

有限温度の画像修復

東京工業大学 大学院理工学研究科 物性物理学専攻 西森 秀稔

雑音で乱れた不完全な画像が与えられたとき原画像を推定する問題は、Bayes の公式を用いた定式化によりランダムスピン系の問題に帰着し、統計力学による解析を行うことができる。有限温度の画像修復が、MAP に比べてピクセルごとの修復率の最大化という基準において優れていることが分かる。

1 Bayes の公式による画像修復

雑音によって乱れた画像から雑音を取り除いて元の画像を推定したいとしよう。単純に考えると、どの部分が雑音でどの部分が乱されていない元の状態かを判断するのは非常に難しいように思われる。そこで、画像に関する私たちの一般的な知識（先験知識）を活用して、出来るだけもっともらしい推定を行うことになる。Bayes の公式が重要な足がかりになる。

1.1 劣化 2 値画像と Bayes 推定

原画像が白黒の 2 値で、Ising スピンの組 $\{\xi_i\}$ で表されるとしよう。 i はスピン系で言えば格子点、画像ではピクセルの番号である。画像が何らかの原因（雑音）で乱され、画像を受け取る側ではピクセル i の状態 τ_i は確率 p で元の状態 ξ_i と逆になっているとする。この確率は

$$P_{\text{out}}(\tau_i|\xi_i) = \frac{\exp(\beta_p \tau_i \xi_i)}{2 \cosh \beta_p} \quad (1)$$

と書ける。 β_p は p の関数である。

$$e^{2\beta_p} = \frac{p}{1-p} \quad (2)$$

各ピクセルごとに独立に雑音が作用するとすると、全体では

$$P_{\text{out}}(\{\tau\}|\{\xi\}) = \frac{1}{(2 \cosh \beta_p)^N} \exp(\beta_p \sum_i \tau_i \xi_i) \quad (3)$$

となる。 N はピクセル数である。

与えられた劣化画像から原画像を推定するために、Bayes の公式を使って、条件付き確率の $\{\tau_i\}$ と $\{\xi_i\}$ を逆にする。推定結果（修復画像）を原画像 $\{\xi_i\}$ と区別して $\{\sigma_i\}$ と書くことにすれば、求める事後確率は

$$P(\{\sigma\}|\{\tau\}) = \frac{\exp(\beta_p \sum_i \tau_i \sigma_i) P_s(\{\sigma\})}{\text{Tr}_\sigma \exp(\beta_p \sum_i \sigma_i \sigma_i) P_s(\{\sigma\})} \quad (4)$$

である。ここで、 $P_s(\{\sigma\})$ は原画像の生成確率（事前分布）である。

一般に、原画像がどうやって作られたかを表す $P_s(\{\sigma\})$ は画像の修復者には未知である。しかし (4) 式は、与えられた劣化画像 $\{\tau_i\}$ 以外にも $P_s(\{\sigma\})$ についての知識がないと画像修復が出来ないことを示している。そこで、 $P_s(\{\sigma\})$ そのものは正確には分からなくても、画像一般についての私たちの知識を表現するモデル事前分布 $P_m(\{\sigma\})$ を $P_s(\{\sigma\})$ の代わりに使うことになる。

2 値画像で、白の背景の中に孤立した黒のピクセルがあるとすると、それは元々の画像にあった黒の点であるというより、雑音によって白が乱されて生じた可能性が強い。そこで、隣り合うピクセル対は、違う状態であるよりも同じ状態になる確率のほうが高いと考えて、次のような確率分布を事前分布に対するモデルとして導入しよう。

$$P_m(\{\sigma\}) = \frac{\exp(\beta_m \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j)}{Z(\beta_m)}. \quad (5)$$

$\langle ij \rangle$ についての和は、隣接ピクセル間について取る。 $Z(\beta_m)$ は規格化因子であり、温度 $T_m = 1/\beta_m$ における強磁性的 Ising 模型の分配関数である。(5) 式は、画像は一般にあまり急激な変化に富んでないというわれわれの知識を表現している。 β_m はなめらかさを制御するパラメータである。 β_m が大きいほど、隣り同士の状態が同じである確率が高くなる。

