n}(\ell)/\mathfrak{b}(\ell), \\ (\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(\ell))/(\mathfrak{n}(\ell)/\mathfrak{b}(\ell)) &\cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}(\ell). \end{aligned}$$

$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(\mathcal{U})$ は可換だから, $(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(\mathcal{U}))^*$ は $(2n+1)$ 次 Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}_n$ に同型になる. ただし $n = \frac{1}{2} \dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(\mathcal{U}))$. $B(\mathcal{U}) = \exp \mathfrak{b}(\mathcal{U})$ とおく. すると, $B(\mathcal{U}) \setminus N$ は $(2n+1)$ 次 Heisenberg 群に同型になる. ℓ に対応する N の既約 unitary 表現を π_ℓ とすると, $\pi_\ell \cong \mathbb{D}_{\ell_0} \circ \rho_\ell$ と表される. ただし, ρ_ℓ は N から $B(\mathcal{U}) \setminus N$ への自然な射影であり, $\ell_0 \in (\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(\mathcal{U}))^*$ は $\ell = \ell_0 \circ \rho_\ell$ なる元, $\mathbb{D}_{\ell_0}$ は ℓ_0 に対応する $B(\mathcal{U}) \setminus N$ の既約 unitary 表現である.

補題 2.3. $\ell, \ell' \in \mathfrak{n}^*$ とする. このとき

$$\pi_\ell \cong \pi_{\ell'} \iff \begin{cases} (1) & \mathfrak{n}(\mathcal{U}) = \mathfrak{n}(\mathcal{U}'), \\ (2) & \ell|_{\mathfrak{n}(\mathcal{U})} = \ell'|_{\mathfrak{n}(\mathcal{U})}. \end{cases}$$

証明は. 例えば [M, p1164, Theorem 2.3 (3)]

この補題から, 容易に次が得られる.

補題 2.4 $h \in K$, $\pi = \pi_\ell$ とする. このとき,

$$h \in K_\pi \iff \begin{cases} (1) & \mathfrak{n}(\mathcal{U}) = h \cdot \mathfrak{n}(\mathcal{U}), \\ (2) & \ell|_{\mathfrak{n}(\mathcal{U})} = \ell \cdot h|_{\mathfrak{n}(\mathcal{U})}. \end{cases}$$

ここで, 次で与えられる $\text{Aut}(N)$ の部分群を考える:

$$\text{Aut}(N)_\pi = \{ \varphi \in \text{Aut}(N) \mid (\pi)_\varphi \subseteq \pi \}.$$

ただし, $(\pi)_k(x) = \pi(\varphi(x)) \quad (x \in N)$. すると K_π は $\text{Aut}(N)_\pi$ の部分群とみなせる. $p_\ell: N \rightarrow B(\ell) \setminus N$ を自然な射影とし, 写像 Φ_π を次で定義する:

$$(2.4) \quad \Phi_\pi: \text{Aut}(N)_\pi \ni \varphi \mapsto \bar{\varphi} \in \text{Aut}(B(\ell) \setminus N).$$

ただし, $\bar{\varphi}(p_\ell(x)) = p_\ell(\varphi(x)) \quad (x \in N)$. すると, 補題 2.3 より Φ_π は well-defined であり, $\Phi_\pi(K_\pi)$ は $B(\ell) \setminus N$ の中心を不変にする.

定理 2.5. $(K; N)$ が Gelfand 対であるということは, すべての $\ell \in \mathcal{N}$ について, $\pi = \pi_\ell$ を対応する N の既約 unitary 表現とすると, $(\Phi_\pi(K_\pi); B(\ell) \setminus N)$ が Gelfand 対になるということである.

