

ループソリトンの相互作用

富山大院 小林 泰之, 富山大・工 角島 浩
 Hiroshi Kakuhata and Yasuyuki Kobayashi
 Faculty of Engineering, University of Toyama

1 はじめに

我々は最近, ループソリトン解を持つ2成分の連立非分散方程式 (CIDE) [1]

$$\begin{aligned}\partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X\end{aligned}\tag{1}$$

の正の振幅同士の相互作用を調べた。ここで, (X, Z) はストリングの位置ベクトルの成分, τ は時間 σ で「弧長」(ストリングに沿うパラメータ)である。従来, ループソリトンの相互作用は小さな速度 v の衝突では二つのループが弾くように相互作用し, より大きな v では小さいループが大きなループの中をまわるものと考えられてきた。しかし, さらに大きな v では小さなループが消えるが, ソリトンの個々の成分の挙動を調べると, それらのピークはオーバーラップせず, よりいっそう大きな v で個々の成分のオーバーラップが始まることを発見した [2]。

本稿では Konno-Ichikawa-Wadati (KIW) 方程式 [3, 4] で同様の現象が発生するのかを調べる。

2 連立非分散方程式 (CIDE) のソリトン解

CIDE (1) は双線形変換

$$\begin{aligned}X &= \frac{G}{F}, \\ F &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F,\end{aligned}\tag{2}$$

により, 双線形方程式

$$\begin{aligned}(D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot G &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 - \frac{1}{2}G^2 &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

に変換される。これから 1 ソリトン解,

$$\begin{aligned} G &= e^\eta, \\ F &= 1 + Ae^{2\eta}, \end{aligned} \quad (4)$$

を得る。ここで、波数を p , 周波数を ω , 初期位相を δ , 位相速度を v とすれば, 位相 η , 係数 A , および分散関係はそれぞれ

$$\begin{aligned} \eta &= \omega\tau + p\sigma + \delta, \\ A &= \frac{1}{16(\omega - p)^2}, \\ \omega^2 - p^2 &= -1, \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。1 ソリトン解は実空間では, 波数を $p = \gamma$, 周波数を $\omega = -\gamma v$, 初期位相を $\delta = 0$ として,

$$\begin{aligned} X &= A \operatorname{sech} \gamma(\sigma - v\tau), \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \gamma(\sigma - v\tau), \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \\ A &= 2\gamma(1 + v), \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられ, Z は $\tanh$ のキंक型である。ここで Z_0 は任意定数である。

同じスピード v ($0 < v < 1$) での 2 ソリトン解は正の振幅のソリトンの正面衝突のとき

$$\begin{aligned} G &= \gamma v [(1 - v) \cosh \gamma(\sigma - v\tau) + (1 + v) \cosh \gamma(\sigma + v\tau)], \\ F &= \cosh 2\gamma v\tau + (1 - v^2) + v^2 \cosh 2\gamma\sigma, \end{aligned} \quad (7)$$

になる。このとき, 初期位相は X と Z が $\tau = 0$ で左右対称になるように選んだ。以下では, この解を用いて, ソリトンのピークの挙動から, 2 ソリトンの相互作用を見る。

3 ソリトンの位置とソリトンの相互作用

ソリトンのをソリトン解の極大(極小)と考え, それらのピークは X 成分に関しては $\partial_\sigma X = 0$ で, Z 成分はキंक型であるから, $\partial_\sigma^2 Z = 0$ で与えられる。 $x = e^{2\gamma v\tau}$, $y = e^{2\gamma\sigma}$ とすれば, X に対しては, 3 次方程式

$$f_X(x, y) = b_{X3}y^3 + b_{X2}y^2 + b_{X1}y + b_{X0} = 0, \quad (8)$$

Z に対しては 4 次方程式

$$f_Z(x, y) = b_{Z4}y^4 + b_{Z3}y^3 + b_{Z2}y^2 + b_{Z1}y + b_{Z0} = 0, \quad (9)$$

