

ホロノミー重群の簡約に付随した

C^* -環について

大阪女子大 大内本夫 (Moto O'uchi)

葉層 C^* -環は葉層構造のホロノミー重群に付随する C^* -環として定義され、通常は単位元を持たない安定な環である。このことはホロノミー重群の軌道が連続であることと対応している。ところが、葉層構造の余次元 1 の横断多様体によるホロノミー重群の簡約 (reduction) は離散的な軌道を持つ重群である。そこで葉層構造の余次元 1 の横断多様体を単に横断と呼ぶことにする。コンパクト多様体上の葉層構造に対しては、このような簡約に付随する C^* -環は単位元を持つ。さらに、横断が完備 (complete) ならばこのような C^* -環は葉層 C^* -環と安定同型になる [1]。したがって葉層 C^* -環を自身を考えるより、ホロノミー重群の簡約に付随する C^* -環を考えたほうが有効な場合が多い。葉層束 (foliated bundle) に対しては、ホロノミー重群の完備な横断による簡約の構造が知られている； Γ を葉層束のホロノミー重群、 N を自然

な完備な横断とする。位相空間 F に作用している群 G と、各 $x \in F$ に対して G の部分群 G^x が存在し、簡約 Γ_N^N は位相群 $(F \times G) / \sim$ と同型になる、ここで $(x, \sigma) \sim (y, \delta)$ となるのは $x = y$ かつ $\delta^{-1}\sigma \in G^x$ のときである [2, Theorem 2.25]。しかし、一般にはホロノミー群の完備な横断による簡約はこのような簡単な形をしていない。余次元が2以上のある横断多様体によるホロノミー群の簡約が群の作用によって得られる場合でも、横断による簡約が複雑な形になる例がある。ここでは、このような例における横断による簡約を調べてみる。

§1. 葉層構造と群作用

最初に、対象となる葉層構造を定義する。 $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $SL(2, \mathbb{Z})$ の元で固有値 λ が実数かつ無理数であるとする。 S は2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上に自然に作用している。 $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ 上の流れ $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ と $\mathbb{Z}$ の作用 δ を次のように定義する；

$$\varphi_t(\xi, u) = (\xi, u+t)$$

$$\delta_n(\xi, u) = (S^n \xi, u-n).$$

$\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ は次のように定義される；

$$(\xi, u) \sim (\eta, v) \iff \exists n \in \mathbb{Z} \text{ such that } (\eta, v) = \delta_n(\xi, u).$$

$V = \pi^2 \times \mathbb{R} / \sim$ とし, φ_t は V 上の流れであると考える。 λ_1 と λ_2 を δ の固有値で $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$ となるものとする。 $p \in V$ における接空間 $T_p(V)$ において, $b(\partial/\partial x)_p + (\lambda_2 - a)(\partial/\partial y)_p$ によって生成される部分空間を X_p , $b(\partial/\partial x)_p + (\lambda_1 - a)(\partial/\partial y)_p$ によって生成される部分空間を Y_p , $(\partial/\partial u)_p$ によって生成される部分空間を Z_p とする。 $X_p \oplus Z_p$ によって定義される葉層構造が弱安定な葉層構造 $(V, \mathcal{F}^{ws})$, $Y_p \oplus Z_p$ によって定義されるものが弱不安定な葉層構造 $(V, \mathcal{F}^{wu})$ である。

$(V, \mathcal{F}^{ws})$ のかわりに $(V, \mathcal{F}^{\lambda_2})$, $(V, \mathcal{F}^{wu})$ のかわりに $(V, \mathcal{F}^{\lambda_1})$ と書く。以下 δ の固有値 λ を 1 つ固定し, $(V, \mathcal{F}^{\lambda})$ のかわりに $(V, \mathcal{F})$ と書くことにする。 $\tilde{\Gamma}$ を $(V, \mathcal{F})$ のホロノミー群, A を $\{0\} \times \pi \times \{0\}$ の V における像とする。 A は $\tilde{\Gamma}$ の完備な横断である。 $\tilde{\Gamma}$ の A による簡約を

$$\Pi = \tilde{\Gamma}_A^A = \{ \gamma \in \tilde{\Gamma}; s(\gamma), r(\gamma) \in A \}$$

とする。

G を $[4]$ において定義された群とする。すなわち

$K = 0\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z} \times_s K$ であり, 積は

$$(n, k)(n', k') = (n+n', k + \lambda^n k')$$

$(n, k), (n', k') \in \mathbb{Z} \times K$ で与えられる。 $H = \{(0, l); l \in \mathbb{Z}\}$

は G の部分群である。 G の $\mathbb{R}$ 上への作用を

$$(n, k)t = \lambda^n t + k$$

によつて定義する。 $g = (n, \theta l_1 + l_2) \in G$ に対して

$$T(t, g) = \lambda^n b(n)t + \lambda^n l_1$$

とおく、ただし

$$S^n = \begin{pmatrix} a(n) & b(n) \\ c(n) & d(n) \end{pmatrix}.$$

$g = (n, k) \in G$ に対して、 $|g| = n$, $r = (t, g) \in \mathbb{R} \times G$ に対して $|r| = |g|$ とおく。 $t \in \mathbb{R}$ に対して、 $[t]$ を t の π における商写像による像とする。

命題 1.