証明 定理 1.1 により, $\ell_1, m, n \neq 0$ のときのみ考えればよい. $\ell \in \mathcal{N}^+$ に対し, ある $\ell_0 \in (\mathcal{N}/B(\ell))^+$ が存在して $\pi_\ell \subseteq \mathcal{D}_{\ell_0} \circ p_\ell$ となる. すると,

$$\pi_\ell(k \cdot x) = \mathcal{D}_{\ell_0}(\Phi_\pi(k) p_\ell(x)), \quad (k \in K_\pi, x \in N)$$

$\mathcal{D}_{\ell_0}$ はある R_{λ_0} に同値とみなせるから, $\Phi_\pi(K_\pi)$ の intertwining 表現 W が存在して,

$$\mathcal{D}_{\ell_0}(\Phi_\pi(k) p_\ell(x)) = W(\Phi_\pi(k)) \mathcal{D}_{\ell_0}(p_\ell(x)) W(\Phi_\pi(k))^{-1}.$$

よって, $W_\pi = W \circ \Phi_\pi$ とすると, W_π は π_ℓ と $(\pi_\ell)_k$ を intertwine

する:

$$\pi_k(h \cdot x) = W_k(h) \pi_k(x) W_k(h)^{-1}.$$

よって,

$$c(T, W_k) \leq 1 \quad \forall T \in K_k \iff c(T', W) \leq 1 \quad \forall T' \in \mathfrak{K}_k(K_k)^\wedge.$$

このことと, 定理 1.1. 及び 命題 2.1. を組み合わせることにより主張を得る. (証明終)

§ 3 反例

ここで 定理 2.5. の応用例を与える. N を 2-step 中零 Lie 群, $\mathfrak{n}$ をその Lie 代数とする. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{n})$ で $\mathfrak{n}$ の中心, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ で $\mathfrak{n}$ の導来 ideal を表す. $\mathfrak{n}$ が 2-step なので, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{n})$. 今, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq \mathfrak{Z}(\mathfrak{n})$ なる場合を考える. K を $\mathfrak{n}$ に自己同型として作用する compact 群とする. すると $\mathfrak{n}$ 上に K 不変な実内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が存在する. この内積について $\mathfrak{n}$ と $\mathfrak{Z}(\mathfrak{n})$ を分解する:

$$(3.1) \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{o} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}],$$

$$(3.2) \quad \mathfrak{Z}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{o} \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}].$$

$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}' \oplus [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ とおく. すると, $\mathfrak{n}_1$ は $\mathfrak{n}$ の部分代数になり, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{n}_1) = [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$. さらに, $\mathfrak{o}, \mathfrak{n}_1$ は $\mathfrak{n}$ の ideal であり,

$$(3.3) \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{o}.$$

N_1, A をそれぞれ $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{o}$ に対応する N の部分群とする.

命題 3.1. $(K; N)$ が Gelfand 対ならば, $(K; N_1)$ も Gelfand 対である.

この命題の逆を考える. $[L]$ や $[BJR]$ においては, $L_K^1(N)$ と $L_K^1(N_1)$ の可換性は同値と記述されている. しかし, $L_K^1(N_1)$ の可換性から $L_K^1(N)$ の可換性は得られない. このことについての反例を以下で述べる.

N を $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ に同相な中零 Lie 群, $\mathcal{N}$ をその Lie 代数とし, その括弧積は次で与えられるものとする:

$$[(z_1, z_2, t), (z'_1, z'_2, t')] = (0, 0, -\operatorname{Im} z_1 \overline{z'_2}).$$

$K = T$ とし, K は $\mathcal{N}$ に次のように作用する:

$$e^{F\theta}(z_1, z_2, t) = (e^{F\theta} z_1, e^{F\theta} z_2, t).$$

この節の初めの記号を用いると以下のようになる:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{N}) = \mathbb{C} \times 0 \times \mathbb{R}, \quad [\mathcal{N}, \mathcal{N}] = 0 \times 0 \times \mathbb{R},$$

$$\mathcal{N}_1 = 0 \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{O}\mathcal{N} = \mathbb{C} \times 0 \times 0.$$

容易に分かるように, $\mathcal{N}$ は 3 次 Heisenberg 代数と同型になる. N_1 は $\mathcal{N}_1$ に対応する N の部分群とする.

定理 3.2. $(K; N_1)$ は Gelfand 対である. しかし $(K; N)$ は Gelfand 対ではない.