1.2 MAP と有限温度修復

モデル事前分布 (5) を Bayes の公式に代入すると、事後分布が具体的に

$$P(\{\sigma\}|\{\tau\}) = \frac{\exp(\beta_p \sum_i \tau_i \sigma_i + \beta_m \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j)}{\text{Tr}_\sigma \exp(\beta_p \sum_i \sigma_i \sigma_i + \beta_m \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j)} \quad (6)$$

と求められる。これは、強磁性的相互作用を持つ Ising 模型にランダムな磁場がかかったスピン系の Boltzmann 因子である。こうして、画像修復の問題は、ランダム磁場 Ising 模型の統計力学に帰着された。

MAP(Maximum A posteriori probability - 最大事後確率) の考え方に従えば、(6) 式を最大化する $\{\sigma_i\}$ が修復画像になる。基底状態探索である。一方、ピクセルごとの誤りの確率を最小化するには有限温度での期待値を用いた $\text{sgn}\langle\sigma_i\rangle$ を採用すればよい。

現実世界の画像（自然画像）が劣化したものの修復を行うには、劣化画像 $\{\tau_i\}$ が与えられたとき事後分布 (6) に基づいて MAP や有限温度修復の手続きを実行する。さらに、通常は 2 値画像ではなく多値画像を扱うので Potts 模型などを用いる。

1.3 重なりのパラメータ

(6) 式に出てくる β_p は画像の乱れの強さを表すパラメータである。与えられた画像が原画像に比べてどのくらい乱れているのかは修復する者にはあらかじめ分からないから、 β_p を一般の変数 h で置き換えて以後の議論を展開する。さらに、具体的な理論計算を実行するために、原画像が強磁性的 Ising 模型の Boltzmann 因子にしたがって生成されている例について考察を進めること

にする.

$$P_s(\{\xi\}) = \frac{\exp(\beta_s \sum_{\langle ij \rangle} \xi_i \xi_j)}{Z(\beta_s)}. \quad (7)$$

β_s は原画像生成の温度 T_s の逆数である.

さて, これらの準備のもとで原画像 $\{\xi_i\}$ と修復画像 $\{\sigma_i\}$ の重なるの平均値を, 次のように定義する.

$$\begin{aligned} M(\beta_m, h) &= \text{Tr}_\xi \text{Tr}_\tau P_s(\{\xi\}) P_{\text{out}}(\{\tau\}|\{\xi\}) \xi_i \text{sgn}\langle \sigma_i \rangle \\ &= \frac{1}{(2 \cosh \beta_p)^N Z(\beta_s)} \text{Tr}_\xi \text{Tr}_\tau \exp(\beta_s \sum_{\langle ij \rangle} \xi_i \xi_j + \beta_p \sum_i \tau_i \xi_i) \xi_i \text{sgn}\langle \sigma_i \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで $\langle \sigma_i \rangle$ は, (6) 式で β_p を h で置き換えた Boltzmann 因子による平均である. M の β_m, h 依存性はすべて $\text{sgn}\langle \sigma_i \rangle$ の中にある. 重なるのパラメータ $M(\beta_m, h)$ は, β_m, h が正しい値 β_s, β_p のとき最大値を取る.

$$M(\beta_m, h) \leq M(\beta_s, \beta_p). \quad (9)$$

証明は参考文献を参照されたい.

不等式 (9) は, 確率分布 (7) で生成される人工的な原画像について導かれた. 自然画像でも, ピクセルごとの類似度 (重なり) の平均値を最大にするという意味での最適修復は, β_m や h が有限の値において達成されることが多いものと思われる.