を得る。ここで、それぞれの方程式の係数は

$$\begin{aligned} b_{X3} &= -v^2 [(1+v)x^2 + (1-v)x], \\ b_{X2} &= (1+v)x^3 + (1-v)(3+4v-v^2)x^2 + (1+v)(3-4v-v^2)x + 1-v, \\ b_{X1} &= -(1-v)x^3 - (1+v)(3-4v-v^2)x^2 - (1-v)(3+4v-v^2)x - 1-v, \\ b_{X0} &= v^2 [(1-v)x^2 + (1+v)x], \end{aligned} \quad (10)$$

および

$$\begin{aligned} b_{Z4} &= v^2 x [(1+v)x^2 + 2(1-v^2)x + 1-v], \\ b_{Z3} &= -\left\{ (1+v)x^4 + 2(2+v)(1-v^2)x^3 \right. \\ &\quad \left. + 2[1-4v^4+2(1-v^2)^2]x^2 + 2(2-v)(1-v^2)x + 1-v \right\}, \\ b_{Z2} &= -6v^3 x(x^2-1), \\ b_{Z1} &= (1-v)x^4 + 2(2-v)(1-v^2)x^3 \\ &\quad + 2[1-4v^4+2(1-v^2)^2]x^2 + 2(2+v)(1-v^2)x + 1+v, \\ b_{Z0} &= -v^2 x [(1-v)x^2 + 2(1-v^2)x + 1+v], \end{aligned} \quad (11)$$

で与えられる。 $\tau = 0$ ($x = 1$) のときには、 $\sigma = 0$ ($y = 1$) はソリトン間の谷間が厳密解となり、 Z では非物理的な解 $y = -1$ も解となる。このとき、方程式 $f_X = 0$ と $f_Z = 0$ はそれぞれ 2 次方程式

$$\begin{aligned} v^2 y^2 - 2(2-3v^2)y + v^2 &= 0 \quad (\text{for } f_X = 0), \\ v^2(2-v^2)y^2 - 2(4-4v^2-v^4)y + v^2(2-v^2) &= 0 \quad (\text{for } f_Z = 0), \end{aligned} \quad (12)$$

に帰着し、 $\tau = 0$ ($x = 1$) のとき、 X のピークの位置と Z のピークの位置は異なることがわかる。それぞれの 2 次方程式の解は

$$\begin{aligned} y_{X\pm} &= \frac{2-3v^2 \pm 2\sqrt{(1-v^2)(1-2v^2)}}{v^2} \quad (\text{for } f_X = 0), \\ y_{Z\pm} &= \frac{4-4v^2-v^4 \pm 2\sqrt{(1-v^2)(2+v^2)(2-3v^2)}}{v^2(2-v^2)} \quad (\text{for } f_Z = 0), \end{aligned} \quad (13)$$

である。2 次方程式が二つの実数解を持つためには、 v の範囲が

$$\begin{aligned} 0 < v < \frac{1}{\sqrt{2}} &\approx 0.70710 \quad (\text{for } f_X = 0), \\ 0 < v < \sqrt{\frac{2}{3}} &\approx 0.81649 \quad (\text{for } f_Z = 0), \end{aligned} \quad (14)$$

でなければならない。このとき X のピーク ($y_{X-} = y_1, y_{X+} = y_2$) は $v \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70710$ で、 Z のピークは $v \geq \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81649$ でオーバーラップし、後者では両成分の二つのピークがオーバーラップしている。以下で、これらをいくつかの特徴的な場合に図示する。なお、以下の図では左から順に (X, Z) , X , $\partial_\sigma Z$ であり、 (X, Z) では横軸は Z 、縦軸は X 、 X

と $\partial_\sigma Z$ では横軸は σ 、縦軸はそれぞれ、 X 、 $\partial_\sigma Z$ であり、時間発展は上から下に向かい、上から 5 行目が $\tau = 0$ である。 $v = 0.1$ での相互作用ではどのピークもオーバーラップせず、ループソリトン同士が弾くように相互作用しているのが見える (図 1)。 $v = 0.4$ での相互作

