

## ダイナミカル・ヤン・バクスター写像

北海道大学・理学部数学 澁川 陽一 (Youichi Shibukawa)  
Department of Mathematics, Faculty of Science,  
Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan

### Abstract

ダイナミカル・ヤン・バクスター写像とヤン・バクスター写像 (set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation) を比較しながら, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成を紹介する.

### Introduction

量子ヤン・バクスター方程式 [2, 3, 4, 24, 25] は, 可積分系において, 中心的な研究対象の一つである.  $V$  を有限次元  $\mathbb{C}$  ベクトル空間とする. 線型写像 (行列)  $R: V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  に関する次の方程式を, 量子ヤン・バクスター方程式という.

$$R^{23}R^{13}R^{12} = R^{12}R^{13}R^{23}. \quad (0.1)$$

ここで,  $R^{ij}$  は, テンソル積  $V \otimes V \otimes V$  からそれ自身への次のような写像である.

$$R^{12} = R \otimes \text{id}_V, \quad R^{23} = \text{id}_V \otimes R.$$

また, (行列) 解  $R$  のことを R-matrix という.

このベクトル空間  $V$  の基底を  $X$  とし,

$$X \otimes X := \{u \otimes v \mid u, v \in X\} \quad (0.2)$$

とおく. 量子ヤン・バクスター方程式 (0.1) の解  $R$  が, 基底  $X$  に関し, 特に, 次の条件を満たしているとする.

$$R(X \otimes X) \subset X \otimes X.$$

$(R(u \otimes v)_1, R(u \otimes v)_2) := R(u \otimes v)$  ( $u, v \in X$ ) として, 記号  $R(u \otimes v)_1, R(u \otimes v)_2 \in X$  を導入する. これを利用して次のように定義される  $X \times X$  からそれ自身への写像を, 同じ記号  $R$  で表す.

$$R(u, v) = (R(u \otimes v)_1, R(u \otimes v)_2) \quad (u, v \in X).$$

元の行列  $R$  が量子ヤン・バクスター方程式 (0.1) を満たすことから, 写像  $R: X \times X \rightarrow X \times X$  も, 外見はまったく同じ方程式 (0.3) を満たす.

$$R^{23}R^{13}R^{12} = R^{12}R^{13}R^{23}. \quad (0.3)$$

ただし、上の式において、 $R^{ij}$  は  $X \times X \times X$  からそれ自身への写像である。例えば、

$$R^{12}(u, v, w) := (R(u, v), w), \quad R^{23}(u, v, w) := (u, R(v, w)) \quad (u, v, w \in X).$$

式 (0.3) も量子ヤン・バクスター方程式と呼ばれる。

この逆も成り立つ。すなわち、量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) の (写像) 解  $R: X \times X \rightarrow X \times X$  に対し、 $V := \mathbb{C}X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}x$  として、写像  $R$  を  $V \otimes V$  上の線型写像に拡張すると、 $R$  は式 (0.1) を満たし、R-matrix となる。

Drinfeld [6] は、(有限とは限らない) 単なる集合  $X$  の直積上定義された量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) の (写像) 解  $R: X \times X \rightarrow X \times X$  の研究を提唱した。量子ヤン・バクスター方程式 (0.1) の行列解 (matrix solution) に対比させて、式 (0.3) の解を set-theoretical solution と呼ぶことが多いが、本稿では、後に Veselov [22] によって提唱されたヤン・バクスター写像 (Yang-Baxter map) という名前を使用する。

上で示したように、ヤン・バクスター写像は基底の置換行列として表される R-matrix のことである。このような解は Drinfeld の提唱以前にいくつか知られていたが、Weinstein-Xu [23] の研究を皮切りに、Gateva-Ivanova [11], Etingof-Schedler-Soloviev [8], Lu-Yan-Zhu [15] などが、ヤン・バクスター写像の組織的な構成に成功した。その後、ヤン・バクスター写像と離散可積分系の密接な関連が、Adler-Bobenko-Suris [1], Veselov [22] などによって明らかにされている。

一方、量子ヤン・バクスター方程式に一つパラメータを加えて一般化した量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の (楕円関数) 解が楕円量子群の定式化に決定的な役割を果たすことが Felder [10] によって明らかにされ、量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式の行列解である dynamical R-matrix の研究が始まった [7]。

$h$  を有限次元可換 Lie 代数 ( $/\mathbb{C}$ )、 $h^*$  を  $h$  の双対空間、 $V$  を diagonalizable  $h$ -加群とする。線型写像  $R(\lambda): V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  ( $\lambda \in h^*$ ) が次の量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式 [12] を満たすとき、 $R(\lambda)$  を dynamical R-matrix という。

$$R^{23}(\lambda)R^{13}(\lambda + h^{(2)})R^{12}(\lambda) = R^{12}(\lambda + h^{(3)})R^{13}(\lambda)R^{23}(\lambda + h^{(1)}) \quad (\forall \lambda \in h^*).$$

