

Slippage Problem における Rank Tests について

九大 理学部 垣内逸郎
木村美善
柳川 堯

Part I.

$\{f(x|\Delta) \mid \Delta \in (-\infty, \infty)\}$ は, パラメーターとして Δ を持つ
実数上の p.d.f. の族。 $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}$ ($i=1, 2, \dots, k$) は,
 $f(x|\Delta_i)$ に従う互いに独立な r.v. とする。この時, 次の両側 ([A])
及び片側 ([B]) slippage 検定問題を考える。

$$[A] \quad H_0 : \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_k = 0$$

$$H_{i1}(\Delta) : \Delta_1 = \dots = \Delta_{i-1} = \Delta_i - \Delta = \Delta_{i+1} = \dots = \Delta_k = 0$$

$$H_{i2}(\Delta) : \Delta_1 = \dots = \Delta_{i-1} = \Delta_i + \Delta = \Delta_{i+1} = \dots = \Delta_k = 0$$

$$i=1, 2, \dots, k \quad (k \geq 3) ; \Delta > 0$$

$$[B] \quad H_0 : \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_k = 0$$

$$H_i(\Delta) : \Delta_1 = \dots = \Delta_{i-1} = \Delta_i - \Delta = \Delta_{i+1} = \dots = \Delta_k = 0$$

$$i=1, 2, \dots, k \quad (k \geq 2) ; \Delta > 0$$

$P(D_0|H_0)$ は, H_0 の下で H_0 を採択する確率を表わすものとする。

定義1. rank test は.

$$(1) \quad P(D_0|H_0) \geq 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

を満たす時, size α であるという。

$\mathcal{D}_\alpha$ を size α rank test の全体とする。

定義2. size α rank test d^* は.

$$(2) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r P_d^*(D_{ij}|H_{ij}(\Delta)) = \sup_{d \in \mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r P_d(D_{ij}|H_{ij}(\Delta)), \text{ when [A]}$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^k P_d^*(D_i|H_i(\Delta)) = \sup_{d \in \mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^k P_d(D_i|H_i(\Delta)), \text{ when [B]}$$

を満たす時, Δ に対する most powerful size α (MPS- α) rank test と呼ぶ。

定義3. size α rank test d^* は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\Delta_\varepsilon > 0$ が存在し, $0 < \forall \Delta < \Delta_\varepsilon$ に対して

$$(4) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r P_d^*(D_{ij}|H_{ij}(\Delta)) > \sup_{d \in \mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r P_d(D_{ij}|H_{ij}(\Delta)) - \varepsilon, \text{ when [A]}$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^k P_d^*(D_i|H_i(\Delta)) > \sup_{d \in \mathcal{D}_\alpha} \sum_{i=1}^k P_d(D_i|H_i(\Delta)) - \varepsilon, \text{ when [B]}$$

を満たすとき, extended locally most powerful size α (ELMPS- α) rank test と呼ぶ。

$X = (X_{11}, X_{12}, \dots, X_{kn})$ に対して, $R_{ij}(X)$, 及び $X_{(i)}$ は, それぞれ $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{kn}$ における X_{ij} の rank, i 番目の順序統計量とする。また, $R(X) = (R_{11}(X), R_{12}(X), \dots, R_{kn}(X))$ とし, $H_0(\Delta)$ の下での $R(X)$ の density を $h_0(r|\Delta)$ とする。ここで $H_0(0) = H_0(\Delta) = H_0$ と約束する。

定理1A. $f(x|0) = f(-x|0)$ 及び $f(x|\Delta) = f(-x|-\Delta)$ が満たされるならば, $\forall \alpha \in (0, 1)$ に対して MPS- α rank test が存在し,

次式(6)で与えられる。

$$(6) \quad d_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq 2}} h_{ij}(r|\Delta) < \lambda \cdot h_0(r) \\ \xi(r) & \text{if } = \\ 0 & \text{if } > \end{cases}$$

$$d_{\ell m}(r) = \begin{cases} \eta_{\ell m}(r) & \text{if } h_{\ell m}(r|\Delta) = \max_{i,j} h_{ij}(r|\Delta) \geq \lambda \cdot h_0(r) \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

$i, \ell = 1, 2, \dots, k; j, m = 1, 2.$

定理1 B. $\forall \alpha \in (0, 1)$ に対して、[B]のMPS- α rank test が存在し、次式(7)で与えられる。

$$(7) \quad d_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max_{1 \leq i \leq k} h_i(r|\Delta) < \lambda \cdot h_0(r) \\ \xi(r) & \text{if } = \\ 0 & \text{if } > \end{cases}$$

$$d_j(r) = \begin{cases} \eta_j(r) & \text{if } h_j(r|\Delta) = \max_i h_i(r|\Delta) \geq \lambda \cdot h_0(r) \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