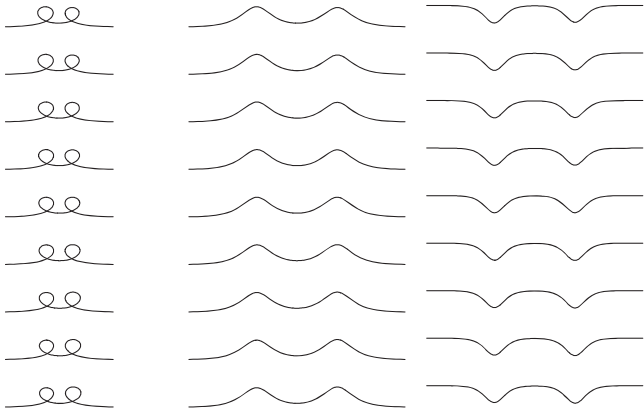


図 1 $v = 0.1$

用では小さいループが、大きなループの中を回っているのが明瞭に見えるが、それぞれの成分はオーバーラップしていない (図 2)。 $v = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.44721$ での相互作用では小さなループが

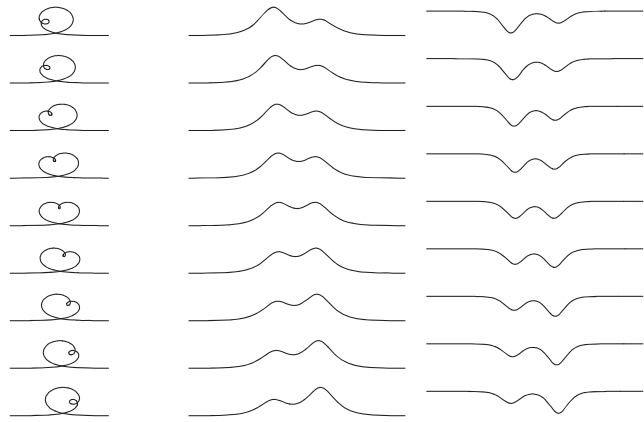


図 2 $v = 0.4$

$\tau = 0$ でカスプ状に、すなわちループではなくなる (図 3)。このときにも依然として、個々

の成分のピークはオーバーラップしていない。これは個々のピークのずれが大きくなったためと思われる。 $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707106$ での相互作用では、 $\tau = 0$ ではもはや小さなループは存在

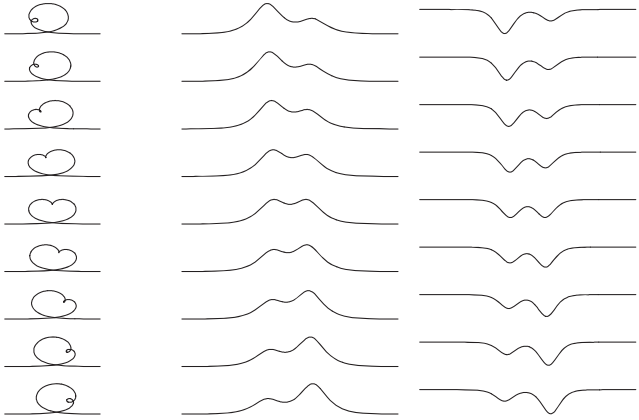


図3 $v = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.44721$

せず、 X 成分のピークがオーバーラップし、そのピークは平坦になる。しかし、 Z 成分はオーバーラップしていない (図4)。

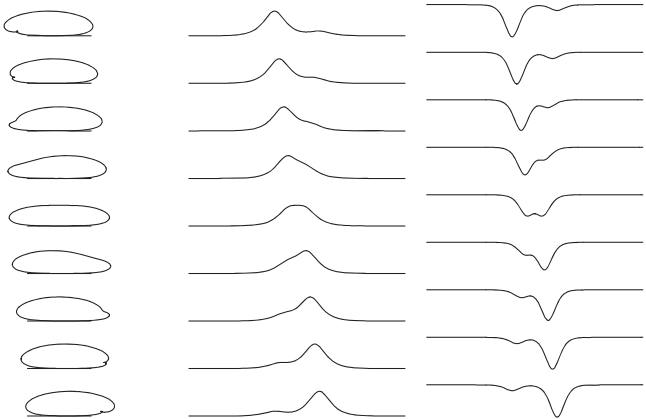


図4 $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707106$

$v = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81649$ での相互作用では X 成分とともに Z 成分もオーバーラップし、そのピークは平坦になる (図 5)。