ここで、 $R^{ij}(\lambda), R^{ij}(\lambda + h^{(k)})$  などは次のような  $V \otimes V \otimes V$  からそれ自身への線型写像を意味する。

$$\begin{aligned} R^{12}(\lambda)(u \otimes v \otimes w) &= R(\lambda)(u \otimes v) \otimes w, \\ R^{12}(\lambda + h^{(3)})(u \otimes v \otimes w) &= R^{12}(\lambda + \text{wt}(w))(u \otimes v \otimes w). \end{aligned}$$

ただし、 $u, v, w \in V$  は  $V$  の weight basis の元、 $\text{wt}(w)$  は元  $w$  のウェイトを表す。

現在では, dynamical R-matrix から定義される楕円量子群 [9, 10, 14], およびその一般化である双歪代数 (bialgebroid) と tensor category の関係 [5, 21], dynamical R-matrix と R-matrix の関係 (quasi Hopf twister • vertex-IRF 対応) [7, 13], 可換な差分作用素族の構成 [7] との関係など, その研究の裾野は広い.

この量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式 (に類する方程式) の set-theoretical solution にあたるものが, 本稿の題にあるダイナミカル・ヤン・バクスター写像 (dynamical Yang-Baxter map) である [17, 18, 19].

**Definition 0.1.**  $H, X$  を空でない集合,  $(\cdot) : H \times X \rightarrow H$  を写像とする.  $X \times X$  からそれ自身への写像  $R(\lambda)$  ( $\lambda \in H$ ) が次のような量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式に類似の方程式を満たすとき,  $R(\lambda)$  を  $H, X, (\cdot)$  に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像という.

$$R^{23}(\lambda)R^{13}(\lambda \cdot X^{(2)})R^{12}(\lambda) = R^{12}(\lambda \cdot X^{(3)})R^{13}(\lambda)R^{23}(\lambda \cdot X^{(1)}) \quad (\forall \lambda \in H).$$

ここで,  $R^{12}(\lambda)$ ,  $R^{12}(\lambda \cdot X^{(3)})$  は,  $X \times X \times X$  上定義された次のような写像である.  $u, v, w \in X$  に対し,

$$\begin{aligned} R^{12}(\lambda)(u, v, w) &= (R(\lambda)(u, v), w), \\ R^{12}(\lambda \cdot X^{(3)})(u, v, w) &= R^{12}(\lambda \cdot w)(u, v, w) = (R(\lambda \cdot w)(u, v), w). \end{aligned}$$

他の写像も同様に定義する. 例えば,

$$R^{23}(\lambda \cdot X^{(1)})(u, v, w) = (u, R(\lambda \cdot u)(v, w)).$$

本稿では, Weinstein-Xu [23] によるヤン・バクスター写像の構造を明らかにしながら, この構造に関連付けて, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の一つの構成方法を紹介する.

まず, セクション 1 から 3 までで, Weinstein-Xu により構成されたヤン・バクスター写像の構造を明らかにしながら, この写像が量子ヤン・バクスター方程式を満たすことを証明する.

この構造を一般化することでダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成するのがセクション 4 から 8 である.

その後, Lu-Yan-Zhu [15] によるヤン・バクスター写像の構成方法 (セクション 9), unitary condition, vertex-IRF 対応 (セクション 10), invariance condition (8.3) (セクション 11) の説明が続く.

## 1 ヤン・バクスター写像

このセクションでは, Weinstein-Xu [23] により構成されたヤン・バクスター写像を紹介する ([15, Section 3] も参照のこと).

$G = (G, *)$  を、次に掲げる unique factorization property を満たす部分群  $G_+$ ,  $G_-$  を伴った群とする.

(unique factorization property) すべての  $g \in G$  に対し,  $g = g_+ * g_-$  となる  $G_+$  の元  $g_+$  と  $G_-$  の元  $g_-$  が唯一つ存在する.

群の半直積は, この unique factorization property を満たす.

$g_+ \in G_+$  と  $g_- \in G_-$  の逆元を, それぞれ,  $g_+^{-1}$ ,  $g_-^{-1}$  と書くことにする. 一般に,  $g_+^{-1}$  と  $(g^{-1})_+$  は異なることに注意する ( $g_-^{-1}$  と  $(g^{-1})_-$  も同様).

この記号を用いて, 写像  $R: G \times G \rightarrow G \times G$  を

$$R(g, h) = ((g_-^{-1} * h * g_-)_+^{-1} * g * (g_-^{-1} * h * g_-)_+, g_-^{-1} * h * g_-) \quad (g, h \in G) \quad (1.1)$$

と定める.

**Proposition 1.1.** この写像  $R$  はヤン・バクスター写像である. すなわち, 写像  $R$  は量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) を満たす.

次からのセクションでは, この (ヤン・バクスター) 写像  $R$  の構造を明らかにしながら, 上の Proposition の証明を与える.

## 2 群 $G$ のもう一つの群構造

このセクションでは, 群  $G$  が, 自然に別の群構造を持つことを示す. この群構造が, Proposition 1.1 の証明に重要な役割を果たす.

