

34. 臨界点近傍の衝撃波

基研 小 貫 明

§1 序 論

臨界点近くでは、熱力学的な異常性・輸送係数の異常性等のため様々な非線型な現象が考えられる。ここでは一例として衝撃波（もしくは kink 的な波動）を考えてみよう。具体例としては特に 3 次元超流動転移近くの ^4He の第 2 音波及び gas-liquid 転移点近くの第 1 音波を考える。その他の例としては spin 波や構造相転移近くの音波などに興味がある。

§2 第 2 音波

詳細は Supp. of Prog. Theor. Phys. 79 に報告しました。モデル方程式は次の TDGL 方程式を考える。無次元化してある。

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = ia^{-1}A\Phi - b_1[A - \nabla^2 + |\Phi|^2]\Phi, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}M = a\text{Im}[\Phi^*\nabla^2\Phi] + b_2\nabla^2A. \quad (2)$$

ここで Φ は複素オーダーパラメーターで A は温度変動 ($\cong T/T_c - 1$) を表わしている。 M はエントロピーで M と Φ と次のように関係がある。

$$A = M + \frac{1}{2}a^2|\Phi|^2. \quad (3)$$

a, b_1, b_2 は定数でありくりこみ群の計算で推定される量である。上式は様々な解をもつが、 $A = A_0 < 0, \Phi = \sqrt{-A_0}e^{iA_0 t/a}$ が超流動の平衡状態を表わしている。そして平衡からのわずかのずれは第 2 音波を表わしている。実際 $\Phi = \sqrt{-A_0}e^{i\theta}, A = A_0 + \delta A$ とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta \cong a^{-1}(A_0 + \delta A) + \dots \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta A \cong a|A_0|\nabla^2\theta + \dots \quad (5)$$

ここで減衰を表わす (1), (2) の第 2 項はすてている。(4), (5) より $\partial^2/\partial t^2 \delta A = |A_0|\nabla^2 \delta A$ である。

次に kink 解を考えよう。u を shock velocity として、

$$\phi = \phi(x - ut) e^{i\omega_0 t}, \quad A = A(x - ut). \quad (6)$$

境界条件は次の通りである。

$$A \rightarrow A_1, \quad \phi \rightarrow \sqrt{\eta_1} e^{iK_1 x} \quad \text{as } x \rightarrow -\infty \quad (7)$$

$$A \rightarrow A_2, \quad \phi \rightarrow \sqrt{\eta_2} e^{iK_2 x} \quad \text{as } x \rightarrow +\infty \quad (8)$$

ここで A_1 と A_2 は負の定数である。そして $\eta_1 = |A_1| - K_1^2$, $\eta_2 = |A_2| - K_2^2$ が成り立つ。次のことがわかる。

(i) エントロピー生成率は次のようになる。

$$\begin{aligned} R_{\text{dis}} &= \int dx \left[b_2 \left(\frac{d}{dx} A \right)^2 + (R_0 b_1) \left(A - \frac{d^2}{dx^2} + |\phi|^2 \right) \phi^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} u (\eta_1 - \eta_2) (K_1 - K_2)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$R_{\text{dis}} > 0$ であるから、 $u > 0$ なら必ず

$$\eta_1 - \eta_2 = \frac{1}{2} (A_2 - A_1) [1 - (K_1 + K_2)/au] > 0 \quad (10)$$

(ii) c_1 を $x \rightarrow -\infty$ での第 2 音波の速度、 c_2 を $x \rightarrow +\infty$ での第 2 音波の速度とする。するといわゆる Landau-Lifshitz による “subsonic-supersonic condition” は、 $c_1 < u < c_2$ となる。この条件下で shock は安定であると考え、((1) と (2) から出発した直接の安定性の議論はまだうまくいっていない。) 面白いことは (1), (2) を仮定する限り $u < c_2$ は常に成立するが、 $u > c_1$ は K_1 が大きくなるに従い破れる。しかも $u = c_1$ となった時、 u は K_1 について極大値をとる。 $u < c_1$ の時波面が急にくずれ不安定化するものと考え、これは Turner の観測 (Phys. Fluids 26 (1983) 3227) と対応していると予想している。

§ 3. 第 1 音波

Gas-liquid 転移点近くの実験としては Borisov et al, J. Fluid Mech. 126 (1983) 59 がある。多くの物質では臨界点近くでは、音速が狭い温度 (もしくは圧力・密度) 範囲で dip をもっている。第 1 図参照。この音速の異常性が大きな非線型性を生み出す。

方程式としては次のものを考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} = -\nabla P + \zeta \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (12)$$

ここで $\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}$ は運動量密度, ρ は密度, $\mathbf{V}$ は速度場, P は圧力, ζ は bulk viscosity である。今は簡単のため単位質量当りのエントロピーが一定とする。(11), (12) で P は $\rho - \rho_c$ の非線型な函数である。 $F \equiv (\rho - \rho_0)/\rho_0$ とする。 ρ_0 は平均密度。すると,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} F = \nabla^2 (P/\rho_0) + \bar{\zeta} \nabla^2 \frac{\partial}{\partial t} F \quad (13)$$