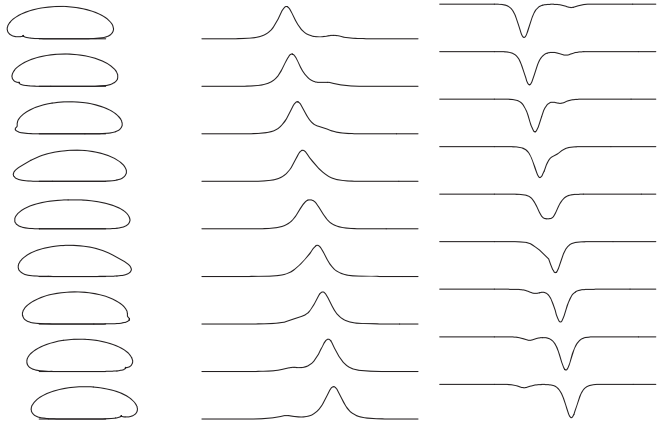


図 5 $v = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.81649$

結局、CIDE での正の振幅のループソリトン相互作用は、従来考えられていた弾く相互作用とループの中をループが回る相互作用だけではなく、大きな v でこれまでに知られていない相互作用を含むものであった。

4 KIW 方程式と mKdV 方程式

では、CIDE でのループソリトン相互作用のようなことは KIW でも起きるのだろうか？ WKI は平面曲線を記述するソリトン方程式で、

$$q_t + \left(\frac{q_X}{(1 + q^2)^{3/2}} \right)_{XX} = 0 \tag{15}$$

で与えられる。ここで、 t は時間、 X は空間座標であり、添字 X は X に関する偏微分を表す (以下同様)。この方程式は Ishimori によりポテンシャル mKdV 方程式

$$\theta_t + \frac{1}{2} \theta_s^3 + \theta_{sss} = 0 \tag{16}$$

あるいは曲線の曲率 κ に対する mKdV 方程式 ($\kappa = \theta_s$)

$$\kappa_t + \frac{3}{2} \kappa^2 \kappa_s + \kappa_{sss} = 0 \tag{17}$$

との関係が指摘された [5]。

曲線の接ベクトル T は

$$T(s) = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \quad (18)$$

で定義される (図 6)。ここで, $\mathbf{r} = (X, Y)$ は曲線の位置ベクトル, s は弧長である。 T の

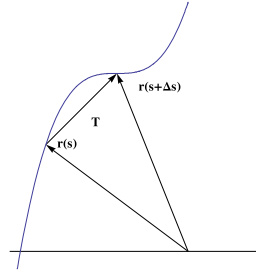


図 6 接ベクトル T

X -成分

$$T_X = X_s = \cos \theta \quad (19)$$

と T の Y -成分は

$$T_Y = Y_s = \sin \theta \quad (20)$$

で与えられる。ここで θ はポテンシャル mKdV 方程式 (16) を満足する。従って, X, Y は以下の関係式

$$\begin{aligned} X &= \int^s \cos \theta ds, \\ Y &= \int^s \sin \theta ds, \end{aligned} \quad (21)$$

で結ばれる。曲線 $Y = \phi(X)$ を X の関数として

$$\mathbf{r} = (X, \phi(X)) \quad (22)$$

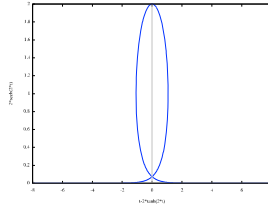
とすれば, 微分幾何により

$$\kappa(X) = \frac{\phi_{XX}}{(1 + \phi_X^2)^{3/2}}, \phi_t = -\kappa_s \sqrt{1 + \phi_X^2} = -\kappa_X \quad (23)$$

なので, $q = \phi_X$ として, KIW 方程式 (15) が得られる [6]。

ポテンシャル mKdV 方程式 (16) は双線形変換

$$\theta = 2i \log \frac{F^*}{F} \quad (24)$$

図7 $t = 0, k = 1$

により, 双線形方程式

$$\begin{aligned} (D_t + D_s^3)F^* \cdot F &= 0, \\ D_s^2 F^* \cdot F &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

