

Average Euler Characteristic

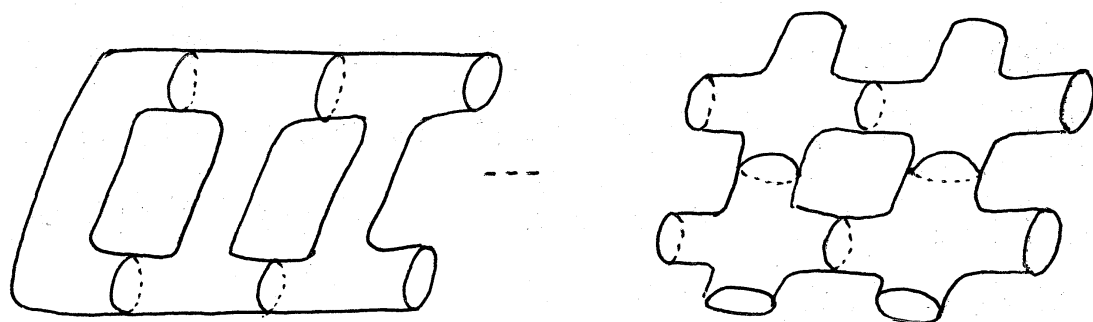
北大理 西森敏之

(Toshiyuki Nishimori)

§1. 序

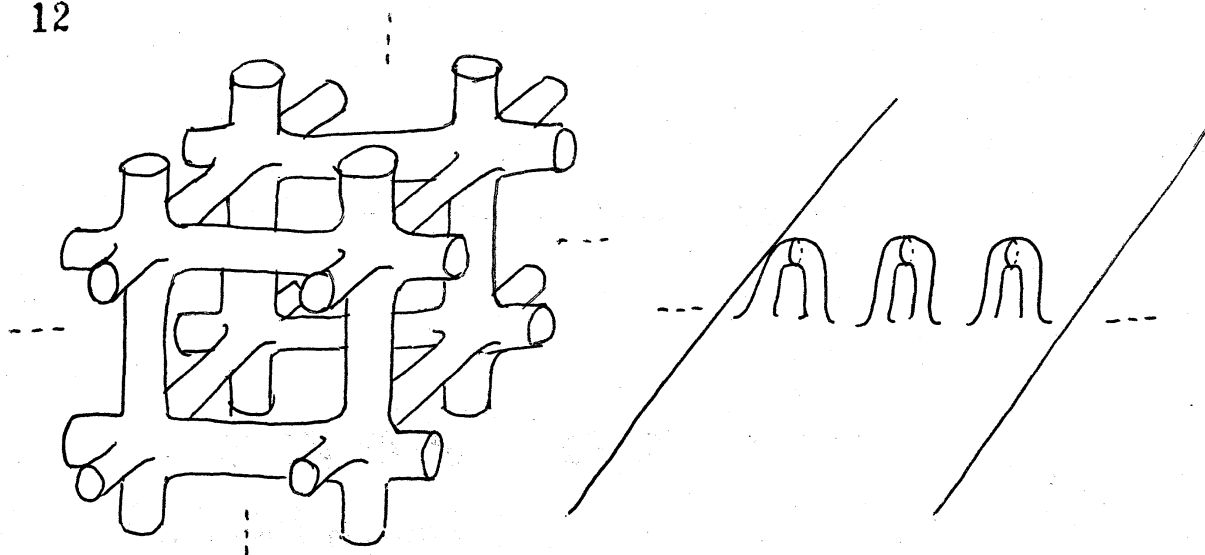
リーマン多様体 (F_1, g_1) と (F_2, g_2) が quasi-isometric

とは、微分同型 $f: F_1 \rightarrow F_2$ と正定数 A, B が存在して、 $\forall v \in TF_1$ に対し $A \cdot \|v\|_{g_1} \leq \|f_* v\|_{g_2} \leq B \cdot \|v\|_{g_1}$ となることをいう。次の4例は多様体としてはどれも $T^2 \# T^2 \# \dots$ に微分同型であるが、3次元ユークリッド空間の部分空間としてのリーマン計量を与えるとそれぞれの quasi-isometry 型はすべて異なる。