以下の定理2A, 2Bにおいて、Hájek & Šidák [1] で与えられる次の条件[C]を仮定する。

[C] J は、0 を含む開区間とするとき、

(i) $f(x|\Delta)$ は、a.e. x に対して $\Delta \in J$ の絶対連続関数

(ii) a.e. x に対して、

$$\dot{f}(x|0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [f(x|\Delta) - f(x|0)] \quad \text{が存在する。}$$

$$(iii) \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_a^\infty |\dot{f}(x|\Delta)| dx = \int_a^\infty |\dot{f}(x|0)| dx < \infty$$

ここで $\dot{f}(x|\Delta)$ は Δ に関する $f(x|\Delta)$ の偏微分

定理2A. $\forall \Delta \in J$ に対して, $f(x|\Delta) = f(-x|-\Delta)$ が満たされるならば, $\forall \alpha \in (0,1)$ に対して $[A]$ の ELMPS- α rank test が存在し, 次式(8)で与えられる。

$$(8) \quad d_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max_{i,j} T_{ij}(r) < \lambda \\ \frac{1}{2}(r) & \text{if } \max_{i,j} T_{ij}(r) = \lambda \\ 0 & \text{if } \max_{i,j} T_{ij}(r) > \lambda \end{cases}$$

$$d_{\ell m}(r) = \begin{cases} \eta_{\ell m}(r) & \text{if } T_{\ell m}(r) = \max_{i,j} T_{ij}(r) \geq \lambda \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

$$\lambda, \ell = 1, 2, \dots, k; \quad j, m = 1, 2$$

$$T_{\ell 1}(r) = \sum_{j=1}^n E_0 \left[\frac{f(X_{\ell j}(r)|0)}{f(X_{\ell j}|0)} \right], \quad T_{\ell 2}(r) = \sum_{j=1}^n E_0 \left[\frac{f(X_{\ell m+1-r_{ij}}|0)}{f(X_{\ell m+1-r_{ij}}|0)} \right]$$

E_0 は, H_0 の下での期待値を表わす。

定理2B. $\forall \alpha \in (0,1)$ に対して $[B]$ の ELMPS- α rank test が存在し, 次式(9)で与えられる。

$$(9) \quad d_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max_i T_i(r) < \lambda \\ \frac{1}{2}(r) & \text{if } \max_i T_i(r) = \lambda \\ 0 & \text{if } \max_i T_i(r) > \lambda \end{cases}$$

$$d_j(r) = \begin{cases} \eta_j(r) & \text{if } T_j(r) = \max_i T_i(r) \geq \lambda \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \dots, k; \quad T_i(r) = \sum_{j=1}^n E_0 \left[\frac{f(X_{ij}(r)|0)}{f(X_{ij}|0)} \right]$$

さて, 特に Δ が location parameter の場合 ($f(x|\Delta) = f(x-\Delta)$) には, 定理2B が成り立つ。更に $f(x) = f(-x)$ であれば, $f(x|\Delta) = f(-x|-\Delta)$ を満たすから定理2A が成り立つ。また, Δ が scale parameter の場合 ($f(x|\Delta) = \varrho^{-\Delta} f(x \cdot \varrho^{-\Delta})$) には,

定理2B が成り立つ。ところで location の場合 $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty$
 scale の場合 $\int_{-\infty}^{\infty} |xf'(x)| dx < \infty$ であれば 条件 [C] と満たす。

この location と scale の場合には, Slippage 問題 [A], [B]
 において, θ を unknown で free な δ に置き換えた Slippage 問
 題 [A'], [B'] に対しても全く同様な結果が得られることを注意
 しておく。

Part II.

