

有限体上のユニタリ群の複素既約指標について

阪大・理 川中 宣明

まず、比較のために、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の一般線形群 $GL_n(\mathbb{C})$ とユニタリ群 $U_n(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現の関係をも、復習してみる。良く知られているように、

命題 1. R を $GL_n(\mathbb{C})$ の正則な有限次元既約表現とすると、 $R|U_n(\mathbb{C})$ は、 $U_n(\mathbb{C})$ の既約表現である。しかも対応 $R \mapsto R|U_n(\mathbb{C})$ は、 $GL_n(\mathbb{C})$ の正則な有限次元既約表現の同値類の集合から $U_n(\mathbb{C})$ の既約表現の同値類の集合への全単射である。

σ を次式で定義される $GL_n(\mathbb{C})$ の自己同型とする：

$$(x_{ij})^\sigma = (\overline{x_{ji}})^{-1} \quad ((x_{ij}) \in GL_n(\mathbb{C})).$$

$U_n(\mathbb{C})$ は、 $GL_n(\mathbb{C})$ の σ -固定点全体のなす群である。さて、 $GL_n(\mathbb{C})$ の任意の既約有限次元表現 T は、正則な有限次元既約表現 R と、反正則な有限次元既約表現 S とによって

$$T = R \otimes S$$

と、(同値性を除いて)一意的に書くことができ、逆にこの

ようにして得られる T は $GL_n(\mathbb{C})$ の既約表現であることもよく知られている。従って、 $GL_n(\mathbb{C})$ の σ -不変な有限次元既約表現は、同値を除けば、

$$T = R \otimes (R \circ \sigma)$$

(R は、正則な有限次元既約表現) の形に一意的に書ける。このことと、命題 1 から、 $GL_n(\mathbb{C})$ の σ -不変な有限次元既約表現の同値類の集合から、 $U_n(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現の同値類の集合への全単射が得られることになる。ここでは、この型の定理が、有限体上の一般線型群と、ユニタリ群に対しても成立することを示したい。

§ 1. 主定理.

まず、 G を任意の有限群、 $A = \langle \sigma \rangle$ を有限巡回群であるとする。 A が G に作用しているとし、 GA を G と A との半直積とする。 GA における積は

$$x\sigma = \sigma x \sigma^{-1} \quad (x \in G, \sigma \in A)$$

によって定まる。

補題 1. χ を G の既約指標で、 σ -不変 (即ち、 $\chi(x) = \chi(x\sigma)$ ($\forall x \in G$)) とする。この時、 GA の既約指標 $\tilde{\chi}$ で、 $\tilde{\chi}|_G = \chi$ となるものが存在する。

証明. T を、その指標が χ であるような、 G の既約表現とする。条件より、 $I_\sigma T(x) I_\sigma^{-1} = T(x\sigma)$ ($\forall x \in G$) と

なるような (T の表現空間における) 作用素 I_σ が存在する.

$I_\sigma^m = 1$ ($m = |A|$) となるように I_σ を normalize し,

$$\tilde{T}(x\sigma^l) = T(x)I_\sigma^l \quad (x \in G)$$

により $\tilde{T}$ を定義すると, $\tilde{T}$ は, GA の既約表現となる.

さて, 以下 K を標数 $p > 0$ の代数的閉体とし, k を元数 q ($= p^f$) の K の部分体, 自然数 m に対して k_m を k の m 次拡大体とする. σ を次式で定義される $\mathcal{Q} = GL_n(K)$ の自己同型とする:

$$(x_{ij})^\sigma = (x_{ji}^{-1})^{-1} \quad ((x_{ij}) \in \mathcal{Q})$$

自然数 m に対して, $\mathcal{Q}_{\sigma^m} = \{x \in \mathcal{Q}; x^{\sigma^m} = x\}$ とおくと,

$$\mathcal{Q}_{\sigma^m} = \begin{cases} GL_n(k_m) & (m \text{ が偶数のとき}) \\ U_n(k_{2m}) & (m \text{ が奇数のとき}). \end{cases}$$

以下, m をひとつ固定して $G = \mathcal{Q}_{\sigma^m}$ とおく. σ の G への制限を簡単のため, やはり σ と書き, G の自己同型 σ で生成される m 次巡回群を A と記すことにする.

