

Crystals and Vertex Models

神戸大・自然科学 中屋 敦 厚
(Nakayashiki Atsushi)

以下は、次の方々との共同研究[1,2]の解説です。

S-J Kang, 柏原正樹, K.C. Misra, 三輪 哲二, 中島俊樹 各氏。

我々は、crystalの理論を使って、ある種類の2次元格子模型(vertex models)の1点関数が、アフィンリー環の指標を使って書き表せる、という結果を得たのであるが、証明のKeyポイントは、次の点である。

- (1). $B(\lambda) \otimes B \cong B(\mu)$ の型の crystal の同型を通して、crystal with highest weight と "path" との全単射を作る。
- (2). R -matrix から $q \rightarrow 0$ の極限をとって、 H -関数を得るプロセスを crystal を使って厳密に意味づける。
- (3). (1)の同型を通して定義した path の weight を H -関数を使って表わす。

ただし、ここで1点関数と "paths" を結び付ける所で、Baxter による Corner transfer matrix method (CTMM) を使います。最近

6-vertex model ($\hat{\mathfrak{sl}}_2$, level 1 に対応する) については, CTMM を經由せずに, 上の結果を証明することに成功しました。それについては, 神保氏の講演録および, その参考文献を参照して下さい。

以上の一般論については, 文献[1]を参照していただくこととして, ここでは, (1) の具体例を示すにとどめることにします。

§0 Basic definitions

$\mathfrak{g}$ を affine Lie algebra, P を $\mathfrak{g}$ の weight lattice, δ を null root $P_\alpha = P/\mathbb{Z}\delta$ とおく。又, I を $\mathfrak{g}$ の simple roots の index set とする。

Definition. B が crystal とは

- (a) B は集合であり, $B = \bigsqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$ なる分解を持つ。
 (b) 写像 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \setminus \{0\} \rightarrow B \setminus \{0\}$ ($i \in I$) で, 以下の性質を満たすものが存在する。

$$(1) \tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0 \quad (i \in I)$$

$$(2) \tilde{e}_i B_\lambda \subset B_{\lambda + \alpha_i} \setminus \{0\}, \quad \tilde{f}_i B_\lambda \subset B_{\lambda - \alpha_i} \setminus \{0\} \quad (\{\alpha_i\} \text{ は simple roots})$$

$$(3) \forall i \in I, \forall b \in B \quad \exists m \quad \text{s.t.} \quad \tilde{e}_i^m b = \tilde{f}_i^m b = 0$$

$$(4) \varphi_i(b) := \max\{m \mid \tilde{f}_i^m b \neq 0\} \quad \varepsilon_i(b) := \max\{m \mid \tilde{e}_i^m b \neq 0\} \quad \text{とおく。}$$

$$b \in B_\lambda \Rightarrow \varphi_i(b) - \varepsilon_i(b) = \langle R_i, \lambda \rangle \quad (\{R_i\} \text{ は simple coroots})$$

$$(5) b, b' \in B \quad i \in I \text{ に対し,} \quad b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow \tilde{e}_i b' = b$$

この定義で, P を P_α で置き換えたものを, classical crystal と呼ぶ。これに対し, 上で定義した crystal を affine crystal と呼ぶ。両方合わせて, 単に crystal と書くことにする。

Graph structure.

$$b \xrightarrow{i} b' \Leftrightarrow b' = \tilde{f}_i b \quad (i \in I)$$

により crystal B には, colored oriented graph の構造が"入る。

Tensor product

B_1, B_2 : crystals

$B_1 \otimes B_2$ は, 次により crystal とする

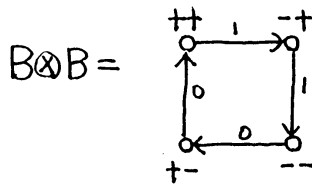
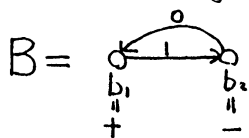
$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{f}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{f}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2) \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} \tilde{e}_i b_1 \otimes b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2) \\ b_1 \otimes \tilde{e}_i b_2 & \text{if } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$$

§1 Examples

$\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{sl}}_2$, $P = \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1 \oplus \mathbb{Z}\delta$, $P_0 \subseteq \mathbb{Z}\Lambda_0 \oplus \mathbb{Z}\Lambda_1$, $\sqcup \sqcup \sqcup \Lambda_i (i=0,1)$ は

fundamental weights,



$++ = + \otimes +$ 等。

paths $P(\Lambda_i) (i=0,1)$ は, 次で定義される。

$$P(\Lambda_0) = \{ (P(i))_{i=1}^{\infty} \mid P(2i) = +, P(2i+1) = - \quad \forall i \gg 0, P(j) \in B \quad \forall j \}$$

$$P(\Lambda_1) = \{ (P(i))_{i=1}^{\infty} \mid P(2i) = -, P(2i+1) = + \quad \forall i \gg 0, P(j) \in B \quad \forall j \}$$