なお, 画像の乱れが 2 値的 (ピクセル値の単純な反転) である場合 (3) をこれまで取り扱ってきたが, Gauss 的な乱れ

$$P_{\text{out}}(\{\tau\}|\{\xi\}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\tau)^N} \exp \left\{ - \sum_i \frac{(\tau_i - \tau_0 \xi_i)^2}{2\tau^2} \right\} \quad (10)$$

でも同様の議論が展開できる. 最適修復条件を表す不等式は, (9) 式に対応して次の形になる.

$$M(\beta_m, h) \leq M\left(\beta_s, \frac{\tau_0}{\tau^2}\right). \quad (11)$$

2 無限レンジ模型

不等式 (9) で重なりが最大になる β_m と h の値 (β_s および β_p) は修復者には分からないから, 何らかの方法で推定しなければならない. そして, 最適条件 $\beta_m = \beta_s, h = \beta_p$ をできるだけ正確に実現して, ピクセルごとの誤りの平均値を小さくし, 重なり M を大きくしたい. そこで, $M(\beta_m, h)$ が $\beta_m = \beta_s, h = \beta_p$ 付近でどのようなふるまいをするかが問題になる. 無限レンジ模型が, この点を解明するためのひとつのプロトタイプになる. 無限レンジ模型で重なり $M(\beta_m, h)$ を計算してみよう.

2.1 レプリカ計算

次のような事前分布（実際の事前分布とモデル事前分布）を持つ無限レンジ模型を考察する。

$$P_s(\{\xi\}) = \frac{\exp\left(\frac{\beta_s}{2N} \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j\right)}{Z(\beta_s)}, \quad P_m(\{\sigma\}) = \frac{\exp\left(\frac{\beta_m}{2N} \sum_{i \neq j} \sigma_i \sigma_j\right)}{Z(\beta_m)} \quad (12)$$

すべてのピクセルが互いに隣接点になっている人為的な模型であるから、具体的に与えられた個々の2次元画像の修復作業には直接役立たない。しかし、重なり M のような系全体を記述するマクロな変数の性質を定性的に理解する目的には有用である。

画像の乱れが Gauss 分布 (10) のとき、レプリカ法で重なり $M(\beta_m, h)$ が求められる。そのために、まず分配関数の n 乗の配位平均を求める。

$$\begin{aligned} [Z^n] &= \int \prod_i d\tau_i \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^N} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2} \sum_i (\tau_i^2 + \tau_0^2)\right) \\ &\quad \cdot \text{Tr}_\xi \frac{\exp\left(\frac{\beta_s}{2N} \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j + \frac{\tau_0}{\tau^2} \sum_i \tau_i \xi_i\right)}{Z(\beta_s)} \\ &\quad \cdot \text{Tr}_\sigma \exp\left(\frac{\beta_m}{2N} \sum_{i \neq j} \sum_\alpha \sigma_i^\alpha \sigma_j^\alpha + h \sum_i \sum_\alpha \tau_i \sigma_i^\alpha\right) \\ &\propto \frac{1}{Z(\beta_s)} \int dm_0 \int \prod_\alpha dm_\alpha \exp N \left\{ -\frac{\beta_s m_0^2}{2} - \frac{\beta_m}{2} \sum_\alpha m_\alpha^2 \right. \\ &\quad \left. + \log \text{Tr} \int Du \exp(\beta_s m_0 \xi + \beta_m \sum_\alpha m_\alpha \sigma^\alpha + \tau_0 h \xi \sum_\alpha \sigma^\alpha + h \tau u \sum_\alpha \sigma^\alpha) \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

Tr は σ^α, ξ についての和を表す。 $[Z^n] = \exp(-\beta_m n N f)$ とおき、レプリカ対称性を仮定して鞍点法により $-\beta_m n f$ を n の1次まで求めると、

$$\begin{aligned} -\beta_m n f &= -\frac{1}{2} \beta_s m_0^2 + \log 2 \cosh \beta_s m_0 - \frac{1}{2} n \beta_m m^2 \\ &\quad + n \frac{\text{Tr}_\xi \int Du e^{\beta_s m_0 \xi} \log 2 \cosh(\beta_m m + \tau_0 h \xi + \tau h u)}{2 \cosh \beta_s m_0}. \quad (14) \end{aligned}$$

Tr_ξ は $\xi = \pm 1$ の和を表す。

n の各オーダーで変分を取ることににより、秩序パラメータの満たすべき状態方程式が出る。まず、 n に依存しない項から

$$m_0 = \tanh \beta_s m_0. \quad (15)$$

これは、原画像での強磁性的秩序パラメータ $[\xi_i]$ である。原画像の性質が劣化画像や修復画像から影響を受けることはないから、 m_0 がそれ自体で閉じた方程式を満たしているのは自然なことである。

