

とおくと, (15)式より $\phi_n(Z)$ に対する方程式は

$$\phi_n''(Z) - Z\phi_n'(Z) + n\phi_n(Z) = 0$$

となり, $\phi_n(Z) = H_n(Z)$ であることが分る。

多次元 Modified-Boussinesq 方程式のソリトン解

横浜国大・工 松川倫明, 渡辺慎介, 田中 裕

§ 1 Introduction

一次元ソリトンの研究は, 現任では, やり尽くされた感があるが, 多次元ソリトンの研究は KP 方程式や 2 次元戸田格子等の場合を除いて, 解明されていない問題点が多いと思われる。我々は, MK-dV 方程式や M-B (Boussinesq) 方程式の次元を拡張して, 多次元のソリトン解を, 広田の方法を適用して, 調べた。次に, 上述の二つの方程式の間の関係を無限小変換の Lie の方法を適用して, 考察した。なお, 我々の結果は, nonlinear-schrödinger 方程式と nonlinear-klein-Gordon 方程式系に対する Tajiri¹⁾ の結果と類比的である。

§ 2 多次元 M-B 方程式のソリトン解

2DM-B 方程式

$$u_{tt} = u_{xx} + 8(u^3)_{xx} + u_{xxxx} + u_{yy} \quad (1)$$

に対し, 次の従属変換をほどこして,

$$u = (\tan^{-1} g / f)_x \quad (2)$$

双線形形式で表わすと

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_t^2 - D_x^2 - D_x^4 - D_y^2)g \cdot f = 0 \\ (D_t^2 - D_x^2 - D_x^4 - D_y^2)(f \cdot f - g \cdot g) = 0 \\ D_x^2(f \cdot f + g \cdot g) = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

(3)に MK-dV 方程式の 2 ソリトン解を仮定して, 代入する

$$\begin{cases} f = 1 + a(1, 2) \exp(\xi_1 + \xi_2) \\ g = \exp \xi_1 + \exp \xi_2 \end{cases} \quad (4)$$

$$\xi_i = P_i x + Q_i y - \mathcal{Q}_i t \quad (i = 1, 2)$$

(4)より,

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_i^2 = P_i^2 + P_i^4 + Q_i^2 & i = 1, 2 \\ a(1, 2) = \frac{(\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2)^2 - (P_1 - P_2)^2 - (P_1 - P_4)^4 - (Q_1 - Q_2)^2}{(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2)^2 - (P_1 + P_2)^2 - (P_1 + P_4)^4 - (Q_1 + Q_2)^2} \\ a(1, 2) = -(P_1 - P_2)^2 / (P_1 + P_2)^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$(P_1 Q_2 - P_2 Q_1)^2 + (P_1 Q_2 - P_2 Q_1)(P_1^3 Q_2 - P_2^3 Q_1)$$

$$= 1/4 P_1^2 P_2^2 (P_1 - P_2)^2 (P_1 + P_2)^2 \quad (6)$$

従って, 波数成分 (P_i, Q_i) が(6)の条件を満たすときに, 2DM-B 方程式の 2 ソリトン解が存在する。2D $\rightarrow$ 1Dにすると, $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$ より $|P_1| = |P_2|$ となり, 2 ソリトン解はない。

cf 2DMK-dV (MK-P) 方程式の場合

$$(u_t + 8(u^3)_x + u_{xxx})_x + u_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} (D_x D_t + D_x^4 + D_y^2) g \cdot f = 0 \\ (D_x D_t + D_x^4 + D_y^2) (f \cdot f - g \cdot g) = 0 \\ D_x^2 (f \cdot f - g \cdot g) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_i P_i + P_i^4 + Q_i^2 = 0 \\ a(1, 2) = \frac{-(P_1 - P_2)(\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2) + (P_1 - P_2)^4 + (Q_1 - Q_2)^2}{-(P_1 + P_2)(\mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2) + (P_1 + P_2)^4 + (Q_1 + Q_2)^2} \\ a(1, 2) = -(P_1 - P_2)^2 / (P_1 + P_2)^2 \end{cases}$$

上の式より $P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = 0$ 平行伝搬

2D→1Dにした場合の双線形形式を Btype と呼ぶ (文献 2 の形式を Atype と呼ぶ)。この形式がソリトン解をもつことは後に述べる。同様にして, (1) の 3 ソリトン解を調べる。

$$\left\{ \begin{array}{l} f = 1 + \sum_{i < j}^3 a(i, j) \exp(\xi_i + \xi_j) \\ g = \sum_{i=1}^3 \exp \xi_i + a(1, 2, 3) \exp\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i\right) \end{array} \right. \quad (7)$$