$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の $P(\Lambda_j)$ への作用は次の規則で与えられる。

(a) $\tilde{e}_0, \tilde{f}_0$ の作用

$P \in P(\Lambda_j)$ とする。以下 P を表示するのに $P = (P(i))_{i=1}^{\infty}$ を右から左へ

書いてゆくものとする。例えば $P = (\cdots + - + - + -)$ は $P(1) = -, P(2) = +$ など。さて P に対して、次の (i)-(iii) の処理を行なう。

(i) 隣り合う $-+$ の組を消去する。ex. $P = \cdots + \overset{12}{-} \overset{11}{+} \overset{10}{-} \overset{9}{+} \overset{8}{-} \overset{7}{+} \overset{6}{-} \overset{5}{+} \overset{4}{-} \overset{3}{+} \overset{2}{-} \overset{1}{-}$

(ii) (i) で消去した番号はなりのものとして、ex. $\overset{7}{+} \overset{6}{-} \overset{5}{+} \overset{4}{-} \overset{3}{+} \overset{2}{-} \overset{1}{-}$

隣り合う $-+$ の組を消去する。

(iii) (ii) を inductive にくり返す。最後に ex. $\overset{7}{+} \overset{6}{-} \overset{5}{+} \overset{4}{-} \overset{3}{+} \overset{2}{-} \overset{1}{-}$

$+ \cdots + - \cdots -$ の形になる。

(iii) の状態で

$$\tilde{f}_0 + \cdots + \{ - \cdots - \} = + \cdots + \{ + \cdots - \} \quad \text{ex. } \tilde{f}_0 P = \cdots + \overset{10}{-} \overset{9}{+} \overset{8}{-} \overset{7}{+} \overset{6}{-} \overset{5}{+} \overset{4}{-} \overset{3}{+} \overset{2}{+} \overset{1}{+}$$

$$\tilde{e}_0 + \cdots + \{ - \cdots - \} = + \cdots + \{ - \cdots - \} \quad \text{ex. } \tilde{e}_0 P = \cdots + \overset{10}{-} \overset{9}{+} \overset{8}{-} \overset{7}{+} \overset{6}{-} \overset{5}{+} \overset{4}{-} \overset{3}{+} \overset{2}{+} \overset{1}{-}$$