次に、 n の1次項より

$$m = \frac{\text{Tr}_\xi \int Du e^{\beta_s m_0 \xi} \tanh(\beta_m m + \tau_0 h \xi + \tau h u)}{2 \cosh \beta_s m_0} \quad (16)$$

が得られる．修復画像の強磁性的秩序パラメータ $[\langle \sigma_i \rangle]$ である．重なりのパラメータ M は，(16) の $\tanh(\cdot)$ を $\xi \text{sgn}(\cdot)$ で置き換えて得られる．

$$M = \frac{\text{Tr}_\xi \int Du e^{\beta_s m_0 \xi} \xi \text{sgn}(\beta_m m + \tau_0 h \xi + \tau h u)}{2 \cosh \beta_s m_0} \quad (17)$$

原画像の情報 (15) を使って修復画像の秩序パラメータ (16) を求め，これらの関数として重なりのパラメータ (17) が決まるのである．

2.2 重なりの温度依存性

前節で求めた m_0, m, M の式 (15), (16), (17) を数値的に解いて， M の温度依存性を調べよう． β_m と h の比を (11) 式から決まる最適値 $\beta_s/(\tau_0/\tau^2)$ に固定して β_m と h を変化させて， M を $T_m = 1/\beta_m$ の関数として描いたのが図 1 である． $T_s = 0.9, \tau_0 = \tau = 1$ とした．当然ながら最適

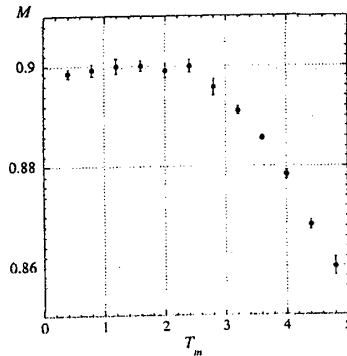


図 1: 修復温度の関数としての重なりのパラメータ (太線)

のパラメータ $T_m = 0.9 (= T_s)$ で最大になっている．MAP は $T_m \rightarrow 0$ に相当し，重なりは最適値より小さい．したがって，重なり M を最大にするような画像修復を行う際，温度を絶対零度まで下げるとかえって良くない結果になる．

3 シミュレーション

無限レンジ模型の結果は 2 次元の画像修復の問題における重なり M の性質を定性的には記述するものと思われるが，定量的な議論は困難である．そこで，2 次元画像につきシミュレーションを行い，無限レンジ模型との比較検討を行う．

図 2 は 400×400 ピクセルの 2 値画像を Ising 模型の事前分布 (12) ($T_s = 2.15$) で生成させてから $p = 0.1$ の確率で 2 値の乱れを入れ，有限温度修復を行ったときの重なり M である．不等式 (9) によれば，修復温度 T_m がもとの生成温度 $T_s = 2.15$ の時に M は最大値を取る．統計的誤差の範囲内で確かにそうになっている．なお， h は， β_m と h の比が最適値 β_s/β_p になるように β_m とともに変化させている．

無限レンジ模型の場合の図 1 と比べて，最適のパラメータから T_m が下にずれたとき， M の変化 (低下) が少ない．ただし，この傾向は T_s や p などの値の影響を受けるだろうから，どのくら

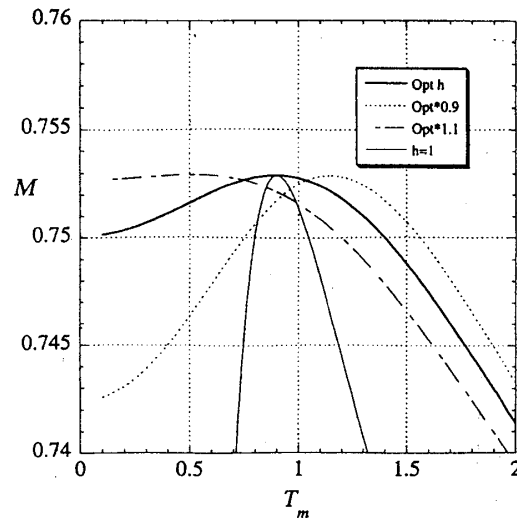


図 2: 修復温度の関数としての重なるパラメータ (2 次元系)