群  $G$  上に, 次のように 2 項演算  $\cdot: G \times G \rightarrow G$  を定める.

$$g \cdot h := g_+ * h * g_- \quad (g, h \in G).$$

**Proposition 2.1.**  $(G, \cdot)$  は群である.

*Proof.*  $(G, *)$  と  $(G, \cdot)$  の単位元が同じであること, また,  $(G, \cdot)$  における  $g \in G$  の逆元が  $g_+^{-1} * g_-^{-1}$  となることは容易に証明できる.

$G$  の元  $g^1, g^2, g^3$  に対し, 2 項演算  $(\cdot)$  の定義より,

$$(g^1 \cdot g^2) \cdot g^3 = (g_+^1 * g^2 * g_-^1)_+ * g^3 * (g_+^1 * g^2 * g_-^1)_-$$

となる.  $G, G_+, G_-$  における unique factorization property を用いると,

$$(g_+^1 * g^2 * g_-^1)_+ = g_+^1 * g_+^2, \quad (g_+^1 * g^2 * g_-^1)_- = g_-^2 * g_-^1$$

である. したがって,

$$(g^1 \cdot g^2) \cdot g^3 = g_+^1 * g_+^2 * g^3 * g_-^2 * g_-^1 = g^1 \cdot (g^2 \cdot g^3).$$

このようにして,  $(G, \cdot)$  は群になる. □

*Remark 2.2.* 以下, 混乱を避けるために,  $g^{-1}$  という記号は, 常に, 積  $*$  に関する元  $g \in G$  の逆元を表すことにする.

$R(g, h) \in G \times G$  ( $g, h \in G$ ) の第 1 成分, および, 第 2 成分を, それぞれ,  $\eta(h)(g), \xi(g)(h) \in G$  と書く. すなわち,

$$\begin{aligned}\xi(g)(h) &= g^{-1} * h * g_{-}, \\ \eta(h)(g) &= (g^{-1} * h * g_{-})_{+}^{-1} * g * (g^{-1} * h * g_{-})_{+}\end{aligned}$$

である. このとき, 次が成り立つ.

**Proposition 2.3.** すべての  $g, h \in G$  に対し,  $\xi(g)(h) \cdot \eta(h)(g) = g \cdot h$ .

証明は,  $(\cdot)$  の定義に従って計算すればよい.

Proposition 2.3 は次のことを意味している. 次で定義される  $G \times G$  からそれ自身への写像を  $\sigma$  としよう.

$$\sigma(g, h) = (\xi(g)(h), \eta(h)(g)) \quad (g, h \in G). \quad (2.1)$$

Proposition 2.3 は, 写像  $\sigma$  が, 積  $(\cdot)$  に関する第 1 成分と第 2 成分の積を不変に保つことを表している.

次のセクションでは, この視点から, 写像  $\sigma$  および  $R$  と,  $G$  の元  $u * v^{-1} * w$  ( $u, v, w \in G$ ) を結び付ける. 写像  $R$  が量子ヤン・バクスター方程式を満たすことを,  $u * v^{-1} * w$  が導くのである.

### 3 座標の取り換え

本セクションでは, 『座標を取り換えて』写像  $\sigma$  を表示する.

$\lambda$  を  $G$  の元とし,  $G \times G$  からそれ自身への写像  $F_\lambda$  を

$$F_\lambda(g, h) = (\lambda \cdot g, \lambda \cdot g \cdot h) \quad (g, h \in G) \quad (3.1)$$

と定める.

**Proposition 3.1.** 写像  $F_\lambda$  は全単射である. 実際, その逆写像は次で与えられる.  $(F_\lambda)^{-1}(g, h) = (\lambda_{+}^{-1} * g * \lambda_{-}^{-1}, g_{+}^{-1} * h * g_{-}^{-1})$ .

Proposition 2.3 を用いると,  $G \times G$  上の写像  $F_\lambda \sigma (F_\lambda)^{-1}$  の第 2 成分は変わらないはずである.

*Remark 3.2.* 『座標変換』という観点からすると, 上の  $\lambda$  として  $G$  の単位元  $e$  をとれば十分である. すなわち, 写像  $F_\lambda$  は一般化され過ぎている. しかし, この一般化は後の議論において決定的な役割を果たす.

この写像  $F_\lambda$  を用いて写像  $\sigma$  を変換する (これが『座標の取り換え』) と、直接的な計算により、

$$F_\lambda \sigma (F_\lambda)^{-1}(g, h) = (\lambda * g^{-1} * h, h) \quad (g, h \in G) \quad (3.2)$$

となる。

そこで、

$$S(\lambda) := F_\lambda \sigma (F_\lambda)^{-1}, \quad (3.3)$$

$$S : G \times G \times G \ni (u, v, w) \mapsto (u, u * v^{-1} * w, w) \in G \times G \times G \quad (3.4)$$

とおく。

**Proposition 3.3.** 次の3条件は同値である。

- (1)  $S(\lambda)^{12} S S(\lambda)^{12} = S S(\lambda)^{12} S \quad (\forall \lambda \in G).$
- (2)  $\sigma^{12} \sigma^{23} \sigma^{12} = \sigma^{23} \sigma^{12} \sigma^{23}.$
- (3)  $R$  はヤン・バクスター写像である。