(7) を (3) に代入して, 整理する。

$$\left\{ \begin{array}{l} (P_i Q_i - P_j Q_j)^2 + (P_i Q_j - P_j Q_i)(P_i^3 Q_j - P_j^3 Q_i) \\ = 1/4 P_i^2 P_j^2 (P_i - P_j)^2 (P_i + P_j)^2 \quad i < j \quad (i, j = 1 \sim 3) \\ a(1, 2, 3) F(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3, P_1 + P_2 + P_3, Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ + a(1, 2) F(\varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3, P_1 + P_2 - P_3, Q_1 + Q_2 - Q_3) \\ + a(1, 3) F(\varrho_1 + \varrho_3 - \varrho_2, P_1 + P_3 - P_2, Q_1 + Q_3 - Q_2) \\ + a(2, 3) F(\varrho_2 + \varrho_3 - \varrho_1, P_2 + P_3 - P_1, Q_2 + Q_3 - Q_1) = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

よって, $(P_i, Q_i) (i = 1 \sim 3)$ が, (8) 式を満たすときに 3 ソリトン解が存在する。今迄の議論から N ソリトン解が存在すると予想されるが, ここでは, 直接求めることはしないで, 別の角度から考察する。

§ 3 2DM-B 方程式と MK-dV 方程式を結ぶ変換

2DM-B 方程式に無限小変換の Lie の方法を適用する。(詳細は文献 3 を参照のこと)

(x, y, t, u) space で, 無限小変換の one parameter (ε) Lie group を考える。

$$\left\{ \begin{array}{l} x^* = x + \varepsilon X(x, y, t, u) + O(\varepsilon^2) \\ y^* = y + \varepsilon Y(x, y, t, u) + O(\varepsilon^2) \\ t^* = t + \varepsilon T(x, y, t, u) + O(\varepsilon^2) \\ u^* = u + \varepsilon U(x, y, t, u) + O(\varepsilon^3) \\ u_{x^*}^* = u_x + \varepsilon [U_x] + O(\varepsilon^2) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{x^*x^*}^* = u_{xx} + \varepsilon [U_{xx}] + O(\varepsilon^2) \\ u_{t^*t^*}^* = u_{tt} + \varepsilon [U_{tt}] + O(\varepsilon^2) \\ u_{y^*y^*}^* = u_{yy} + \varepsilon [U_{yy}] + O(\varepsilon^2) \\ u_{x^*x^*x^*x^*}^* = u_{xxxx} + \varepsilon [U_{xxxx}] + O(\varepsilon^2) \end{array} \right. \quad (9)$$

ここで, $[U_x]$, $[U_{xx}]$ 等は次の形式で与えられる。

$$x, y, t \rightarrow x_1, x_2, x_3 \quad X, Y, T \rightarrow X_1, X_2, X_3.$$

$$[U_x] = DU/Dx_1 - (DX_\nu/Dx_1) u, \nu$$

$$[U_{\mu\mu}] = D[U_\mu]/Dx_\mu - (DX_\nu/Dx_\mu) u, \mu\nu$$

$$D/Dx_j = \partial x_j + u, j \quad \partial_u \quad (\mu, \nu = 1 \sim 3)$$

$[U_{xxxx}]$ は省略

方程式(1)は, 変換(9)に対して, invariant であるとする。

$$u_{t^*t^*}^* = u_{x^*x^*}^* + (u^*)_{x^*x^*}^3 + u_{x^*x^*x^*x^*}^* + u_{y^*y^*}^* \quad (11)$$

(11)に(9)を代入し, ε の1次の式から, 無限小 X, Y, T, U を決めればよい。

また, similarity variables は次の特性方程式を解くことによって得られる。

$$dx/X = dy/Y = dt/T = du/U \quad (12)$$

以上の手続きを実行すると, 次の変換が求まる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = x + \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{\alpha})y \mp \frac{1}{2}(\alpha + \frac{1}{\alpha})t \\ \tau = \frac{1}{2\alpha}(y \pm t) \quad \alpha : \text{任意定数} \end{array} \right. \quad (13)$$

この変換によって, 2DM-B方程式は, 1DMK-dV方程式に帰着する。

§ 4 双線形形式による考察

2DM-B方程式の双線形形式(3)に変換(B)をほどこす。

$$\{ (D_\xi D_\tau + D_\xi^4) g \cdot f = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_{\xi} D_{\tau} + D_{\xi}^4) (f \cdot f - g \cdot g) = 0 \\ D_{\xi}^2 (f \cdot f + g \cdot g) = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