い一般的かは必ずしも明らかでない。

実際の画像を見てみよう。図 3 は図 2 の状況に対応している。(a) は原画像 ($T_s = 2.15$), (b) は劣化画像 ($p = 0.1$), (c) は低温での修復画像 ($T_m = 0.5$), (d) は最適パラメータでの修復画像である ($T_m = 2.15$)。明らかに, (c) より (d) が原画像を忠実に再現している。MAP は $T_m = 0$ であり, 細かな構造が (c) よりさらに抑制されているものと思われる。なお (e) は, 劣化画像だけでなく隣接ピクセル対の相対的な状態についての付加情報がある時の修復画像である。こうして, 少なくとも強磁性的な Ising 模型の事前分布 (12) に関する限り, 2 次元画像でも有限温度修復が MAP より見た目にもよい結果を与えることが示された。

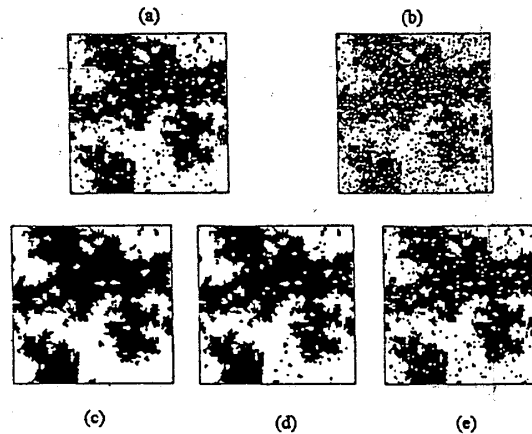


図 3: 2 次元 Ising 模型で生成されるパターンの修復

4 Gauss 模型による画像修復

4.1 Gauss 模型

Ising 模型の代わりに連続 (アナログ) 変数を用いた Gauss 模型を使うと様々な量が厳密に計算できる。線形ウィーナーフィルタとして知られている方法と同等な結果になる。Gauss 模型は

次のように定義される。温度は Hamiltonian にすでに含まれているする。

$$H = \beta \sum_{\langle ij \rangle} (S_i - S_j)^2 + h \sum_j S_j \quad (18)$$

S_i は連続実数変数である。 $\beta, h > 0$ とする。右辺第 1 項の和は d 次元最近接格子点であるが、並進対称な範囲であれば拡張は容易である。

この Hamiltonian の Fourier 表示は

$$H = \frac{1}{L^d} \sum_k (\beta G_k + h) S_k S_{-k} \quad (19)$$

である。 G_k は格子グリーン関数である。 S_k を実部と虚部に分けて $S_k = S_k^{(1)} + i S_k^{(2)}$ と書くことにし、 k の和を k と $-k$ についての和の $1/2$ で置き換えれば

$$H = \frac{1}{L^d} \sum_k (\beta G_k + h) \frac{1}{2} (S_k S_{-k} + S_{-k} S_k) = \frac{1}{L^d} \sum_k (\beta G_k + h) \{ (S_k^{(1)})^2 + (S_k^{(2)})^2 \} \quad (20)$$

となる。ここで S_k と S_{-k} が複素共役であることを使った。 (20) は、実部と虚部が独立な変数として振る舞うことを示している。

4.2 劣化過程

さて、Gauss 雑音による劣化過程は次のように表される。

$$\begin{aligned} P_{out}(\{\tau_i\}|\{\xi_i\}) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2} \sum_i (\tau_i - \xi_i)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2 L^d} \sum_k (\tau_k - \xi_k)(\tau_{-k} - \xi_{-k}) \right\} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\tau})^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2\tau^2 L^d} \sum_k (\tau_k^{(1)} - \xi_k^{(1)})^2 - \frac{1}{2\tau^2 L^d} \sum_k (\tau_k^{(2)} - \xi_k^{(2)})^2 \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

最後の表式は前節と同様にして実部と虚部に分けることにより得られる。

4.3 修復

Gauss 模型を使った画像修復を定式化しよう。Bayes の公式により

$$P(\sigma|\tau) = \frac{P_{out}(\tau|\sigma)P(\sigma)}{\int d\sigma P_{out}(\tau|\sigma)P(\sigma)} \quad (22)$$