*Proof.* 写像  $\sigma$  の定義 (2.1) より、条件 (2) と (3) が同値になるのはよい。

条件 (1) と (2) が同値になることを示す。  $G \times G \times G$  からそれ自身への写像

$$\tilde{F}_\lambda(u, v, w) = (\lambda \cdot u, \lambda \cdot u \cdot v, \lambda \cdot u \cdot v \cdot w) \quad (\lambda, u, v, w \in G)$$

を考える。この写像は全単射で、

$$\tilde{F}_\lambda \sigma^{12} (\tilde{F}_\lambda)^{-1} = S(\lambda)^{12}, \quad \tilde{F}_\lambda \sigma^{23} (\tilde{F}_\lambda)^{-1} = S$$

を満たす。この性質を用いると、条件 (1) と (2) は同値になる。  $\square$

式 (3.2), (3.4) により、Proposition 3.3 の条件 (1) が成り立つことが簡単にわかる (直接的に計算すればよい)。したがって、上の Proposition より写像  $R$  (1.1) はヤン・バクスター写像である。これが、Proposition 1.1 で示したいことであった。

## 4 一般化. その方針

Proposition 1.1 の証明を見てみると、群  $G$  の演算  $*$  を用いて定義される元  $u * v^{-1} * w$  が、写像  $S, S(\lambda)$  を通じて、量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) を生み出している。

重要なことは、写像  $S, S(\lambda)$  が Proposition 3.3 の条件 (1) を満たせば、それを『座標変換する』ことにより、量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) の解が得られることである。そこで、条件 (1) を崩すことなく、群  $G$  の演算  $*$  を

用いて定義される  $u * v^{-1} * w$  を一般化することができれば、セクション 2, 3 の議論をそのまま用いることで、新たなヤン・バクスター写像を得ることができるのではないか、という考えに行き着く。

以下のセクションでは、この方針に基づき、Weinstein-Xu によるヤン・バクスター写像の一般化を試みる。

あらかじめ結果を申し上げると、『幸運なことに』この企ては失敗する。失敗の原因は、Remark 3.2 で指摘した写像  $F_\lambda$  の一般化などにある。しかし、この失敗がダイナミカル・ヤン・バクスター写像という新たな概念を生み出すのである。

## 5 元 $u * v^{-1} * w$ の 3 項演算への一般化

本セクションでは、Proposition 3.3 の条件 (1) を壊すことなく、 $G$  の元  $u * v^{-1} * w$  ( $u, v, w \in G$ ) を 3 項演算に一般化する。また、そのための必要十分条件を求める [18, Section 3].

$M = (M, \mu)$  を ternary system とする。すなわち、 $M$  を 3 項演算 (ternary operation)  $\mu : M \times M \times M \rightarrow M$  を伴った、空でない集合とする。集合  $M$  の元  $a$  に対して、写像  $s(a) : M \times M \rightarrow M \times M$ 、および  $s : M \times M \times M \rightarrow M \times M \times M$  を、

$$\begin{aligned} s(a)(x, y) &= (\mu(a, x, y), y), \\ s(x, y, z) &= (x, \mu(x, y, z), z) \quad (x, y, z \in M). \end{aligned} \quad (5.1)$$

と定義する。この  $s(a)$ 、 $s$  は、写像  $S(\lambda)$  (3.3)、 $S$  (3.4) の一般化である。

**Proposition 5.1.** 次は同値である。

- (1)  $s(a)^{12}ss(a)^{12} = ss(a)^{12}s \quad (\forall a \in M).$
- (2)  $\mu(a, \mu(a, b, c), \mu(\mu(a, b, c), c, d)) = \mu(a, b, \mu(b, c, d)),$   
 $\mu(\mu(a, b, c), c, d) = \mu(\mu(a, b, \mu(b, c, d)), \mu(b, c, d), d) \quad (\forall a, b, c, d \in M).$

*Proof.* (1) 式の第 1, 第 2 成分が等しいという式が (2) である。(1) 式の第 3 成分が等しくなるのは自明であるので、この Proposition の主張が成り立つ。□

$M$  が群である場合、その積を  $*$  :  $M \times M \rightarrow M$  と書くことにして、 $\mu(a, b, c) = a * b^{-1} * c$  ( $a, b, c \in M$ ) で  $M$  上の 3 項演算  $\mu$  を定める。すると、この  $\mu$  は上の条件 (2) を満たす (Proposition 3.3 参照)。

## 6 写像 $F_\lambda$ の一般化

続いて写像  $F_\lambda$  (3.1) も一般化してしまおう。このために left quasigroup という概念を導入する (cf. [16, 20]).

**Definition 6.1.** 2項演算  $(\cdot) : L \times L \rightarrow L$  を伴った空でない集合  $L$  が次を満たすとき,  $L = (L, \cdot)$  を left quasigroup という.

すべての  $u \in L$  に対して, 写像 (左移動)  $u \cdot : L \ni v \mapsto u \cdot v \in L$  は全単射である.