ここで(12)の第2項の $\zeta \nabla^2 \mathbf{V}$ は $(\zeta/\rho_0) \nabla^2 \mathbf{J}$ と近似した。そして $\bar{\zeta} = \zeta/\rho_0$ 。 P/ρ_0 は次のようになる。

$$P/\rho_0 = \text{const.} + c_0^2 (F + aF^2 + bF^3 + \dots) \quad (14)$$

ここで係数 $a, b, \dots$ は $T \rightarrow T_c$ で大きくなる。Gas-liquid 転移点近くでは, $s = s_c$ (臨界エントロピー) なら $a \sim (T - T_c)^{-1}$ である。

さて(13)の kink 解は次の式をとけばよい。

$$u \bar{\zeta} \frac{d}{dx} F = (c_0^2 - u^2) F + c_0^2 (aF^2 + bF^3) + \text{const.} \quad (15)$$

次に簡単のため速さが c_0 に近い wave packet を考えてみよう。 $x - c_0 t$ を新たに x とおいて,

$$-2c_0 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} F \cong c_0^2 \nabla^2 (aF^2 + bF^3 + \dots) - (\bar{\zeta} c_0) \nabla^2 \frac{\partial}{\partial x} F \quad (16)$$

ここで $\partial^2/\partial t^2 F$ は無視した。特に1次元的状况では, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2$ とおき, x で積分すると,

$$-2c_0 \frac{\partial}{\partial t} F \cong c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} (aF^2 + bF^3 + \dots) - (\bar{\zeta} c_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} F. \quad (17)$$

上式で $b = 0$ とおくと, Burgers 方程式がえられる。しかし $\rho_0 \cong \rho_c$ の時はむしろ, $a = 0$ とおくのが正しい。すると, 次のような “modified Burgers 方程式” がえられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} F + (3bc_0/2) F^2 \frac{\partial}{\partial x} F \cong \frac{1}{2} \bar{\zeta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F. \quad (18)$$

面白いことに(18)式での kink には完全なものではなく, “半 Kink” といったものがある。第2図参照。

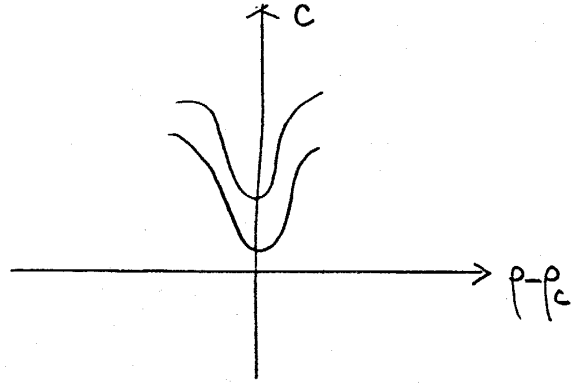


図1 臨界点近くの音速

$x \rightarrow +\infty$ で $\rho > \rho_c$, $x \rightarrow -\infty$ で $\rho < \rho_c$ の条件下で図 2 のような半 Kink が出現すると思われる。しかしこの場合には Landau-Lifshitz の supersonic condition が破れ, 安定性が問題となる。

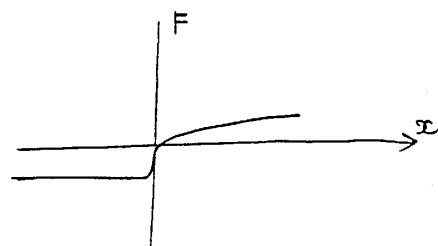


図 2 modified Burgers 方程式の半 Kink

§ 4. まとめ

固体物理では, 衝撃波による相変移現象が多いと文献にはある。また, いわゆる準安定状態や不安定状態が圧力の変化によって実現させうる。このような場合の非線型波動とはどのようなものであるか? そして, shock の波面の安定性を解析的に扱う系が臨界点近傍ならあるかもしれない。

35. Oscillator Lattice の協力現象

京大基研 篠本 滋

京大・理 坂口 英継, 蔵本 由紀

互いに異なる振動数をもった非線型自励振動子の集団の協力現象をしらべる。振動子同志が同じ強さで引力的 (振動子の位相 ϕ をそろえようとする) に相互作用している体系は, 相転移を経て巨視的な量の振動子が同一振動数におちこむ「凝縮」現象と, 位相の秩序: $\sigma = N^{-1} \sum_j e^{i\phi_j}$ の出現を同時にひきおこすことが蔵本により明らかにされている。¹⁾ 現実的にはこのような「分子場」的な相互作用を持つ体系の他に短距離相互作用をもつ有限次元系が考えられる。本研究では後者の研究の為に振動子を格子点上に配置し, 相互作用を最隣接とした体系を考え, その協力現象をシミュレーション, 近似解析等を用いて調べる。

安定なリミットサイクルを持つ自励振動子の運動は, それに加わる作用があまり強くない限り, その「位相」 ϕ の運動に縮約して議論できることが知られている。²⁾ 我々は上述の体系の運動を以下のようにモデル化する。格子点 i の振動子の位相 ϕ_i の発展を記述する方程式は

$$\frac{d}{dt} \phi_i = \omega_i - K \sum_{\langle j \rangle} \sin(\phi_i - \phi_j)$$

ここで右辺第一項は振動子の固有の振動数であり第二項は位相をそろえようとする相互作用を