写像 $\phi: \mathbb{R} \times G \longrightarrow \Gamma$ を

$$\phi(r) = ([S(|r|)], (-|r|, T(r)))$$

によつて定義すると、 ϕ は $\mathbb{R} \times G$ から Γ 上への位相群としての準同型である。

§2. $C_r^*(\Gamma)$ の表現.

$C_r^*(\Gamma)$ は Γ に付随した reduced C^* 環である [1]。

$C_r^*(\Gamma)$ の $L^2(\mathbb{R} \times H \setminus G)$ 上の表現を構成するために、次の補題が必要である。

補題 2.

$$g, g' \in G, h, h' \in H, t \in \mathbb{R} \text{ に対して,}$$

$$g(h'g't, hg(h'g')^{-1}) = g(g't, gg'^{-1}).$$

$H \backslash G$ を H に属する右剰余類全体の作る空間とする。 $g \in G$ を代表元とする $H \backslash G$ の類を $[g]$ と書く。上の補題によって、写像 $\tilde{g} : \mathbb{R} \times H \backslash G \times H \backslash G \rightarrow \Gamma$ を

$$\tilde{g}(t, [g], [g']) = g(g't, gg'^{-1}) \quad (g, g' \in G)$$

によ、て定義することができ。 $f \in C_c(\Gamma)$, $\eta \in L^2(\mathbb{R} \times H \backslash G)$ に対して、 $\mathbb{R} \times H \backslash G$ 上の関数 $\pi(f)\eta$ を

$$(\pi(f)\eta)(t, \xi) = \sum_{g' \in H \backslash G} f \circ \tilde{g}(t, \xi, \xi') \eta(t, \xi')$$

によ、て定義することができ。この時、 $\pi(f)$ が $L^2(\mathbb{R} \times H \backslash G)$ 上の有界作用素であることが証明でき、更に次のことがわかる。

定理 3.

π は $C_r^*(\Gamma)$ の忠実な表現に拡張することができる。その表現もまた π と書く

§3. $C_r^*(\Pi)$ の別の記述.

[4] で導入した C^* -環の族 $\{B_s^\lambda; s \in \Pi\}$ の定義を思い出しておく。 $\tilde{B} = G \times_{\text{dr}} C_0(\mathbb{R})$ とし, $u: G \rightarrow \tilde{B}''$, $\rho: L^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \tilde{B}''$ を標準的な表現とする。 $f \in C_c(\mathbb{R})$, $g \in G$ に対して

$$X(f, g) = \sum_{h \in H} \rho(h \cdot f) u(h g h^{-1})$$

とおき, B^λ を $X(f, g)$ ($f \in C_c(\mathbb{R})$, $g \in G$) によって生成された C^* -環とする。 $(B^\lambda)''$ の中心は $L^\infty(\Pi)$ と同型なので B^λ の恒等表現 λ の中心分解

$$\lambda = \int_{\Pi}^{\oplus} \mathbb{E}_s \, d\lambda$$

を考える。 $B_s^\lambda = \mathbb{E}_s(B^\lambda)$ である。この時, つぎの定理がなりたつ。

定理 4.

$C_r^*(\Pi)$ と B_0^λ は同型である。ただし λ は (V, φ) に対応した S の固有値である。

B_0^λ は垂群 $\mathbb{R} \times G$ の部分垂群 $\mathbb{R} \times H$ による“商”に付随した C^* -環と考えられるので, 上の定理は Moore-Schochet の結果 [2, Theorem 2.25] に対応している。

References

1. Hilsum, M., and Skandalis, G., Stabilité des C^* -algèbres de feuilletages, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 33(1983), 201-208.
2. Moore, C.C., and Schochet, C., Global analysis on foliated spaces, Springer-Verlag, New York, 1988.
3. O'uchi, M., Coverings of foliations and associated C^* -algebras, Math. Scand., 58(1986), 69-76.
4. O'uchi, M., On C^* -algebras containing irrational rotation algebras, preprint.