主定理. $(m, p) = 1$ と仮定する. χ を G の σ -不変な既約指標, $\tilde{\chi}$ を $\tilde{\chi}|_G = \chi$ となるような GA の既約指標とする. $G_\sigma = U_n(k_2)$ の既約指標 ψ_χ で次式を満たすようなものが (一意的に) 存在する:

$$\tilde{\chi}(x\sigma) = \pm \zeta \psi_x(n(x)) \quad (x \in G),$$

ただし, ζ は 1 の m 乗根 $n(x)$ は $C_G(N(x)) \cap G_\sigma$ の任意の元 ($N(x) = x x^\sigma x^{\sigma^2} \cdots x^{\sigma^{m-1}}$ とする) である. さらに, $\chi \rightarrow \psi_x$ は G の σ -不変な既約指標全体から, G_σ の既約指標全体への全単射である.

次の補題は, $(m, p) = 1$ という仮定なしで成立する.

補題 2. (a) x を G の任意の元とする. G における $N(x)$ の共役類 $C_G(N(x))$ は G_σ の元を含み, $C_G(N(x)) \cap G_\sigma$ は, G_σ の n とつの共役類をなす.

(b) x, y を G の元で $x\sigma$ と $y\sigma$ が GA の元として共役であるとする. このとき, $C_G(N(x)) \cap G_\sigma = C_G(N(y)) \cap G_\sigma$.

(c) $\mathcal{N}(C_{GA}(x\sigma)) = C_G(N(x)) \cap G_\sigma \quad (x \in G)$ で定義される $\mathcal{N}$ は $G \times \{\sigma\}$ の GA -共役類全体から G_σ の共役類全体への全単射である.

(d) $|C_{GA}(x\sigma)| |G|^{-1} = |C_G(N(x)) \cap G_\sigma| |G_\sigma|^{-1}$ が, 任意の $x \in G$ に対して成立する.

注意. τ を $(x_i)^\tau = (x_{i\sigma}^\sigma) \quad ((x_i) \in \mathcal{O})$ で定義される $\mathcal{O}$ の自己同型とする. 上の主定理と補題は, σ を τ で置きかえても成立する. 実際, この場合は $(m, p) = 1$ の仮定なしに, 新谷卓郎氏が既に証明した. 筆者の証明は, σ の場

合でも適用できるかわりに, (今の所) m が p で割れない, という仮定が必要になる.

§2. 証明の方針.

主定理 および補題2の形の命題が成立するような有限群 G と巡回群 A の組の例をいくつか挙げてみよう:

例 I. 「 $(|G|, m) = 1$ ($m = |A|$) かつ

$$\sigma^m = x \quad (\forall x \in G)$$

の場合, 主定理と補題2は, 良く知られた諸結果の言い換えに過ぎない.

例 I'. 「 $(|G|, m) = 1$ 」で A の G への作用が trivial とは限らない場合も, 同様のことが成立する. (G. Glauberman: Canad. J. Math. 20 (1968) 1465-1488, 参照).

例 II. 「 H を任意の有限群, $G = H \times H \times \cdots \times H$ (m 個) σ を $(h_1, h_2, \dots, h_m)^\sigma = (h_m, h_1, h_2, \dots, h_{m-1})$ ($h_i \in H$) で定義」この場合は, G の任意の既約表現が, H の既約表現のテンサー積で書けることから主定理が出る.

例 II'. 少し違うが, 序で述べた $GL_n(\mathbb{C})$ と $U_n(\mathbb{C})$ の場合も, 例 II の系統であろう.

例 II''. 例 II' とほぼ同 ことが, 主定理の G と G_0 のモジュラー表系 (標数 p の体 K 上の表現) に対して成立.

例Ⅲ. 「 $G = k_m^*$, $x^\sigma = x^2$ ($x \in k_m^*$)」の場合. このとき, G の既約指標 (= 一次元表現) χ が σ -不変なら

$$\chi(x) = \chi(x^\sigma) \quad (x \in G)$$

すなわち, $\chi(xx^{-\sigma}) = 1 \quad (x \in G)$.

ところが, Hilbert の定理 90 より

$$\{xx^{-\sigma} : x \in G\} = \{ \text{Norm}_{k_m/k}(x) = 1 : x \in G \}.$$

このことと, $\text{Norm}_{k_m/k}$ が k の上への写像であることから

$$\chi = \psi_\chi \circ \text{Norm}_{k_m/k}$$

なる $G_\sigma = k^*$ の既約指標 ψ_χ が一意に存在する. このことを主定理の形に言い換えることができる.

主定理の証明には, Brauer の characterization of characters を用いて, 主定理を local な問題 すなわち G_σ の elementary subgroups についての問題に帰着する.

local な所では, 上の例Ⅰ ~ 例Ⅲ のどれかが使えることがわかる. それらをつないで global な結果を出せば良いわけである. 詳細は筆者の論文: On the irreducible characters of the finite unitary groups (to appear) を, 見て下されば幸いです.