$L = (L, \cdot)$  を left quasigroup とする. すると定義より, 左移動  $u \cdot : L \rightarrow L$  の逆写像が存在する. これを  $u \setminus$  と書く.

$$u \setminus : L \ni v \mapsto u \setminus v \in L.$$

これは,  $u \cdot (u \setminus v) = u \setminus (u \cdot v) = v$  ( $\forall u, v \in L$ ) を満たす.

**Example 6.2.** 群は left quasigroup である.

**Example 6.3.** 集合  $Q_5$  を  $Q_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  とし,  $Q_5$  上の 2 項演算  $(\cdot)$  を Table 1 のように定める. ここで,  $0 \cdot 2 = 2$  である.  $Q_5$  の各元が, Table 1 の

Table 1:  $Q_5$

|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 1 | 3 | 1 | 0 | 2 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 4 | 3 | 2 |
| 4 | 2 | 4 | 1 | 0 | 3 |

各行に 1 回現れ, かつ 1 回のみしか現れないので, この  $Q_5 = (Q_5, \cdot)$  は left quasigroup である.

*Remark 6.4.* left quasigroup の 2 項演算は, 群とは異なり, 結合的であるとは限らない. 例えば, 上の  $Q_5$  の 2 項演算は結合的ではない. 実際,  $(1 \cdot 2) \cdot 3 = 1 \neq 4 = 1 \cdot (2 \cdot 3)$ . したがって, left quasigroup は群よりも (かなり) 多く存在する.

$L = (L, \cdot)$  を left quasigroup とする.  $\lambda \in L$  に対し, 写像  $f_\lambda : L \times L \rightarrow L \times L$  を

$$f_\lambda(u, v) = (\lambda \cdot u, (\lambda \cdot u) \cdot v) \quad (u, v \in L)$$

と定める [18, Section 3]. 次は Proposition 3.1 の一般化にあたる.

**Proposition 6.5.** 写像  $f_\lambda$  は全単射である. 逆写像は,

$$(f_\lambda)^{-1}(u, v) = (\lambda \setminus u, u \setminus v) \quad (u, v \in L).$$

## 7 ダイナミカル・ヤン・バクスター写像

本セクションでは、セクション4での方針に従い、写像  $s(a)$  と  $f_\lambda$  からヤン・バクスター写像を構成しようと試みる。すでに予告したようにこの試みは失敗し、ヤン・バクスター写像ではなく、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が得られる。

以下、 $L$  と  $M$  は集合として同型であると仮定する。この同型を与える全単射を  $\pi: L \rightarrow M$  と書く。また、 $M$  上の3項演算  $\mu$  が Proposition 5.1 の条件 (2) を満たすことも仮定する。

$\lambda, u, v \in L$  を用いて元  $\xi_\lambda(u)(v)$ ,  $\eta_\lambda(v)(u) \in L$  を

$$(\xi_\lambda(u)(v), \eta_\lambda(v)(u)) = (f_\lambda)^{-1}(\pi^{-1} \times \pi^{-1})s(\pi(\lambda))(\pi \times \pi)f_\lambda(u, v)$$

と定める。さらに、 $L \times L$  から自分自身への写像  $R(\lambda)$  を

$$R(\lambda)(u, v) = (\eta_\lambda(v)(u), \xi_\lambda(u)(v))$$

と定義する。

本来、この写像  $R(\lambda)$  がヤン・バクスター写像になるはずであるが、今の場合、パラメータ  $\lambda$  が一般には残ってしまい、量子ヤン・バクスター方程式の解にはならない。

そこで解くべき問題を変える。

$s(\pi(\lambda))$  は Proposition 5.1 の条件 (1) を満たすのだから、それを全単射  $f_\lambda$  で変換した写像から構成される写像  $R(\lambda)$  も、何らかの方程式を満たすはずである。この量子ヤン・バクスター方程式に類する方程式を求めよ。

この方程式は次のようになる。

**Proposition 7.1.** 写像  $R(\lambda)$  は次の方程式を満たす。

$$R^{23}(\lambda)R^{13}(\lambda \cdot L^{(2)})R^{12}(\lambda) = R^{12}(\lambda \cdot L^{(3)})R^{13}(\lambda)R^{23}(\lambda \cdot L^{(1)}) \quad (\forall \lambda \in L).$$

$R^{12}(\lambda)$ ,  $R^{12}(\lambda \cdot L^{(3)})$  などの定義については Definition 0.1 を参照のこと。

Definition 0.1 より、我々は、 $L$ ,  $L$ ,  $(\cdot)$  に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成したことになる。

この Proposition は、Proposition 3.3 と同様にして証明される [18, Section 3].

*Remark 7.2.* ダイナミカル・ヤン・バクスター写像  $R(\lambda)$  がパラメータ  $\lambda$  に依存しない場合、 $R := R(\lambda)$  は量子ヤン・バクスター方程式 (0.3) を満たす。したがって、 $R$  はヤン・バクスター写像である。すなわち、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像はヤン・バクスター写像を含む概念である。

## 8 セクション5から7までのまとめ

セクション5から7までは、通常の論文とは異なる書き方をした。これから生じるであろう混乱を避けるため、本セクションでは、セクション5から7までで扱ったダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成をまとめる。これに関連して、この構成の逆、すなわち、ある性質を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像が、必ずこのように構成されることも述べる [18, Theorem 4.7].