(a) Jacob's ladder

(b) Infinite jail cell window



(c) Infinite jungle gym

(d) Infinite Loch Ness monster

いま M を閉多様体, $\mathcal{F}$ を M の葉層, F を $\mathcal{F}$ の葉とし,
 M に任意に metric g を与えてリーマン多様体 $(F, g|_F)$ を考
 えると, その quasi-isometry 型は g のとり方によらない。そ
 こで次のような問題が定式化される。

問題 A. 非コンパクト多様体 F に対し quasi-isometry 型
 を指定したとき, F がいつ閉多様体上の葉層の葉として実現
 できるか?

quasi-isometry 不変量としては growth 型が知られている
 が, Phillips-Sullivan [2] はさらに "平均 Euler 数" を導入
 して問題 A を扱った。2次元リーマン多様体 (F, g) の 平均
Euler 数 が 0 であるとは, F のコンパクト連結部分多様体の
 列 $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \dots$ が

$$(i) \exists x_0 \in F, \exists Q > 0, \exists r_1, r_2, \dots \rightarrow \infty \text{ s.t. } D_{r_1}(x_0) \subset F_i \subset D_{Qr_1}(x_0),$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \chi(F_n) / \text{vol}(F_n) = 0,$$

をみたすようにとれることをいう。ただし $D_r(x_0)$ は x_0 からの距離が r 以下であるような F の点の集合をあらわす。

定理 B. (Phillips-Sullivan [2]). M を閉多様体, $\mathcal{F}$ を向きづけ可能な 2 次元葉層, F を $\mathcal{F}$ の葉とする。 $H_2(M; \mathbb{R}) = 0$ とする。もし F が non-exponential growth ならば, F の平均 Euler 数は 0 である。□

上の 4 例について調べると, growth とは $\text{vol } D_r(x_0)$ の $r \rightarrow \infty$ のときの増加の速さであつたから, (a)(b)(c)(d) はそれぞれ 1 次, 2 次, 3 次, 2 次の polynomial growth である。一方, $|\chi(D_r(x_0))|$ は大雑把にいえば r に関してそれぞれ 1 次, 2 次, 3 次, 1 次の多項式のように増加する。実際に (a)(b)(c) は平均 Euler 数が 0 でなく, (d) は平均 Euler 数が 0 であることが証明できる。さらに Cantwell-Conlon [1] により (d) は S^3 の余次元 1 葉層の葉として実現されている。

本稿の目標は定理 B を高次元の葉に対して拡張することである。とりあえず Phillips-Sullivan の平均 Euler 数 0 の定義のままでは 3 次元以上のリーマン多様体に対して常に平均 Euler 数が 0 になることを注意しておく。それは (i) をみたす列 $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ に対して F^n 内の $\sum g_i \times D^{n-2}$ と微分同型な部分多様体をいくつか各 F_i に境界連結和して $|\chi(F_i)|$ を小さくするが, $\text{vol}(F_i)$ はあまり変えないという操作ができるか

らである。ただし Σ_g は種数 g の向きづけ可能な閉曲面である。

§2. 平均 Euler 数

この§では (F, g) を向きづけ可能で完備な n 次元リーマン多様体とする。 (F, g) の C^∞ 単体分割 T が 一様 であるとは、正定数 v, V, d, N が存在して

(a) T の一次元以上のすべての単体 σ に対して、

$$v \leq \text{vol } \sigma \leq V, \quad \text{diam } \sigma \leq d$$

(b) T のすべての頂点 α に対して、

$$\#\{\sigma: T \text{ の単体} \mid \sigma \ni \alpha\} \leq N$$

がなりたつことをいう。

我々は Phillips-Sullivan の平均 Euler 数の定義を次のように修正する。3次元以上の (F, g) の 平均 Euler 数 が 0 であるとは、 (F, g) の一様単体分割 T が存在し、 T に関する部分複体の列 $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ で各 F_i がコンパクト連結部分多様体であるものが存在し、

(i) $\exists x_0 \in F, \exists Q > 0, \exists r_1, r_2, \dots \rightarrow \infty$ such that

$$D_{r_i}(x_0) \subset F_i \subset D_{Qr_i}(x_0)$$

(ii) $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(F_i) / \text{vol } F_i = 0$

(iii) $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol } \partial F_i / \text{vol } F_i = 0$