これから, 片側 Slippage 検定問題

$$[B'] \quad H_0 : \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_k = \delta$$

$$H_{\lambda}(\Delta) : \Delta_1 = \dots = \Delta_{i-1} = \Delta_i - \Delta = \Delta_{i+1} = \dots = \Delta_k = \delta$$

$$i = 1, 2, \dots, k \quad (k \geq 2), \quad \delta : \text{unknown and free.}$$

において, Δ が location parameter である場合を考え. 次に挙
 げる (10) 及び (11) の test の power の単調性と, (11) の (10)
 に対する漸近相対効率について議論する

さて, 正規分布の場合, $f(x-\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\Delta)^2]$,
 であるとき, uniformly most powerful size α test は.

$$(10) \quad d_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max_{1 \leq i \leq k} V_i(x) \leq \lambda \\ 0 & \text{if } > \end{cases}$$

$$d_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } V_j(x) = \max_{1 \leq i \leq k} V_i(x) > \lambda \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

$$V_i(x) = (\bar{x}_i - \bar{x}) / \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{x})^2}, \quad \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$$

で与えられることが知られている。([3], [4])

ここで、次の形の rank test を考える。

$$(11) \quad d_0(r) = \begin{cases} 1 & \text{if } \max_{1 \leq i \leq k} T_{Ni}(r) < \lambda \\ 3\alpha & \text{if } = \\ 0 & \text{if } > \end{cases}$$

$$d_j(r) = \begin{cases} 1/m(r) & \text{if } T_{Nj} = \max_{1 \leq i \leq k} T_{Ni} > \lambda \\ (1-3\alpha)/m(r) & \text{if } = \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

$$j=1, 2, \dots, k, \quad m(r) = \# \{l \mid T_{Nl}(r) = \max_i T_{Ni}(r)\}$$

ただし、 T_{Ni} は次の様に定義する。

$$T_{Ni} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N E_{Nj} \Sigma_{Nj}^{(i)},$$

E_{Nj} : 与えられた数

$$\Sigma_{Nj}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if } X_{(j)} \text{ が } i \text{ 番目の母集団からの sample.} \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

[I] Powerの単調性

(10) 及び (11) の test は、Slippage test の3種の検出力について、

$$P(D_i | H_i(\Delta)) = P(D_j | H_j(\Delta))$$

$$(12) \quad P(D_i | H_j(\Delta)) = P(D_l | H_m(\Delta))$$

$$P(D_0 | H_i(\Delta)) = P(D_0 | H_j(\Delta)), \quad 1 \leq i \neq j, l \neq m \leq k$$

を満足する。そこで、次の3種の検出力の単調性を考える。

(b)

- (i) $P(D_i | H_i(\Delta))$ は, Δ に関して非減少.
- (ii) $P(D_j | H_i(\Delta))$ は, Δ に関して非増大. ($i \neq j$)
- (iii) $P(D_0 | H_i(\Delta))$ は, Δ に関して非増大.

このとき次の定理が成り立つ.

定理3. location parameter Δ を持つ分布族に対し, (10) の test は, (i) を満足する

定理4. E_{H_i} が Δ に関して nondecreasing であるとき, parameter Δ に関して stochastically increasing な分布族に対して, (11) の test は, (i) を満足する

[II] Asymptotic Relative Efficiency (A.R.E)

標本数を明確にし, かつ (10) と (11) の test を区別する為に H_i を採択する決定 D_i を, (10) の場合 D_{ni}^M , (11) の場合 D_{ni}^R と表わすことにする. (10) に対する (11) の test の漸近相対効率 (A.R.E) は, Pitman の考えに従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{ni}^M | H_i(\Delta^{(n)})) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{n^*i}^R | H_i(\Delta^{(n)}))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{nj}^M | H_i(\Delta^{(n)})) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{n^*j}^R | H_i(\Delta^{(n)}))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{n0}^M | H_i(\Delta^{(n)})) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{n^*0}^R | H_i(\Delta^{(n)}))$$

を同時に満たす n , $n^* = n^*(n)$ について

$$(13) \quad e_{R.M} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^*}$$

で定義する. ここで, $\Delta^{(n)} = n^{-1/2} \Delta$ とする.

このとき, $e_{R.M}$ は, t -test に対する rank test の

漸近相対効率と一致する。

References

- [1] Hájek, J. and Šidák, Z. (1967): Theory of rank tests.
Academic Press. New York.
- [2] Hall, I.J. and Kudo, A. (1968): On slippage tests - (I)
A generalization of Neyman-Pearson's lemma.
A.M.S. 39, 1693-1699
- [3] Hall, I.J., Kudo, A. and Yeh, N.C. (1968): On slippage
tests - (II) Similar slippage tests. A.M.S. 39, 2029-37
- [4] Paulson, E. (1952): An optimum solution to the k -sample
slippage problem for the normal distribution.
A.M.S. 23, 610-616.
- [5] Puri, M.L. (1964): Asymptotic efficiency of a class
of c -sample tests. A.M.S. 35, 102-121