

場の理論における複合粒子

西島 和彦

1. 直観的漸近条件と S 行列

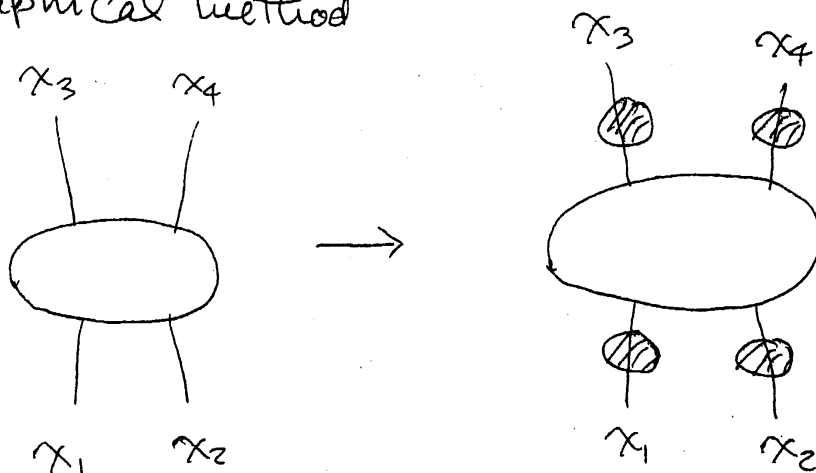
LSZ により漸近条件がまだ定式化されていなかった。

Gell-Mann と Low の Heisenberg 表示と相互作用表示との関係を導出した ϕ は Heisenberg operator である。

直観的漸近条件:

$$\begin{aligned} & \langle \phi_d^{\text{out}}(x_4) \phi_c^{\text{out}}(x_3) \phi_b^{\text{in}}(x_2) \phi_a^{\text{in}}(x_1) \rangle \\ &= \sum_{p_1 \dots p_4} \langle 0 | \phi_d(x_4) | p_4 \rangle \langle 0 | \phi_c(x_3) | p_3 \rangle \\ & \quad \times \langle p_3, p_4 | S | p_1, p_2 \rangle \\ & \quad \times \langle p_2 | \phi_b(x_2) | 0 \rangle \langle p_1 | \phi_a(x_1) | 0 \rangle \end{aligned}$$

graphical method



$$\langle \phi_c(x) \phi_c^\dagger(x') \rangle \rightarrow \langle \phi_c^{\text{out}}(x) \phi_c^\dagger(x') \rangle$$

$$= \sum_P \langle 0 | \phi_c(x) | P \rangle \langle P | \phi_c^\dagger(x') | 0 \rangle$$

$|P\rangle$ は - 粒子状態

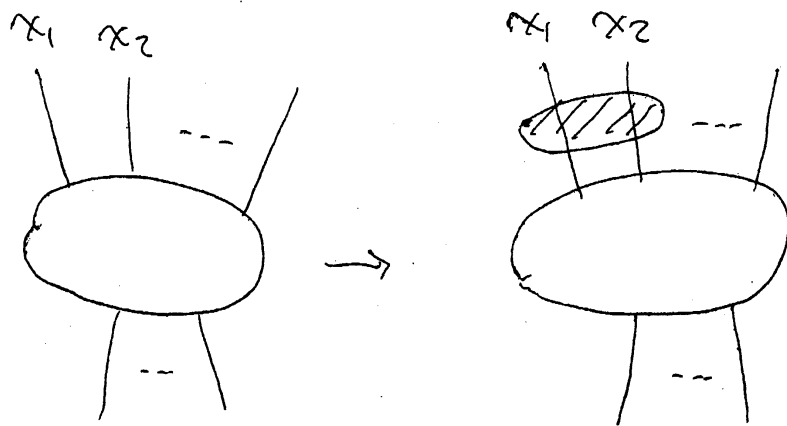
相互作用表示における reduction formula

$$(\not{\partial}_x + M) T[\psi(x) AB \dots Z] = -i \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}(x)} T[AB \dots Z]$$

$$(\square_x - \mu^2) T[\phi(x) AB \dots Z] = i \frac{\delta}{\delta \phi(x)} T[AB \dots Z]$$

Dyson の S 行列の式, Gell-Mann-Low の関係式
と組み合わせると LSZ の reduction formula が得られる。

複合粒子を含む S 行列



$$\langle (\phi_a(x_1) \phi_b(x_2))^{\text{out}} \phi_a^\dagger(x'_1) \phi_b^\dagger(x'_2) \rangle$$

$$= \sum_P \langle 0 | T[\phi_a(x_1) \phi_b(x_2)] | P \rangle \langle P | T[\phi_a^\dagger(x'_1) \phi_b^\dagger(x'_2)] | 0 \rangle$$

$|P\rangle$: 複合粒子状態

$$\begin{aligned}
& \langle (\phi_a(x_1) \phi_b(x_2))^{\text{out}} \dots \rangle \\
&= \sum_P \langle 0 | T[\phi_a(x_1) \phi_b(x_2)] | P \rangle \dots \\
&\quad \times \langle P, \dots | S | \dots \rangle \\
&\quad \times \dots
\end{aligned}$$

2. 規格化

Conserved current の行列要素を計算する.