証明 N_2 は 3 次 Heisenberg 群に同型で, $K = \mathbb{T}$ だから $(K; N_2)$ は Gelfand 対になる ([BJR]). $(K; N)$ が Gelfand 対でないことを示そう. $\mathcal{N}$ の基底として以下のものをとる:

$$E_1^R = (1, 0, 0), \quad E_1^I = (\sqrt{-1}, 0, 0),$$

$$E_2^R = (0, 1, 0), \quad E_2^I = (0, \sqrt{-1}, 0),$$

$$T = (0, 0, 1).$$

$\lambda \in \mathcal{N}$ を $\lambda(z_1, z_2, t) = \operatorname{Re} z_1 + t$ とする. すると, $\mathcal{N}(\lambda) = \mathbb{Z}(\mathcal{N})$, $\mathcal{B}(\lambda) = \mathbb{R}E_1^I + \mathbb{R}(T - E_1^R)$ となり, $\mathcal{N}/\mathcal{B}(\lambda)$ は 3 次 Heisenberg 代数に同型になる. $e^{\sqrt{-1}\theta} \in K$ について,

$$\lambda(e^{\sqrt{-1}\theta}(z_1, 0, t)) = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta + t.$$

ただし, $z_1 = x_1 + \sqrt{-1}y_1$ ($x_1, y_1 \in \mathbb{R}$). π を λ に対応する既約 unitary 表現とすると, $K_\pi = \{1\}$. よって, $\overline{\mathbb{R}K_\pi} = \{1\}$. 然るに, $(\overline{\mathbb{R}K_\pi}; \mathcal{B}(\lambda) \setminus \mathcal{N})$ は Gelfand 対ではない. 定理 2.5. より, $(K; N)$ は Gelfand 対ではない. (証明終)

(3.3) より, $N = N_2 \times A$ である. 故に $L^1(N) = L^1(N_2) \otimes L^1(A)$ となる. しかし, 定理 3.2. より, $L_k^1(N)$ は, $L^1(A)$ のいかなる部分代数 B に対して, $L_k^1(N_2) \otimes B$ とは表されない.

§ 4 Leptin's Problem

N を 2-step 中零 Lie 群とし, $K = \mathbb{T}^n$ が N に自己同型として

作用しているとする. Leptinが $[L]$ において提示した次の問題を考えてみよう.

問題 4.1. $(K; N)$ が Gelfand 対となるのはどのようなときか?

例えば, $(\mathbb{T}^n, H_n)$ は Gelfand 対である ([HR]). $[n, n] = \mathbb{Z}(n)$, かつ $\mathbb{T}^n$ が効果的に作用しているとき, Leptin は $[L]$ において以下のような解答を与えた:

$(\mathbb{T}^n; N)$ が Gelfand 対になるのは, N が $(H_2)^n$ の中心部分群による商群で, $\mathbb{T}^n$ が $(H_2)^n$ に自然に作用しているときである. このとき, $\mathbb{T}^n$ は $\mathbb{Z}(N)$ に自明に作用する.

そこで, $[n, n] \neq \mathbb{Z}(n)$ の場合について考察し, 問題 4.1. の完全な解答を与える. (3.2), (3.2), (3.3) の分解を再び用いる. $\hat{K}^r$ を既約実 K 加群の同値類全体のなす族とする. すると, $\hat{K}^r$ は $\mathbb{Z}^n / \sim$ と同一視される. ただし $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \pm \alpha$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$). 代表系を固定することにより $\hat{K}^r$ を $\mathbb{Z}^n$ の部分集合とみなす. π , σ をさらに isotypic な実加群の直和に分解する:

$$(4.1) \quad \pi = \sum V_{\alpha}^{\pi}, \quad \sigma = \sum V_{\alpha}^{\sigma}.$$

0でない $\alpha \in \mathbb{Z}^r$ に対し, V_α を次の性質をもつ 2 次実 K 加群 $\mathbb{R}X_\alpha + \mathbb{R}Y_\alpha$ とする:

$$(4.2) \quad (\exp U \cdot X_\alpha, \exp U \cdot Y_\alpha) = (X_\alpha, Y_\alpha) \begin{pmatrix} \cos \alpha(U) & -\sin \alpha(U) \\ \sin \alpha(U) & \cos \alpha(U) \end{pmatrix}.$$

ただし $U \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ は K の Lie 代数とする. $\alpha = 0$ のときは V_α は 1 次自明実 K 加群とする. V'_α, V''_α はそれぞれ V_α の重複度 $m_{\alpha,1}, m_{\alpha,2}$ の直和と考えられる.