これは、1 DMK-dV方程式のBtypeの双線形形式である。ただし、 $\xi = Px + Qy + \Omega t$ のとき、 P 、 Q 、 Ω に次の制限をつける。

$$\begin{aligned} P = \bar{P} \quad Q = \frac{1}{2} \left[\left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \bar{P} - \frac{1}{\alpha} \bar{\Omega} \right] \\ \Omega = \frac{1}{2} \left[\left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \bar{P} + \frac{1}{\alpha} \bar{\Omega} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

このとき、 $\xi = \bar{P}\zeta - \bar{\Omega}\tau$

よって、1 DMK-dV方程式のBtypeの双線形形式が N ソリトン解を与えることが証明できるならば、変換(13)によって、2 DM-B方程式の N ソリトン解をつくることができる。従って、この方程式が N ソリトン解をもつ理由を示すことになる。

◦ Btypeの N ソリトン解の証明

$$(D_{\tau} + D_{\xi}^3) g \cdot f = 0$$

Atype (by Hirota)

$$D_{\xi}^2 (f \cdot f + g \cdot g) = 0$$

以下の議論では、Atypeの解 f 、 g を形式的に用いる。(14)に、2ソリトン解をもつと仮定して、代入する。

$$f = 1 + a(1, 2) \exp(\xi_1 + \xi_2)$$

$$g = \exp \xi_1 + \exp \xi_2 \quad (16)$$

$$\xi_i = \bar{P}_i \zeta - \bar{\Omega}_i \tau \quad (i = 1, 2)$$

$$\bar{\Omega}_i = \bar{P}_i^3$$

$$a(1, 2) = \frac{-(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)(\bar{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_2) + (\bar{P}_1 - \bar{P}_2)^4}{-(\bar{P}_1 + \bar{P}_2)(\bar{\Omega}_1 + \bar{\Omega}_2) + (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^4} \quad (17)$$

$$a(1, 2) = -(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)^2 / (\bar{P}_1 + \bar{P}_2)^2$$

分散式より、第2式は第3式に等しい。よって、任意定数 $a(1, 2)$ を(17)の第3式のように決めたときに、(16)は、MK-dV方程式の2ソリトン解を与える。3ソリトン解を与えることも同

様にしていえる。次に N ソリトン解の証明 (略証) に移る。A type の N ソリトン解を与える f , g を用いる。

$$f(\zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{[N/2]} \sum_{N C_{2n}} a(i_1, i_2, \dots, i_{2n}) \exp(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_{2n}})$$

$$g(\zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{[N-1/2]} \sum_{N C_{2n+1}} a(i_1, i_2, \dots, i_{2n+1}) \exp(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_{2n+1}})$$

$$a(i_1, i_2, \dots, i_n) = \prod_{k < l}^{(n)} a(i_k, i_l) \quad \text{for } n \geq 2$$

$$= 1 \quad \text{for } n = 0, 1$$

$$\bar{Q}_i = \bar{P}_i^3 \quad \xi_i = \bar{P}_i \zeta - \bar{Q}_i \tau$$

$$a(i_k, i_l) = -(\bar{P}_{i_k} - \bar{P}_{i_l})^2 / (\bar{P}_{i_k} + \bar{P}_{i_l})^2$$

f , g を (14) に代入したときに, 次の条件が満足されていれば, N ソリトン解を与える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{(n)} \sum_{n C_l} a(i_1, \dots, i_l) a(i_{l+1} \dots i_n) H_1(i_1 \dots i_l; i_{l+1} \dots i_n) = 0 \\ \quad n = 1, 3, 5 \dots \leq N \\ \sum_{l=0}^{(n)} \sum_{n C_l} (-1)^l a(i_1, \dots, i_l) a(i_{l+1} \dots i_n) H_1(i_1 \dots i_l; i_{l+1} \dots i_n) = 0 \\ \quad n = 2, 4, 6 \dots \leq N \\ \sum_{l=0}^{(n)} \sum_{n C_l} (-1)^l \hat{a}(i_k, i_l) \hat{a}(i_{l+1} \dots i_n) H_2(i_1 \dots i_l; i_{l+1}, i_n) = 0 \\ \quad n = 2, 4, 6 \dots \leq N \end{array} \right. \quad (18)$$

$$H_1(i_1 \dots i_l; i_{l+1} \dots i_n) = -(\bar{P}_{i_1} + \dots + \bar{P}_{i_l} - \bar{P}_{i_{l+1}} \dots - \bar{P}_{i_n})$$

$$\times [\bar{P}_{i_1}^3 + \dots + \bar{P}_{i_l}^3 - \bar{P}_{i_{l+1}}^3 \dots - \bar{P}_{i_n}^3 - (\bar{P}_{i_1} + \dots + \bar{P}_{i_l} - \bar{P}_{i_{l+1}} \dots - \bar{P}_{i_n})^3]$$

$$H_2(i_1 \dots i_l; i_{l+1} \dots i_n) = (\bar{P}_{i_1} + \dots + \bar{P}_{i_l} - \bar{P}_{i_{l+1}} \dots - \bar{P}_{i_n})^2$$