に変換される。この双線形方程式から1ソリトン解に対応する τ 関数

$$F = 1 + ie^{2k(s-4k^2t)} \quad (26)$$

を得る。ここで, k は波数である。変換 (21) により, 曲線の位置ベクトルの成分は

$$\begin{aligned} X &= \int^s \cos \theta ds = s - \frac{2}{k} \tanh 2k(s - 4k^2t), \\ Y &= \int^s \sin \theta ds = \frac{2}{k} \operatorname{sech} 2k(s - 4k^2t), \end{aligned} \quad (27)$$

で与えられる。これはループになっている (図7)。更に, 2ソリトン解は波数 k_1 と k_2 が, $k_1 > k_2 > 0$ で, 位相が $\eta_n = 2k_n(s - 4k_n^2t)$ ($n = 1, 2$) の正の振幅の場合のみを考える。 $t = 0$ のとき2ソリトン解が対称になるように初期位相を選ぶと, 2ソリトンの τ 関数は

$$F = (k_1 - k_2) \sinh(\eta_1 + \eta_2) - i(k_1 + k_2) \cosh(\eta_1 - \eta_2) \quad (28)$$

になる。これを用いて, $X_s = \cos \theta$ であるから, X の極値 $X_{ss} = 0$ は

$$\partial_s \cos \theta = -\sin \theta \partial_s \left(\frac{F^*}{F} \right) \quad (29)$$

により決定される。しかし, 因子

$$\partial_s \left(\frac{F^*}{F} \right) = \frac{4(k_1^2 - k_2^2)(k_1 \cosh 2\eta_2 + k_2 \cosh 2\eta_1)}{(k_1 - k_2)^2 \sinh^2(\eta_1 + \eta_2) + (k_1 + k_2)^2 \cosh^2(\eta_1 - \eta_2)} \quad (30)$$

は零点を持たないので, 零点は $\sin \theta = \frac{i}{2} \left(\frac{F^{*2}}{F^2} - \frac{F^2}{F^{*2}} \right) = 0$ からくる。また, Y の極値も (20) により, $\sin \theta = 0$ からくる。このとき, 超越方程式

$$\begin{aligned} \sinh(\eta_1 + \eta_2) &= 0, \\ (k_1 - k_2) \sinh(\eta_1 + \eta_2) &= \pm(k_1 + k_2) \cosh(\eta_1 - \eta_2) \end{aligned} \quad (31)$$

を満足する s がソリトンの谷間とピークである。 $t = 0$ のときには,

$$\sinh(\eta_1 + \eta_2) = \sinh(k_1 + k_2)s = 0 \quad (32)$$

がソリトンの谷間に対応し, $s = 0$ が厳密解である。 $t = 0$ での二つのピークに対応する方程式は

$$\begin{aligned} (k_1 - k_2) \sinh(\eta_1 + \eta_2) \pm (k_1 + k_2) \cosh(\eta_1 - \eta_2) \\ = (k_1 - k_2) \sinh(k_1 + k_2)s \pm (k_1 + k_2) \cosh(k_1 - k_2)s = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

である。厳密解の導出は困難であるが,

$$k_1 + k_2 > k_1 - k_2 \quad (34)$$

であるから, $\sinh(k_1 + k_2)s$ は $\cosh(k_1 - k_2)s$ よりも速く大きくなるので, $(k_1 - k_2) \sinh(k_1 + k_2)s$ と $(k_1 + k_2) \cosh(k_1 - k_2)s$ は有限の s で $\pm$ に対応して, 必ず二つの交点を持つ。また, X と Z のピークはどちらも, $\sin \theta = 0$ から決定されるので, ピークの位置は同じであり, ループが消失することはない。

これらを図示 (図左は (X, Y) で横軸は X 縦軸は Y , 図中央と図右はともに横軸は s , 縦軸はそれぞれ $\sin \theta$ と κ である) すると, $k_1 = 1.5, k_2 = 2$ のとき, $t = 0$ でループは弾くように相互作用しており, KdV ソリトンのピークはオーバーラップしていない (図 8)。CIDE