$$(4.3) \quad V'_\alpha = m_{\alpha,1} V_\alpha = \sum_{i=1}^{m_{\alpha,1}} V_{\alpha,i}', \quad V''_\alpha = m_{\alpha,2} V_\alpha = \sum_{i=1}^{m_{\alpha,2}} V_{\alpha,i}''.$$

$\mathbb{R}^r$ の部分集合 S_1, S_2 をそれぞれ以下のものとする:

$$(4.4) \quad S_1 = \{\alpha \in \mathbb{R}^r \mid m_{\alpha,1} \neq 0\}, \quad S_2 = \{\alpha \in \mathbb{R}^r \mid m_{\alpha,2} \neq 0\}$$

定理 4.2. $(K; N)$ が Gelfand 対であるのは, 以下の 5 つの条件を満たすときである:

- (1) $m_{0,1} = 0$.
- (2) S_1 は 1 次独立な集合.
- (3) $m_{\alpha,1} = 1, \forall \alpha \in S_2$.
- (4) $\mathbb{R}\text{-Sp}(S_1) \cap \mathbb{R}\text{-Sp}(S_2) = 0$.
- (5) K は $[n, n]$ に自明に作用する.

この定理を証明するために, 次の補題を用意する.

補題 4.3. K を n 次 Compact 可換 Lie 群 (必ずしも連結ではない) とし, K は H_n に自己同型として効果的に作用しているとする. このとき, $(K; H_n)$ が Gelfand 対となるのは $n=m$ のときである.

このことは, [BJR], Theorem 5.17 の証明より分かる.

定理 4.2 の証明の概略 第 1 段: V_1, V_2 を互いに直交する $\mathcal{H}$ の K 不変部分空間とする. このとき $[V_1, V_2] = 0$ ([BJR, p107] Leptin の定理の証明を参照). 特に $[V'_0, V_0] = 0$ ($\alpha \in S$) となることが分かり, $[V'_0, \eta] = 0$. よって $m_{01} = 0$. これにより (1) が示された. また, 任意の 0 でない $\alpha \in \hat{K}^r$ について,

$$[\exp tV, X_\alpha, \exp tV, Y_\alpha] = [X_\alpha, Y_\alpha], \quad (t \in \mathbb{R}).$$

このことと, $[V'_{\alpha,i}, V'_{\alpha,j}] = 0$ ($i \neq j$) より, K は $[\eta, \eta]$ に自明に作用していることが分かる. よって (5) が示された.

第 2 段: (2) ~ (4) を示す. $\lambda \in \mathcal{H}$ を $\lambda([V'_{\alpha,i}, V'_{\alpha,i}]) \neq 0$ ($\alpha \in S, 1 \leq i \leq m_{\alpha,1}$), かつ $\lambda(X_{\beta,i}) = 1, \lambda(Y_{\beta,i}) = 0, \lambda|_{\mathcal{H}} = 0$ なるものとする. このとき, $\pi(\lambda) = \Sigma(\eta)$ であり, $\pi/\Sigma(\lambda) \subseteq \mathfrak{g}_m$. ただし, $m = \sum_{\alpha \in S} m_{\alpha,1}$. $\pi = \pi_\lambda$ を λ に対応する N の既約 unitary 表現とすると,

$$K_\pi = \{k \in K \mid k \cdot X = X \quad \forall X \in \Sigma(\eta)\}.$$

$\mathfrak{k}_\pi$ を K_π の Lie 代数とする. すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\pi &= \{U \in \mathcal{K} \mid U \cdot X = 0 \quad \forall X \in \mathcal{Z}(\mathcal{N})\} \\ &= \bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta. \end{aligned}$$

このとき, $\mathcal{K}_\pi$ の元は $\text{Aut}(\mathcal{N}/\mathcal{B})$ に誘導される. この対応を (2.4) と同様に Φ_π とすると, Φ_π の微分 $d\Phi_\pi$ は, $\mathcal{K}_\pi$ から導分代数 $\text{Der}(\mathcal{N}/\mathcal{B})$ への写像になる. このとき,

$$\begin{aligned} \ker d\Phi_\pi &= \{U \in \mathcal{K}_\pi \mid \alpha(U) = 0 \quad \forall \alpha \in S_1\} \\ &= \left(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \right) \cap \left(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \right). \end{aligned}$$

定理 4.3 より,

$$\begin{aligned} m &= \dim d\Phi_\pi(\mathcal{K}_\pi) \\ &= \dim \left(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \right) - \dim \left(\left(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \right) \cap \left(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \right) \right) \\ &\leq n - \dim \left(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \right) \\ &\leq \# S_1 \leq \sum_{\alpha \in S_1} m_{\alpha,1} = m. \end{aligned}$$

これらの不等号はすべて等号になる. よって (2) ~ (4) は示された.

