

# Riemann 多様体における 弾性曲線の波動型運動方程式

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所, 大阪大学名誉教授 小磯憲史

Norihito Koiso

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Professor emeritus, Osaka University

要約. ピアノ線を手本とする曲線を弾性曲線という. その運動方程式は理想化の取り方によっていくつか考えられる. この講演では Caffish & Maddocks [1] が導入した太さのある弾性曲線の波動型運動方程式を紹介し, それを Riemann 多様体上に一般化する手法を解説する. 詳しい証明は [4] を参照していただきたい.

## 1. Euler の弾性曲線

弧長表示の曲線  $\gamma = \gamma(x)$  に 弾性エネルギー  $U(\gamma) := \|\nabla_x \gamma_x\|^2 := \int |\nabla_x \gamma_x|^2 dx$  を与える. 弾性エネルギーが定める Euler-Lagrange 方程式の解を **Euler の弾性曲線** という.

$$-\nabla_x^3 \gamma_x + R(\gamma_x, \nabla_x \gamma_x) \gamma_x = \nabla_x(\mu \gamma_x) \quad (\mu = \mu(x) \text{ は未定関数})$$

Euclid 空間  $\mathbf{R}^n$  の Euler の弾性曲線は  $\mathbf{R}^3$  に含まれ, 平面閉弾性曲線は円と  $\infty$  型の 2 種のみ (たぶん Euler) で, 空間閉弾性曲線は  $\mathbf{Q} \cap [0, 1/2]$  と  $1:1$  に対応する. (Langer & Singer [5])

## 2. 弾性曲線の運動方程式

この材質の曲線の運動を考える. それは Euler の弾性曲線が動くという意味ではなく, 弾性エネルギーが支配する曲線の運動方程式を考えるという意味である.

運動方程式は **Hamilton の原理** によって与えられる. 即ち, 運動方程式は汎関数

$$\int_0^T F(\gamma) - U(\gamma) dt \quad (\gamma = \gamma(x, t))$$

の Euler-Lagrange 方程式である. ここで,

$$\begin{aligned} U(\gamma) &= \text{状態エネルギー} = \text{弾性エネルギー} \|\nabla_x \gamma_x\|^2, \\ F(\gamma) &= \text{運動エネルギー} \|\gamma_t\|^2 + \|\nabla_t \gamma_x\|^2 \end{aligned}$$

と定める. この  $\|\nabla_t \gamma_x\|^2$  は曲線の太さに起因するもので, Caffish & Maddocks が導入した.

主定理. この運動方程式は解ける.

まず, **Euler-Lagrange** 方程式を求めておく. 第 1 変分公式 は次の通り.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \int_0^T F(\gamma) - U(\gamma) dt &= \int_0^T \langle \gamma_t, \nabla_s \gamma_t \rangle + \langle \nabla_t \gamma_x, \nabla_s \nabla_t \gamma_x \rangle - \langle \nabla_x \gamma_x, \nabla_s \nabla_x \gamma_x \rangle dt \\ &= \int_0^T \langle -\nabla_t \gamma_t + \nabla_x \nabla_t^2 \gamma_x - \nabla_x^3 \gamma_x + \Psi, \gamma_s \rangle dt, \\ \Psi &:= R(\gamma_x, \nabla_x \gamma_x) \gamma_x - R(\gamma_x, \nabla_t \gamma_x) \gamma_t. \end{aligned}$$

Euler-Lagrange 方程式は “弧長表示を保つ変分ベクトル場  $\gamma_s$  に対して第 1 変分 = 0” という条件であり, それは次のように言い換えていくことができる.

$$\iff “(\gamma_x, \nabla_x \gamma_s) = 0 \Rightarrow \text{第 1 変分} = 0”$$

$$\iff “\langle \nabla u \gamma_x, \nabla_x \gamma_s \rangle = 0 \Rightarrow \text{第 1 変分} = 0”$$

$$\iff “\gamma_s \perp \nabla_x (\nabla u \gamma_x) \Rightarrow \gamma_s \perp (-\nabla_t \gamma_t + \nabla_x \nabla_t^2 \gamma_x - \nabla_x^3 \gamma_x + \Psi)” \quad (\perp \text{ は } \int_0^T \langle *, * \rangle dt \text{ に関して})$$

$$\iff (-\nabla_t \gamma_t + \nabla_x \nabla_t^2 \gamma_x - \nabla_x^3 \gamma_x + \Psi) \in \{\nabla_x(u \gamma_x) \mid \forall u\}$$

$$\iff -\nabla_t \gamma_t + \nabla_x \nabla_t^2 \gamma_x - \nabla_x^3 \gamma_x + \Psi = \nabla_x(\mu \gamma_x) \quad (\exists \mu(x, t))$$

