

時系列長が実証的相関行列の固有値分布に与える影響¹

京都大学 大学院情報学研究科 数理工学専攻 西岡 謙太, 佐藤 彰洋²

多変量時系列から相関行列を推定するとき, 有限の時系列から計算しなければならず, また過去のデータを用いなければならないので誤差を生じてしまう. このとき, 時系列長 T と資産数 N の比 T/N を十分大きくとることができれば誤差を小さくできると考えられる.

相関行列が真の相関行列に十分収束したと考えられる十分大きな T/N を求めるために, 実証的相関行列の T/N に伴う変化の様子を実証的相関行列の固有値分布の観点から考察した. そして, 十分な大きさの T/N を求めるための指標としてカイラルランダム行列の固有値分布を用いた.

実データを用いた解析では, 真の相関行列は求めることができないので, まず真の相関行列を解析的にもとめることができるランジュバンモデルを用いて解析を行った. ランジュバンモデルにおいては分散共分散が一定の場合と, より現実に近いモデルとして分散共分散が時間的に揺らぐ場合を考えた. 資産の対数収益率を並べた N 次元縦ベクトル $\mathbf{r}(t)$ を以下のランジュバン方程式で記述する.

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\xi}(t). \quad (1)$$

ここで, $\boldsymbol{\xi}(t)$: N 次元縦ベクトル, $-\mathbf{A}$: $N \times N$ 半正定値対称行列であり, $\boldsymbol{\xi}(t)$ は白色ガウスノイズとする.

上記のランジュバン方程式を用いて生成した時系列に対して相関行列を求め, その実証的相関行列の固有値分布, ランダム行列の固有値分布, 解析的に求めた固有値分布の三つを比較し, 時系列長の変化に伴って実証的相関行列が収束していく様子を確認した. 収束の様子を定量的に見るためにランダム行列の固有値分布と真の固有値分布, またランダム行列の固有値分布とランジュバン方程式から生成した相関行列の固有値分布の Jensen-Shannon divergence を計算し比較した.

次に, ランダムに選んできた日本企業 100 銘柄の日次証券価格から計算される対数収益率に対して, 実証的相関行列を求め, 時系列長の変化に伴って, 実際に収束する様子を確認した. そして, ランダム行列の固有値分布と実データから得られた固有値分布の Jensen-Shannon divergence を計算し, ランジュバンモデルにおいて求めた Jensen-Shannon divergence と比較した.

左下の図がランジュバンモデルにおける divergence に関する図である. 破線が実証的相関行列の固有値密度と真の相関行列の固有値密度との divergence(距離), 実線が実証的相関行列の固有値密度とカイラルランダム行列の固有値密度との divergence(距離)を表している. この図から, 始め

¹この原稿は、京都大学基礎物理学研究所研究会経済物理学 2009 のポスター発表に基づく。

²E-mail: kenta@amp.i.kyoto-u.ac.jp

は実証的固有値密度はカイラルランダム行列の固有値密度に近い形状をしているが $Q = N/T$ の増加に伴って真の固有値密度に近付いていっていることがわかる. $Q = N/T = 6$ 付近でその関係が反転しているのがわかる.

右下の図が実データにおける divergence に関する図である. 左下のランジュバンモデルの場合と同様に実証的固有値密度とカイラルランダム行列の固有値密度の違いが $Q = N/T$ の増加に伴って増加しているのが分かる. このことから, $Q = N/T$ の増加に伴って実証的固有値密度は真の固有値密度に近付いていっていると推測できる. ランジュバンモデルの結果から $Q = N/T$ は 6 以上の値にとるのが適当であると推測できる.

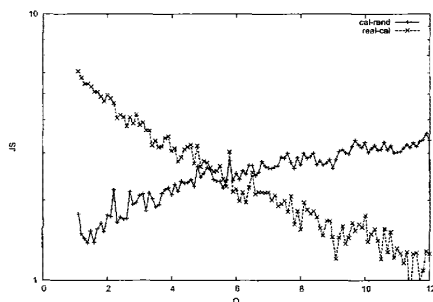


図 1: ランジュバンモデルにおける divergence.

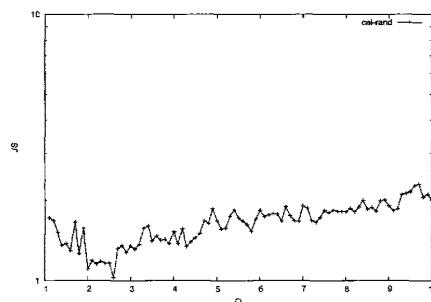


図 2: 実データにおける divergence.

謝辞

京都大学 GCOE プログラム「知識循環社会のための情報学教育研究拠点」に謝意を表する。

1 参考文献について

参考文献

- [1] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, "Noise Dressing of Financial Correlation Matrices", *Physical Review Letters*, **83** (1999) pp. 1467–1470
- [2] C. Beck, and E.G.D. Cohen, "Superstatistical generalization of the work fluctuation theorem", *Physica A*, **344** (2004) pp. 393–402
- [3] 青山 秀明, 家富 洋, 池田 裕一, 相馬 亘, 藤原 義久, "経済物理学" (共立出版, 東京, 2008)