$L = (L, \cdot)$  を left quasigroup,  $M = (M, \mu)$  を Proposition 5.1 (2) を満たす ternary system とする。そして、これらが集合として同型であると仮定し、この同型を与える全単射  $\pi : L \rightarrow M$  を一つ固定する。

$L \times L$  からそれ自身への写像  $R(\lambda)$  ( $\lambda \in L$ ) を

$$\begin{aligned} R(\lambda)(u, v) &= (\eta_\lambda(v)(u), \xi_\lambda(u)(v)), \\ \xi_\lambda(u)(v) &= \lambda \setminus \pi^{-1}(\mu(\pi(\lambda), \pi(\lambda \cdot u), \pi((\lambda \cdot u) \cdot v))), \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\eta_\lambda(v)(u) = (\lambda \cdot \xi_\lambda(u)(v)) \setminus ((\lambda \cdot u) \cdot v). \quad (8.2)$$

と定める。

このとき次が成り立つ。

**Theorem 8.1** (Proposition 7.1).  $R(\lambda)$  は  $L$ ,  $L$ ,  $(\cdot)$  に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像である。

このダイナミカル・ヤン・バクスター写像は次の invariance condition を満たす。

$$(\lambda \cdot \xi_\lambda(u)(v)) \cdot \eta_\lambda(v)(u) = (\lambda \cdot u) \cdot v \quad (\forall \lambda, u, v \in L) \quad (8.3)$$

この invariance condition は、Proposition 2.3 の一般化にあたる。

Theorem 8.1 の逆もまた成り立つ。  $L = (L, \cdot)$  を left quasigroup,  $R(\lambda)$  ( $\lambda \in L$ ) を, invariance condition (8.3) を満たす  $L$ ,  $L$ ,  $(\cdot)$  に付随したダイナミカル・ヤン・バクスター写像とする。  $\eta_\lambda(v)(u)$ ,  $\xi_\lambda(u)(v)$  ( $\lambda, u, v \in L$ ) を次で定める。

$$(\eta_\lambda(v)(u), \xi_\lambda(u)(v)) = R(\lambda)(u, v).$$

**Theorem 8.2.** Theorem 8.1 の構成方法で  $R(\lambda)$  を生み出すような ternary system  $M = (M, \mu)$ , および全単射  $\pi : L \rightarrow M$  が存在する。

実際、この定理を証明するためには、

$$\begin{aligned} M &= (L, \mu_L), \\ \mu_L(a, b, c) &= a \cdot \xi_a(a \setminus b)(b \setminus c) \quad (a, b, c \in M), \\ \pi &= \text{id}_L \end{aligned}$$

ととればよい。

## 9 Lu-Yan-Zhu によるヤン・バクスター写像の構成

$L = (L, \cdot)$ ,  $G = (G, *)$  を群とし,  $\theta$  を  $L$  から  $\text{Aut}(G)$  への群準同型であるとする.  $L$  から  $G$  への (集合としての) 全単射  $\pi$  が次を満たすとき, 写像  $\pi$  を bijective 1-cocycle という.

$$\pi(u \cdot v) = \pi(u) * \theta(u)(\pi(v)) \quad (u, v \in L). \quad (9.1)$$

Lu-Yan-Zhu [15] は, この bijective 1-cocycle からヤン・バクスター写像が構成できることを示した. 本セクションでは, Theorem 8.1 の構成方法から bijective 1-cocycle を導き出す [18, Section 2]. 結果として, bijective 1-cocycle からヤン・バクスター写像が得られる理由も明らかにする.

セクション 5 ですでに示したように,

**Proposition 9.1.**  $G$  上の 3 項演算  $\mu_G : G \times G \times G \ni (x, y, z) \mapsto x * y^{-1} * z \in G$  は, Proposition 5.1 の条件 (2) を満たす.

Theorem 8.1 より, 群  $L = (L, \cdot)$  と全単射  $\pi : L \rightarrow G$ , および ternary system  $(G, \mu_G)$  は, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像  $R(\lambda) : L \times L \rightarrow L \times L$  を生み出す.

$L$  の元  $u$  を用いて, 写像  $\theta(u) : G \rightarrow G$  を

$$\theta(u)(x) = \pi(u)^{-1} * \pi(u \cdot \pi^{-1}(x)) \quad (x \in G)$$

と定義する.

*Remark 9.2.* 上の  $\theta(u)$  の定義を書きなおすと,  $\pi(u \cdot \pi^{-1}(x)) = \pi(u) * \theta(u)(x)$  となる.  $\pi$  が全単射であることを考え合わせれば, この定義式は, (9.1) と一致する.

**Proposition 9.3.** この写像  $\theta(u)$  は全単射である. その逆写像は,  $\theta(u)^{-1}(x) = \pi(u \setminus_L \pi^{-1}(\pi(u) * x))$ .

式 (8.1) により,

**Proposition 9.4.**  $\xi_\lambda(u)(v) = \pi^{-1}\theta(\lambda)^{-1}\theta(\lambda \cdot u)\pi(v)$  ( $\lambda, v \in L$ ).