この最後の方程式を以下 方程式 (EL) と呼ぶ. これを解くことが目標である.

$$(EL) \quad -\nabla_t \gamma_t + \nabla_x \nabla_t^2 \gamma_x - \nabla_x^3 \gamma_x + \Psi = \nabla_x(\mu \gamma_x)$$

### 3. 定理と証明の骨格

ここでは主定理の証明の流れを説明する. まず, 次のことは直接計算で確かめられる.

**命題 (方程式の分解).** 方程式 (EL) の解  $\gamma$  に対して  $\xi := \gamma_x, \eta := \gamma_t, \theta := \nabla_t^2 \xi - \nabla_x^2 \xi - (\mu + 1)\xi$  とおけば, 次の結合系が満たされる.

$$(CS_0) \quad \begin{cases} (E_\theta) & -\nabla_x^2 \theta + \theta^\perp = \nabla_x \Psi + \Phi, \\ (W_\xi) & (\nabla_t^2 \xi - \nabla_x^2 \xi)^\perp = \theta^\perp, \quad |\xi|^2 = 1, \\ (I_\eta) & \nabla_t \eta = \nabla_x \theta + \Psi + \nabla_x \xi, \\ (I_\gamma) & \gamma_t = \eta. \end{cases}$$

ここで,  $\Psi = R(\xi, \nabla_x \xi) \xi - R(\xi, \nabla_t \xi) \eta, \Phi = (|\nabla_t \xi|^2 - |\nabla_x \xi|^2) \xi - R(\xi, \eta) \eta, *^\perp := * - g(*, \xi) \xi$ . 逆に, この結合系の解の  $\gamma$  は, 十分微分可能であれば, 方程式 (EL) の解である. ■

これらの方程式を微分可能性が低い仮定の下で解くために 作用素  $D_x, D_t$  を導入する. 初期曲線の管状近傍上の正規直交枠  $\{e_i\}$  を用意する. そして, それを用いて  $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_i^k{}^j e_k, \xi = \xi^i e_i, \eta = \eta^i e_i$  と表示したとき,

$$D_x(p^i e_i) := p_x^i e_i + \Gamma_i^k{}^j \xi^i p^j e_k, \quad D_t(p^i e_i) := p_t^i e_i + \Gamma_i^k{}^j \eta^i p^j e_k$$

によって作用素  $D_x, D_t$  を定める.

さらに,  $(CS_0)$  の  $\nabla_x, \nabla_t$  を  $D_x, D_t$  で置き換えた 結合系 (CS) を考え, 実際にはそれを解くことにする. (CS) が完全に解けた後で, その解について  $D_x = \nabla_x, D_t = \nabla_t$  が示され, 従って  $(CS_0)$  が解けたことになる.

**定理 (短時間解の存在).** 曲線  $\gamma_0 \in C^0(x)$  上に結合系 (CS) の初期値  $\eta_0 \in C^0(x)$ ,  $\xi_0 \in C^1(x)$ ,  $\xi_1 \in C^0(x)$  が与えられ, 線素保存条件:  $|\xi_0|^2 = 1$ ,  $g(\xi_0, \xi_1) = 0$  と非測地条件:  $\|D_x \xi_0\| \neq 0$  を満たされれば, 一意な短時間解  $\gamma, \eta \in C_x^0 \cap C_t^1$ ,  $\xi \in C^1$ ,  $\theta \in C_x^1 \cap C_t^0$  が存在する. ■

この定理は微分可能性が低い状況で証明しなければならないので, 細かい注意を払って評価しなければならない. また, 方程式  $(E_\theta)$  の評価には, 4 節で定義する曲がり量を必要とする. 証明の方針は通常のもので, 縮小写像の原理に持ち込む. 詳しくは 5 節で説明する. この定理の解は微分可能性が低いので, まだ  $(CS_0)$  の解にはならない. 次の定理によって初めて  $(CS_0)$  の解になる.