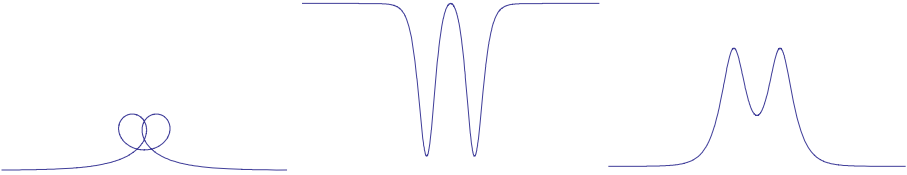


図 8 $t = 0, k_1 = 1.5, k_2 = 1$

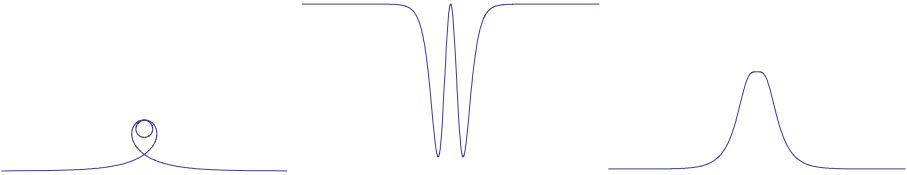


図 9 $t = 0, k_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, k_2 = 1$

でピークがオーバーラップするときにはピークが平坦になることから, $\kappa_{ss}(0, 0) = 0$ から,

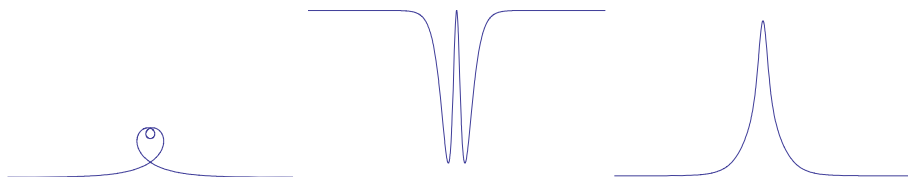


図 10 $t = 0, k_1 = 4, k_2 = 1$

$k_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, k_2 = 1$ で mKdV 方程式の二つのソリトンがオーバーラップすると予想される。実際、mKdV の二つのソリトンがオーバーラップする (図 9)。

mKdV のソリトンが完全にオーバーラップしても大きなループの中に小さなループが回っている (図 10) ので小さなループはソリトンと解釈可能であろう。

5 Discussion

CIDE と KIW のループソリトン相互作用を調べた CIDE では大きな位相速度で各成分のピークがオーバーラップするが、KIW では各成分のピークがオーバーラップすることはない。従って、ループが消失することもない。CIDE では時間 0 でのピークの位置を厳密に決定できたが、KIW では超越方程式になり決定できない。CIDE では時間 0 で、各成分のピークの位置は異なるが、KIW では一致している。この意味では小さいループはソリトンの谷間と見ることもできるが、KIW では mKdV 方程式の小さいソリトンが大きなソリトンとオーバーラップして大きなソリトンの中を通過するときにも、小さいループは消失せず、小さいループが大きいループの中を回っているので小さいループはソリトンと解釈可能であった。CIDE ではソリトンが双方向に運動する座標系 $\sigma-\tau$ を用いたが、KIW ではこのような座標系をとることはできず、ソリトンは一方向にのみ運動し分散関係の形も異なる。また、KIW は伸縮性がないとされるが、CIDE ではループをなしているストリングに伸縮性がある [1, 7]。仮説としては、これが大きな違いになっている可能性がある。

参考文献

- [1] H. Kakuhashi and K. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [2] 角島浩, 小林 泰之「ループソリトンの近距離相互作用」, 数理解析研究所講義録 2128「非線形波動現象の数理とその応用」, 京都大学, 2019 年
- [3] M. Wadati, K. Konno and Y. H. Ichikawa, J. Phys. Soc. Jpn **47** (1979) 1698. b
- [4] K. Konno, Y. Ichikawa, and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn **50** (1980) 1025.

- [5] Y. Ishimori, J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 2471.
- [6] 井ノ口順一, 「開かれた数学 4 曲線とソリトン」, 朝倉書店, 2010 年
- [7] K. Konno and H. Kakuata, Theor. Math. Phys., **134** (2003) No.2. 1527.