ここで,  $\theta : L \rightarrow \text{Aut}(G)$  が群準同型であると仮定する. このとき, 全単射  $\pi : L \rightarrow G$  は bijective 1-cocycle となる. また, 上の仮定と, Proposition 9.4, 式 (8.2), および  $L$  が群であることから, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像  $R(\lambda)$  はパラメータ  $\lambda$  に依存しない. したがって,  $R(\lambda)$  はヤン・バクスター写像となる (Remark 7.2).

実は, Weinstein-Xu が構成したヤン・バクスター写像のみならず, Lu-Yan-Zhu が構成したものも, すべて, ternary operation  $\mu_G$  を用いて上のように構成されている.

## 10 ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の諸性質

本稿では, left quasigroup  $L = (L, \cdot)$ , ternary system  $M = (M, \mu)$ . および全単射  $\pi : L \rightarrow M$  から, invariance condition (8.3) を満たすダイナミカル・ヤン・バクスター写像が構成できることを紹介した (Theorem 8.1). この構成によるダイナミカル・ヤン・バクスター写像の性質は, 多くの場合, ternary operation  $\mu$  のみで決定される (ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を単に『座標変換』したものが写像  $s(a)$  (5.1) で, これは ternary operation  $\mu$  のみで定義されているから). 例えば ([18, Section 7]),

**Proposition 10.1.** 写像  $P : L \times L \rightarrow L \times L$  を  $P(u, v) = (v, u)$  ( $u, v \in L$ ) とする.  $(L, M, \pi)$  より構成されるダイナミカル・ヤン・バクスター写像  $R(\lambda)$  が unitary condition

$$R(\lambda)PR(\lambda) = P \quad (\forall \lambda \in L)$$

を満たすための必要十分条件は, ternary operation  $\mu$  が

$$\mu(a, \mu(a, b, c), c) = b \quad (\forall a, b, c \in M) \quad (10.1)$$

を満たすことである.

ternary system  $M$  が群であり, ternary operation  $\mu$  が  $\mu_M$  (Proposition 9.1) である場合, 式 (10.1) は, 群  $M$  が可換であることと同値になる. したがって, セクション 9 で bijective 1-cocycle から構成したヤン・バクスター写像が unitary condition を満たすためには, 群  $G$  が可換であることが必要十分となる. これは, Lu-Yan-Zhu [15] の Proposition 4 の主張そのものである.

この他にも, 本稿の構成方法によるヤン・バクスター写像とダイナミカル・ヤン・バクスター写像が同一の ternary system から構成されていれば, この二つの写像を結びつける全単射  $J(\lambda)$  が存在する ( $J(\lambda)$  は『座標変換』を表す 2 つの写像の合成). この式を書き下してみると,

$$R(\lambda) = J(\lambda)^{-1} R^{21} J^{21}(\lambda)$$

となっていて, ダイナミカル R-matrix と R-matrix が fusion matrix を介して結びつくという vertex-IRF 対応と全く同じ形をしている.

つまり, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像とヤン・バクスター写像の間にも, vertex-IRF 対応が存在するのである [18, Section 8].

## 11 最後に invariance condition について

本稿や [18] においては, invariance condition (8.3) を, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像を構成するための単なる技術的な仮定として扱っている. し

かし, tensor category を用いてダイナミカル・ヤン・バクスター写像を記述する場合には, この invariance condition が必須の条件となる [19].

$R(\lambda)$  を dynamical R-matrix としよう (Introduction 参照). 通常, dynamical R-matrix には, 次の weight-zero condition を課す [10].

$u, v \in V$  を weight basis の元とすると,

$$R(\lambda)(u \otimes v) \in V_{\text{wt}(u)+\text{wt}(v)}.$$

ここで,  $V_\alpha$  ( $\alpha \in h^*$ ) は, weight  $\alpha$  のウェイト空間を表す.

Introduction で申し述べた R-matrix とヤン・バクスター写像の関係のよう, dynamical R-matrix  $R(\lambda)$  が  $V \otimes V$  の weight basis  $X \otimes X$  (0.2) の置換行列になっているとしよう. このとき, weight-zero condition は次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_1) + \text{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_2) &= \text{wt}(u) + \text{wt}(v) \\ (R(\lambda)(u \otimes v)_1 \otimes R(\lambda)(u \otimes v)_2 &:= R(\lambda)(u \otimes v)). \end{aligned}$$

この式は, 当然,

$$\lambda + \text{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_2) + \text{wt}(R(\lambda)(u \otimes v)_1) = \lambda + \text{wt}(u) + \text{wt}(v) \quad (11.1)$$

と同値である.