ここで $\{ \}$ は (iii) の状態での $+$ と $-$ の境を表している。

(b) $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の作用。

(a) で $+$ と $-$ とを入れ換えて全く同じ操作をする。

(iii) に対応する状態で

$$\tilde{f}_1 - \cdots - \{ + \cdots + \} = - \cdots - \{ - + \cdots + \}$$

$$\tilde{e}_1 - \cdots - \{ + \cdots + \} = - \cdots - + \{ + \cdots + \}$$

いくつか例を書いてみると

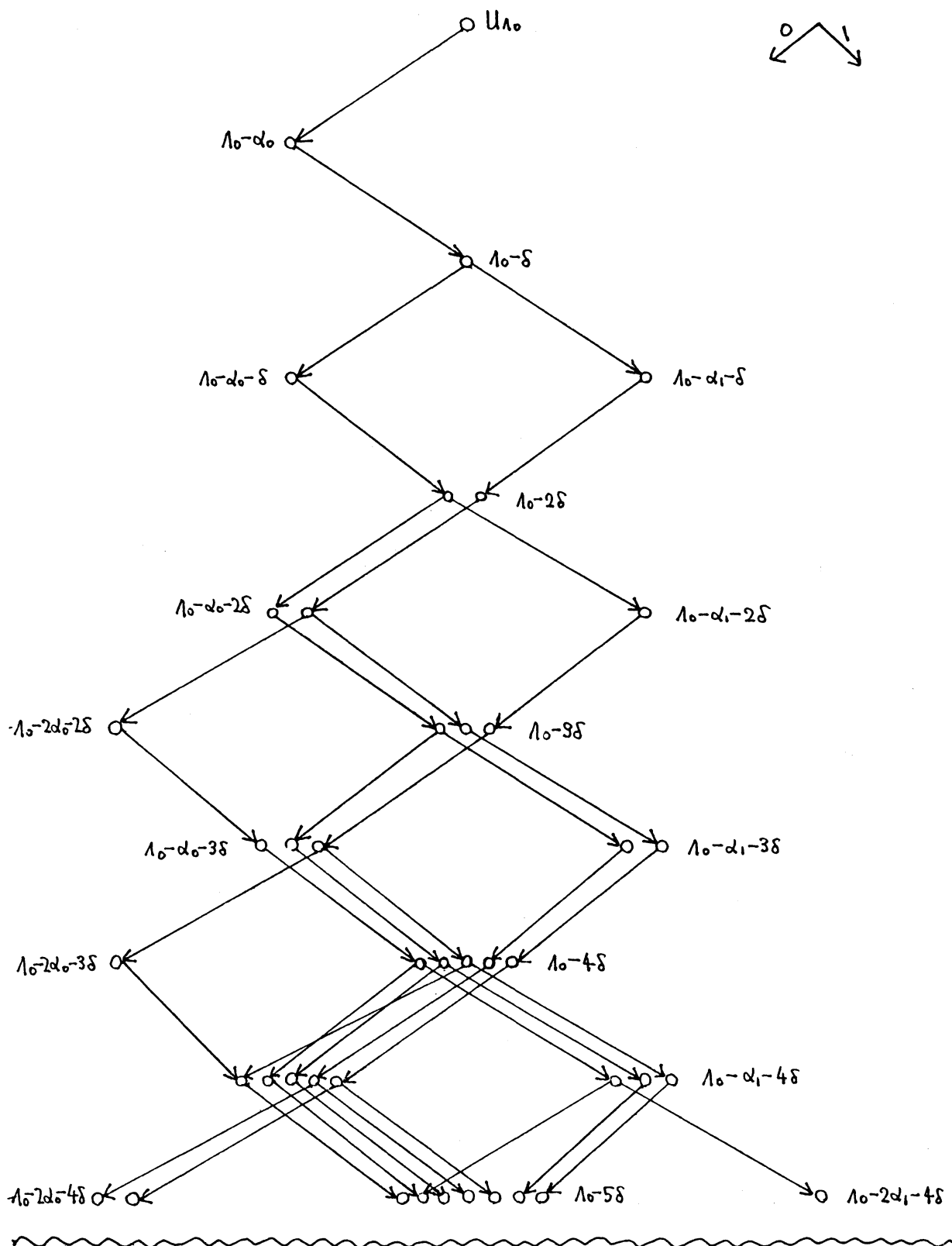
$$u_{10} = (\cdots + - + - + - + - + -) \in P(10)$$

$$\tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots + - + - + - + - + +) \quad \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - + + - +)$$

$$\tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - + - +) \quad \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - + - + - +)$$

$$\tilde{f}_1^2 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - + - -) \quad \tilde{f}_1^2 \tilde{f}_0 \tilde{f}_1 \tilde{f}_0 u_{10} = (\cdots - + - + - + - - + - -)$$

$P(\lambda_0)$ の crystal graph を書くと、次のようになる。(height 10 の descendant まで)



さて, $(L(\lambda_i), B(\lambda_i))$ を highest weight λ_i の既約 highest weight $U_q(\hat{\mathfrak{g}}_2)$ -加群の crystal base とする. すると $B(\lambda_i) \simeq P(\lambda_i)$ なる affine crystal としての同型が成り立つ. ここで, crystal の間の射は, $\hat{e}_i, \hat{f}_i$ と可換な写像とし, 同型射とは, この写像が全単射である場合を言う. $P(\lambda_i)$ については, 次の classical crystal としての同型が成り立つことは自明であろう.

$$\begin{array}{ccc} P(\lambda_i) \otimes B & \xrightarrow{\sim} & P(\lambda_{i-1}) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ (P(\lambda_i))_{\mathbb{Z}}^{\psi} \otimes \varepsilon & \longrightarrow & (\cdots P(\lambda_i) P(\lambda_i) \varepsilon) \end{array} \quad \varepsilon = \pm$$

paths は, $\square$ の性質 $P(\lambda_i) \otimes B \simeq P(\lambda_{i-1})$ により特徴づけられ,

$B(\lambda_i)$ に対して, これを証明することにより, $B(\lambda_i)$ と $P(\lambda_i)$ との間
の全単射が得られる.

参考文献

- [1] S-J Kang, M. Kashiwara, K.C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, Affine Crystals and Vertex Models
RIMS preprint 828
- [2] —, Perfect Crystals of Quantum Affine Lie Algebras,
RIMS preprint 868
- [3] M. Jimbo, K.C. Misra, T. Miwa and M. Okado, Combinatorics
of Representations of $U_q(\hat{\mathfrak{g}}(n))$ at $q=0$, CMP 136 (1991) 543-566