**定理 (解の正則性).** 結合系 (CS) の短時間解の初期値が  $\gamma_0 \in C^3(x)$ ,  $\eta_0 \in C^2(x)$  で整合条件:  $\xi_0 = \gamma'_0$ ,  $\nabla_t \xi(x, 0) = \nabla_x \eta_0$  を満たせば, その解は  $\gamma_x \equiv \xi$ ,  $\gamma \in C^3$  を満たし, 結合系  $(CS_0)$  の解になる. さらに,  $\gamma$  は方程式 (EL) の解になる. ■

以上で短時間解の存在が示された. 長時間存在はそれを繋ぐことで構成できる. その際, Hamilton の原理の一般論から全エネルギー  $F(\gamma) + U(\gamma)$  が保存量であることが効いてくる.

**定理 (長時間解の存在).**  $(M, g)$  が完備なら, 上の  $C^3$  短時間解  $\gamma$  は測地線に近づかない限り無限時間解に延長される. また, 初期値が  $C^\infty$  なら解も  $C^\infty$  である. ■

#### 4. 曲がり量

方程式  $(E_\theta)$  の評価のために曲線の 曲がり量  $B(\gamma, \xi)$  を導入する. それは長さ  $L$  のとき

$$B(\gamma, \xi)^2 := \inf_{\phi} (L \|D_x \phi\|^2 + L^{-1} \|\phi - \xi\|^2), \quad B(\gamma) := B(\gamma, \gamma')$$

で定められる.

1. 曲がり量の最も基本的な性質は測地線の特徴付けることである. 即ち,

$$B(\gamma, \xi) = 0 \iff D_x \xi = 0, \quad B(\gamma) = 0 \iff \gamma \text{ は測地線.}$$

2. 方程式  $(E_\theta)$  には次の評価式を適用する:  $\theta$  の方程式  $-D_x(D_x \theta + f) + \theta^\perp = h$  は一意な解を持ち,  $\|D_x \xi\|^2$  のみに依存する  $C$  を用いて  $\sup|\theta|, \sup|D_x \theta| \leq CB^{-4}(\|f\| + \|h\|)$  が成り立つ.

3. 測地線の特徴付ける量としては  $\|D_x \xi\|^2$  の方が簡明だが, それは  $\xi$  の  $H^1$ -位相に依存してしまい, 微分可能性の低い仮定では使えない. それに対して  $B(\gamma, \xi)$  は  $\gamma, \xi$  の  $L_2$  位相に関して連続である. 従って, 初期値が  $B(\gamma_0, \xi_0) > 0$  を満たせばその  $C^0 \times C^0$  近傍でも  $B(\gamma, \xi) > 0$ .

以上が証明に用いる基本的な性質である. 証明には直接用いないが面白そうな性質を補足しておく.

4.  $B(\gamma, \xi) \leq 1$ . 下限  $B(\gamma, \xi)$  は  $-L^2 D_x^2 \phi + \phi = \xi$  なる  $\phi$  で実現され,  $B(\gamma, \xi) = 1 - L^{-1} \langle \xi, \phi \rangle$ .

5. 平面上の単位円  $c$  で  $B(c)^2 = 4\pi^2/(1 + 4\pi^2) \doteq 0.975$ . 正  $n$  角形  $p_n$  で  $B(p_n)^2 = 2n \sin^2(\pi/n) \sinh(1/n)/(\cosh(1/n) - \cos(2\pi/n)) \rightarrow B(c)^2$ .  $B(p_2)^2 \doteq 0.980$ .

6. Euclid 空間において平面内の円が  $B(\gamma)$  の最小値を与えると予想される.  $B$  は多角形近似可能なので,  $n$  角形の中では正  $n$  角形が最小であることを示せばこの予想が証明できるが, まだできていない.

## 5. 短時間解存在の証明 – 縮小写像の原理

最後に短時間解の存在の証明を簡単に説明する.