第3段: 逆に (1) ~ (5) が満たされているとする. このとき $(K; N)$ が Gelfand 対であることを示す. そのためには, 定理 2.5. における $\mathcal{I}$ として, 最大次元の余随伴軌道に属するもののみを考えればよい. まず, (1) ~ (3) より,

$$[V'_\alpha, V_\beta] = 0, \quad (\alpha, \beta \in S_1, \alpha \neq \beta).$$

が得られる. このことにより, $\mathcal{I}$ を通る余随伴軌道が最大次元となるのは, $\mathcal{I}([V'_\alpha, V_\beta]) \neq 0$ ($\alpha \in S_1$) となるときである.

よって, $\mathcal{I}([V'_\alpha, V_\beta]) \neq 0$, $\mathcal{I}|_{\mathcal{N}} = 0$. したがって $\mathcal{I}|_{V'_\beta} \neq 0$ ($\beta \in S_2$,

$1 \leq j \leq m_{B,2}$) としてよい. このとき, $\mathcal{N}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Z}(\mathcal{N})$ であり,
 $\mathcal{N}/\mathcal{Q}(\mathcal{Q}) \simeq \mathfrak{g}_m$, ただし $m = \#S_2$. $\pi = \pi_{\mathcal{Q}}$ を $\mathcal{Q}$ に対応する既約
 unitary 表現とすると, (5)より,

$$K_{\pi} = \{b \in K \mid b \cdot b = I \text{ on } \mathcal{Z}(\mathcal{N})\}$$

$$R_{\pi} = \{v \in R \mid v \cdot X = 0 \quad \forall X \in \mathcal{O}(\mathcal{Q})\} = \bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta$$

第2段と同様に写像 $\Phi_{\pi}: K_{\pi} \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{N}/\mathcal{Q}(\mathcal{Q}))$ を考えると, π の微分 $d\Phi_{\pi}$ について,

$$\ker d\Phi_{\pi} = \left(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \right) \cap \left(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \right).$$

よって, (1)~(4)より,

$$\begin{aligned} \dim d\Phi_{\pi} &= \dim \left(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \right) - \dim \left(\left(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \right) \cap \left(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \right) \right) \\ &= \dim R - \dim \left(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \right) \\ &= \#S_1 = m \end{aligned}$$

補題 4.3. より, $(\Phi_{\pi}(K_{\pi}); B(\mathcal{Q}) \setminus N)$ は Gelfand 対. 定理 2.5 より,
 $(K; N)$ は Gelfand 対であることが分かる. (証明終)

Reference

- [BJR] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff: On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups; Trans. Amer. Math. Soc. 321 (1990), 85-116.
- [Br] I. D. Brown: Dual topology of a nilpotent Lie group;

Ann. Sci. École Norm. Sup. 6 (1973), 407-411.

[C] G. Carcano: A commutativity condition for algebras of invariant functions; Boll. Un. Mat. Italiano 7 (1987), 1091-1105.

[HR] A. Hulanicki, and F. Ricci: A tauberian theorem and tangential convergence of bounded harmonic functions on balls in $\mathbb{C}^n$; Invent. Math. 62 (1980), 325-331.

[ki] A. Kirillov: Unitary representations of nilpotent Lie groups; Russ. Math. Survey 17 (1962), 53-104.

[L] H. Leptin: A new kind of eigenfunction expansion on groups; Pacific J. Math. 116 (1985), 45-67.

[M] K. G. Miller: Parametrices for hypoelliptic operators on step two nilpotent Lie groups; Comm. in Partial Differential Equations, 5 (11), (1980) 1153-1184.