$$\begin{aligned}
& \langle (\phi_a(x_1) \phi_b(x_2))^{\text{out}} j_\mu(x) (\phi_a^\dagger(x'_1) \phi_b^\dagger(x'_2))^{\text{in}} \rangle \\
&= \sum_{P, P'} \langle 0 | T[\phi_a(x_1) \phi_b(x_2)] | P \rangle \langle P | j_\mu(x) | P' \rangle \\
&\quad \times \langle P' | T[\phi_a^\dagger(x'_1) \phi_b^\dagger(x'_2)] | 0 \rangle
\end{aligned}$$

j_μ : conserved current e.g. charge current

for $\vec{P} = \vec{P}' = 0$

$$\langle P | j_0(x) | P \rangle = \frac{Q}{V} \quad Q: \text{charge}$$

この行列要素は BS 振幅で表現されるので
これを規格化条件とする

例題

$$\phi_a \phi_b \phi_c$$

 ϕ_c : massless $a+b \rightarrow$ bound state B

1. B に対する BS 振幅の規格化
2. $c+B \rightarrow a+b$ の S 行列
3. B の形状因子

Conserved current に対して WT identity が成り立つ
ので 規格化条件をもっと一般的に設定できる。

まず

$$D(p) S_F(p) = 1$$

$$T_\mu(p, p) = -i \frac{\partial}{\partial p_\mu} \cancel{D(p)} D(p)$$

$$-i \frac{\partial}{\partial p_\mu} S_F(p) = -S_F(p) T_\mu(p, p) S_F(p)$$

pole の近くでは

$$S_F(p) \sim C \frac{-i \not{p} \delta + m}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$

24x.5

$$2i \not{p}_\mu = -(-i \not{p} \delta + m) T_\mu(p, p) C$$

$$\sim 2 \not{p}_0 U(p) T_\mu(p, p) U(p) C$$

$$\text{or } 2 \not{p}_0 U(p) T_\mu(p, p) U(p) C = 2 \not{p}_\mu$$

$$\int d^4p d^4q \chi(p, P) \frac{\partial D(p, q, P)}{\partial P_\mu} \chi(q, P) = -2i P_\mu$$

$$Z=1 \quad DK=1.$$

3. 複合粒子に対する Reduction Formula

Heisenberg's philosophy

Green関数の pole residue

$$\Phi(x)$$

(1) 変換性

(2) 局所性

(3) 規格化

$$\langle 0 | \Phi(x) | a \rangle = \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} e^{i p x}$$

仮定 a と b の c と u の複合粒子からできている

$$\varphi_c(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi_a(x+\xi) \varphi_b(x-\xi)}{\sqrt{2p_0 V} \langle 0 | \varphi_a(\xi) \varphi_b(-\xi) | c \rangle}$$

とすれば

$$\langle 0 | \varphi_c(x) | P \rangle = \frac{1}{\sqrt{2p_0 V}} e^{i P x}$$

Φ に対して

$$\int d^4x \langle 0 | \Phi^\dagger(x) | \bar{a} \rangle (-i) K_x \langle 0 | T[\Phi(x) A(x_1) \dots Z(x_n)] | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T[A(x_1) \dots Z(x_n)] | \bar{a} \rangle$$

$$\int d^4x \langle a | \Phi^\dagger(x) | 0 \rangle (-i) K_x \langle 0 | T[\Phi(x) A(x_1) \dots Z(x_n)] | 0 \rangle$$

$$= \langle a | T[A(x_1) \dots Z(x_n)] | 0 \rangle$$

もっと一般的な式は「場の理論」参照.

REFERENCES

Introduction of the Bethe-Salpeter Equation

Y.Nambu, P.T.P. 5 (1950) 614

M.Gell-Mann and F.E.Low, P.R.84 (1951) 350

E.E.Salpeter and H.A.Bethe, P.R.84 (1951) 1232

F.Schwinger, Proc.Nat'l.Acad.Sci. 37 (1951) 452&455

Wick-Cutkosky-Solution

G.C.Wick, P.R. 96 (1954) 1124

H.E.Cutkosky, P.R. 96 (1954) 1135

S Matrix for Composite Particles and Normalization Problem

K.Nishijima, P.T.P. 10 (1953) 549 ; 12 (1954) 279 ; 13 (1955) 305

S. Mandelstam, Proc. Roy. Soc. (London) A233 (1955) 248

A.Klein and C.Zemach, P.R. 140 (1965) 126

normalization without conserved quantity

G.R.Allcock, P.R. 104 (1956) 1799

G.R.Allcock and D.J.Hooton, N.C. 8 (1958) 590

R.E.Cutkosky and M.Leon, P.R. 135 (1964) B1445

D.Lurie , A.J.Macfarlane and Y.Takahashi, P.R. 140 (1965) B1091

relation between the two methods

K.Nishijima and A,H,Singh, P.R. 162 (1967) B1740

HNZ Construction

R.Haag, P.R. 112 (1958) 669

S. Nishijima, P.R. 111 (1958) 995

T. Zimmermann, N.C. 10 (1958) 597

Cf. LSZ Asymptotic Condition

H.Lehmann, K.Symanzik and W.Zimmermann, N.C. 2 (1955) 425