まず,  $(I_\gamma)$  を除き,  $\xi, \eta, \theta$  は  $\gamma$  に沿ったベクトル場で, 正規直交枠  $\{e_i\}$  で表示する.  $M_0, M_1, M_{0,1}, M_{1,0}$  をそれぞれ  $C^0, C^1, C_x^0 \cap C_t^1, C_x^1 \cap C_t^0$  の  $S^1 \times [0, T]$  上の sup ノルムとする. 記号  $\{\gamma, \xi, \eta, \theta\} \Rightarrow \{\tilde{\gamma}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\theta}\}$  によって,  $\{\gamma, \xi, \eta, \theta\}$  を与えて各方程式の解  $\{\tilde{\gamma}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\theta}\}$  を求める操作を表す.

$\{\gamma_i, \eta_i, \xi_i, \theta_i\} \Rightarrow \{\tilde{\gamma}_i, \tilde{\eta}_i, \tilde{\xi}_i, \tilde{\theta}_i\}$  ( $i = 1, 2$ ) とし, 関数の差を  $\delta * := *_2 - *_1$  で表す. そのとき,  $M_{0,1}(\delta\gamma), M_1(\delta\xi), M_{0,1}(\delta\eta), M_{1,0}(\delta\theta) \leq r$  ならば, 次の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} M_{0,1}(\delta\tilde{\gamma}), M_1(\delta\tilde{\xi}) &\leq CTr, \\ M_0(\delta\tilde{\eta}) &\leq CTr, \quad M_0(\delta\tilde{\eta}_t) \leq Cr, \\ M_{1,0}(\delta\tilde{\theta}) &\leq Cr \quad (M_0(\delta\tilde{\eta}_t) \text{ には依存しない}). \end{aligned}$$

ここで, ほとんどの  $C$  は初期値と  $M_{0,1}(\gamma), M_1(\xi), M_{0,1}(\eta), M_{1,0}(\theta)$  のみに依存する定数であるが,  $M_{1,0}(\delta\tilde{\theta})$  の  $C$  だけは 曲がり量  $B(\gamma, \xi)^{-1}$  にも依存する.

任意に初期条件を満たす関数の組  $\{\gamma, \xi, \eta\}$  をとり,  $\{\gamma, \xi, \eta\} \Rightarrow \{\theta\}, \{\gamma, \xi, \eta, \theta\} \Rightarrow \{\tilde{\gamma}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}\}$  で写像  $\Lambda(\gamma, \xi, \eta) := (\tilde{\gamma}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  を定める. 更に,  $\{\tilde{\gamma}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}\} \Rightarrow \{\tilde{\theta}\}, \{\tilde{\gamma}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}\} \Rightarrow \{\tilde{\eta}\}$  で写像  $\tilde{\Lambda}(\gamma, \xi, \eta) := (\tilde{\gamma}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  を定める. すると, 上の評価から

$$M_{0,1}(\delta\tilde{\gamma}) + M_1(\delta\tilde{\xi}) + M_{0,1}(\delta\tilde{\eta}) \leq CT\{M_1(\delta\xi) + M_{0,1}(\delta\eta) + M_{0,1}(\delta\gamma)\}$$

がなりたつ. 即ち,  $T < C^{-1}$  のとき  $\tilde{\Lambda}$  は縮小写像であり一意な固定点を持つ. この固定点は  $\Lambda$  の固定点でもあることが示され, 結合系 (CS) の解であることがわかる.  $\square$

## 参考文献

- [1] R. E. Caflisch and J. H. Maddocks: *Nonlinear dynamical theory of the elastica*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 99** (1984), 1-23.
- [2] N. Koiso and M. Sugimoto: *Motion of elastic wire with thickness*, Osaka J. Math. **47** (2010), 787-815.
- [3] N. Koiso: *On motion of an elastic wire in a Riemannian manifold and singular perturbation*, Osaka J. Math. **52** (2015), 453-473.
- [4] N. Koiso: *Motion of an elastic wire with thickness in a Riemannian manifold*, arXiv:1809.08015.
- [5] J. Langer and D. A. Singer: *Curve-straightening in Riemannian manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **5** (1987), 133-150.