$H$  を  $h^*$ , 写像  $(\cdot) : H \times X \rightarrow H$  を  $\lambda \cdot u := \lambda + \text{wt}(u)$  と定める. 次のような写像を, dynamical R-matrix と同じ記号  $R(\lambda)$  で表す.

$$R(\lambda) : X \times X \ni (u, v) \mapsto (R(\lambda)(u \otimes v)_1, R(\lambda)(u \otimes v)_2) \in X \times X.$$

この写像  $R(\lambda)$  はダイナミカル・ヤン・バクスター写像となり, 式 (11.1) は, このダイナミカル・ヤン・バクスター写像に関する invariance condition

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot R(\lambda)(u, v)_2) \cdot R(\lambda)(u, v)_1 &= (\lambda \cdot u) \cdot v \quad (\forall \lambda \in H, u, v \in X) \\ ((R(\lambda)(u, v)_1, R(\lambda)(u, v)_2) &:= R(\lambda)(u, v)) \end{aligned}$$

と一致する. このように, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像における invariance condition は, dynamical R-matrix における weight-zero condition に相当する.

つまり, invariance condition (8.3) は, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像の構成のための人工的・技術的な仮定ではなく, ダイナミカル・ヤン・バクスター写像が当然持つべき自然な条件である (と筆者は考えている).

## 謝辞

本稿は、研究集会「組み合わせ論的表現論の拡がり」を始め、大阪大学基礎工学部での Mini-workshop “Integrable Systems and Combinatorics” (2007 年 2 月), 筑波大学大学院物質科学研究科での特別セミナー (2008 年 12 月), 早稲田大学基幹理工学部での代数解析セミナー (2008 年 12 月) における講演内容をその基としている。これら講演の機会を筆者に与えていただいたことに對し、宮地兵衛, 中島達洋, 尾角正人, 増岡彰, 上野喜三雄各氏に感謝する。

## References

- [1] V. E. Adler, A. I. Bobenko, and Yu. B. Suris, Geometry of Yang-Baxter maps: pencils of conics and quadrirational mappings, *Comm. Anal. Geom.* **12** (2004), no. 5, 967–1007.
- [2] R. J. Baxter, Partition function of the eight-vertex lattice model, *Ann. Phys.* **70** (1972), 193–228.
- [3] R. J. Baxter, Solvable eight-vertex model on an arbitrary planar lattice, *Phil. Trans. Royal Soc. London* **289** (1978), 315–346.
- [4] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic, London, 1982.
- [5] G. Böhm, Hopf algebroids, preprint (arXiv:0805.3806) (2008).
- [6] V. G. Drinfel’d, “On some unsolved problems in quantum group theory”, *Quantum groups*. Lecture Notes in Math. **1510**, Springer, Berlin, 1992.
- [7] P. Etingof and F. Latour, *The dynamical Yang-Baxter equation, representation theory, and quantum integrable systems*, Oxford Univ. Press, New York, 2005.
- [8] P. Etingof, T. Schedler, and A. Soloviev, Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation, *Duke Math. J.* **100** (1999) no.2, 169–209.
- [9] P. Etingof and A. Varchenko, Solutions of the quantum dynamical Yang-Baxter equation and dynamical quantum groups, *Comm. Math. Phys.* **196** (1998), 591–640.

- [10] G. Felder, “Conformal field theory and integrable systems associated to elliptic curves”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [11] T. Gateva-Ivanova, A combinatorial approach to the set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation, *J. Math. Phys.* **45** (2004), no.10, 3828–3858.
- [12] J.-L. Gervais and A. Neveu, Novel triangle relation and absence of tachyons in Liouville string field theory, *Nuclear Phys. B* **238** (1984), no. 1, 125–141.
- [13] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, and J. Shiraishi, Quasi-Hopf twistors for elliptic quantum groups, *Transform. Groups* **4** (1999), no. 4, 303–327.
- [14] H. Konno, Elliptic quantum group  $U_{q,p}(\hat{sl}_2)$ , Hopf algebroid structure and elliptic hypergeometric series, preprint (arXiv:0803.2292) (2008)
- [15] J.-H. Lu, M. Yan, and Y.-C. Zhu, On the set-theoretical Yang-Baxter equation, *Duke Math. J.* **104** (2000) no.1, 1–18.
- [16] H. O. Pflugfelder, *Quasigroups and loops: introduction*, Heldermann, Berlin, 1990.
- [17] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps, *Int. Math. Res. Not.* **2005** (2005), 2199–2221.
- [18] Y. Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps with an invariance condition, *Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.* **43** (2007), 1157–1182.
- [19] Y. Shibukawa, Survey on dynamical Yang-Baxter maps, preprint (2009).
- [20] J. D. H. Smith and A. B. Romanowska, *Post-modern algebra*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [21] M. Takeuchi, Groups of algebras over  $A \otimes \overline{A}$ , *J. Math. Soc. Japan* **29** (1977), no. 3, 459–492.
- [22] A. P. Veselov, Yang-Baxter maps and integrable dynamics, *Phys. Lett. A* **314** (2003), no.3, 214–221.
- [23] A. Weinstein and P. Xu, Classical solutions of the quantum Yang-Baxter equation, *Comm. Math. Phys.* **148** (1992), no.2, 309–343.

- [24] C. N. Yang, Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsive delta-function interaction, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312–1314.
- [25] C. N. Yang, S matrix for the one-dimensional N-body problem with repulsive or attractive  $\delta$ -function interaction, *Phys. Rev.* **168** (1968), 1920–1923.