(18) 式は, 次の identity に書き換えられる。

$$\left\{ \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n = \pm 1} b(\sigma_1 \bar{P}_1, \sigma_2 \bar{P}_2, \dots, \sigma_n \bar{P}_n) H_1(\sigma_1 \bar{P}_1, \sigma_2 \bar{P}_2, \dots, \sigma_n \bar{P}_n) = 0 \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 1, 2, 3 \dots \\ \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n = \pm 1} b(\sigma_1 \bar{P}_1, \sigma_2 \bar{P}_2, \dots, \sigma_n \bar{P}_n) H_2(\sigma_1 \bar{P}_1, \sigma_2 \bar{P}_2, \dots, \sigma_n \bar{P}_n) = 0 \\ n = 2, 4, 6 \dots \text{even} . \end{array} \right. \quad (19)$$

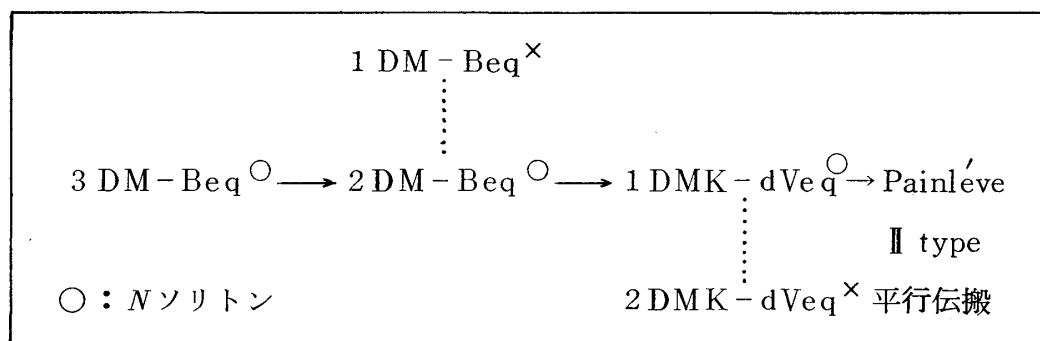
ここで, $b(\sigma_1 \bar{P}_1, \sigma_2 \bar{P}_2, \dots, \sigma_n \bar{P}_n) = \prod_{k < l}^{(n)} (\sigma_k \bar{P}_k - \sigma_l \bar{P}_l)^2$

$$H_1 = -(\sigma_1 \bar{P}_1 \dots + \sigma_n \bar{P}_n) \{ (\sigma_1 \bar{P}_1^3 + \dots + \sigma_n \bar{P}_n^3) - (\sigma_1 \bar{P}_1 + \dots + \sigma_n \bar{P}_n)^3 \}$$

$$H_2 = (\sigma_1 \bar{P}_1 + \sigma_2 \bar{P}_2 + \dots + \sigma_n \bar{P}_n)^2$$

identity (19)が, $\forall n, \forall \text{even } n$ について成立することは, 数学的帰納法によって証明できる。

§ 5 結論



(cf. 3 DM-Beq も同様にしていえる)

上の図より, M-B方程式とMK-dV方程式が, 相似変換と N ソリトン解によって結ばれている。非線形項が u^3 である弱い分散のある系で偏微分方程式を考えたとき, u^3 の寄与が本質的であるとすれば, 次元の拡張のしかたを $1 \text{ DMK} - \text{dVeq} \rightarrow 2 \text{ DM} - \text{Beq} \rightarrow 3 \text{ DM} - \text{Beq}$ としても, 定性的には可能である。このような系では, KdVeq系と同様に, 次元を増やしても, 制限の強さは別にして, ソリトン解をもつといえる。

文 献

- 1) M. Tajiri, J. P. S. J **53** (1984) 1.
- 2) R. Hirota, J. P. S. J **33** (1972) 1456.
- 3) G. W. Bluman and J. D. Cole: *Similarity Methods for Differential Equations* (Springer, Berlin 1974)