であり、この確率分布による期待値 $\langle \sigma_i \rangle$ を修復結果とすることにしよう。したがって $\langle \sigma_i \rangle$ を求めるための有効 Hamiltonian は

$$H_m = \frac{1}{L^d} \sum_k (\beta_m G_k + h_m) (\sigma_k^{(1)})^2 + \frac{1}{2\tau_m^2 L^d} \sum_k (\tau_k^{(1)} - \sigma_k^{(1)})^2 + (1 \rightarrow 2) \quad (23)$$

である。ここで β_m, h_m, τ_m はそれぞれ β, h, τ の推定値である。

修復結果を具体的に計算する.

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{L^d} \sum_k \langle \sigma_k^{(1)} + i\sigma_k^{(2)} \rangle e^{ikj} \quad (24)$$

であるから, Fourier 成分の期待値が分かればよい.

$$\langle \sigma_k^{(1)} \rangle = \frac{\int \prod_k d\sigma_k \sigma_k^{(1)} e^{-H_m}}{\int \prod_k d\sigma_k e^{-H_m}} \quad (25)$$

であり, H_m も各 Fourier 成分に分かれるから, ひとつの k のみに着目して積分を実行すれば十分である. また, 実部 (上付き (1) の変数) のみ考えればよい. 虚部は分子分母でうち消す. 上式分母で k の部分のみの寄与を Z_k とすれば

$$\begin{aligned} \langle \sigma_k^{(1)} \rangle &= \frac{1}{Z_k} \int d\sigma_k^{(1)} \sigma_k^{(1)} \exp \left\{ -\frac{1}{L^d} (\beta_m G_k + h_m + (2\tau_m^2)^{-1}) (\sigma_k^{(1)})^2 + \frac{1}{\tau_m^2 L^d} \sigma_k^{(1)} \tau_k^{(1)} + (\tau_k^{(1)} \text{の項}) \right\} \\ &= \frac{1}{Z_k} \int d\sigma_k^{(1)} \sigma_k^{(1)} \exp \left\{ -\frac{1}{L^d} A_k (\sigma_k^{(1)} - \frac{B\tau_k^{(1)}}{A_k}) + (\tau_k^{(1)} \text{の項}) \right\} = \frac{B\tau_k^{(1)}}{A_k} \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる. ここで

$$A_k = \beta_m G_k + h_m + (2\tau_m^2)^{-1}, \quad B = \frac{1}{2\tau_m^2} \quad (27)$$

でありまた, 最後の行を導く際には分子分母で $\tau_k^{(1)}$ の項が打ち消し合うことを使った. 全く同様の式が虚部についても成立する. それゆえ

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j \rangle &= \frac{B}{L^d} \sum_k \frac{1}{A_k} (\tau_k^{(1)} + i\tau_k^{(2)}) e^{ikj} = \frac{1}{L^d} \sum_k \frac{B\tau_k}{A_k} e^{ikj} = \frac{1}{2L^d \tau_m^2} \sum_k \frac{\sum_l \tau_l e^{-ikl + ikj}}{\beta_m G_k + h_m + (2\tau_m^2)^{-1}} \\ &= \frac{1}{2L^d \tau_m^2} \sum_l \tau_l \sum_k \frac{\cos(j-l)}{\beta_m G_k + h_m + (2\tau_m^2)^{-1}} \end{aligned} \quad (28)$$

虚部は修復結果では 0 になるはずだから無視した. 上式は, 劣化画像 $\{\tau_i\}$ の線形変換で修復画像が直ちに計算できることを示している.

この式の $\sum_k$ 以後は, $j-l$ の関数として指数関数的に減衰する. そこで l についての和を j の回りの数個のピクセルに限定すると上式は線形のウィナーフィルターと等価になる. 他の線形フィルターや非線形フィルターについても, 対応する確率模型が存在するかもしれない.

参考文献

- [1] H. Nishimori and K.Y.M. Wong, Phys. Rev. E **60** (1999), 132.
- [2] 西森 秀稔, 「スピングラス理論と知識情報処理」(新物理学選書, 岩波書店)(出版予定).