がなりたつことをいう。ただし $D_r(x_0)$ は x_0 から r 以内の距離にある F の点の集合である。

奇数次元の閉多様体に関しては Euler 数は常に 0 であるが、上の定義を採用することにより平均 Euler 数についても同様のことがなりたつ。正確には次の結果を得る。

定理 1 (F, g) を奇数次元の向きづけ可能で完備なリーマン多様体とする。もし (F, g) が一様単体分割 T をもち、さらに *non-exponential growth* ならば、 (F, g) の平均 Euler 数は 0 である。

証明 F の次元を n とし、 T に対応する正定数を v, V, d, N とする。任意に $x_0 \in F$ をとる。 T はある単体分割 T_0 の重心細分であると仮定してもよい。 T^* を T_0 の双対 cell 分割とする。さて各 $r > 0$ に対して

$$G_r = \bigcup \{ \sigma^* : T^* \text{ の } n\text{-cell} \mid \sigma^* \cap D_r(x_0) \neq \emptyset \}$$

とおくと、 G_r は T の部分複体でありかつコンパクト連結部分多様体である。明らかに $G_r \subset D_{r+2d}(x_0)$ 。さらに

$$\partial^* G_r = \bigcup \{ \sigma : T \text{ の単体} \mid \sigma \cap \partial G_r \neq \emptyset \}$$

とおくと、 $\partial^* G_r \subset D_{r+3d}(x_0) - D_{r-d}$

$$\text{補題 2.1. } \text{vol } \partial^* G_r \geq \frac{v}{(n+1)V} \text{vol } \partial G_r$$

証明. ∂G_r は少なくとも $\lceil \text{vol } \partial G_r / V \rceil$ 個の $(n-1)$ 単

体をもつ。1つの n 単体は $(n+1)$ 個の $(n-1)$ 単体をもつから、 $\partial^* G_r$ は少なくとも $[\text{vol } \partial G_r / (n+1)V]$ 個の n 単体を含む。従って求める不等式を得る。□

次に部分複体の列 $\{G_{3Rd}\}_{R \in \mathbb{N}}$ を考えると、 (F, g) が non-exponential growth であることより次のようになる。

補題2.2. $\alpha = \liminf_{R \rightarrow \infty} \text{vol } \partial G_{3Rd} / \text{vol } G_{3Rd} = 0$.

証明. $\alpha \neq 0$ と仮定すると、 $\nu \in \mathbb{N}$, $A > 0$ が存在して、 $R \geq \nu$ ならば $\text{vol } \partial G_{3Rd} / \text{vol } G_{3Rd} \geq A$ になりたつ。

いま $x_R = \text{vol } G_{3Rd}$ とおくと、

$$\begin{aligned} x_{R+1} - x_{R-1} &\geq \text{vol}(D_{3Rd+3d}(z_0) - D_{3Rd-d}(z_0)) \\ &\geq \text{vol } \partial^* G_{3Rd} \geq \frac{\nu}{(n+1)V} \text{vol } \partial G_{3Rd} \\ &\geq \frac{\nu A}{(n+1)V} x_R \end{aligned}$$

となる。 $B = \frac{\nu A}{(n+1)V}$ とおけば、 $x_{R+1} \geq B x_R + x_{R-1}$ となる。

したがって

$$x_{R+2} \geq B x_{R+1} + x_R \geq (B^2 x_R + B x_{R-1}) + x_R \geq (1+B^2) x_R$$

より、 $R \geq \nu$ なる R に対して、

$$x_R \geq (1+B^2)^{\frac{1}{2}[R-\nu]} x_\nu$$

を得る。ところが $G_{3Rd} \subset D_{3Rd+2d}(z_0)$ であったから

$$\text{vol } D_{(3R+2)d}(z_0) \geq (1+B^2)^{\frac{1}{2}[R-\nu]} x_\nu$$

となり、 (F, g) が non-exponential growth であることに矛盾する。ゆえに $\alpha = 0$ が結論される。□

さて補題 2.2 により $\{G_{3Bd}\}_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ で
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol } \partial F_i / \text{vol } F_i = 0$ をみたすものがとれるが, $F_i =$
 G_{r_i} により r_i をきめ $Q=2$ とおくと $r_1 \geq 2d$ となるよう
 に $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を選んでおけば 平均 Euler 数の定義の条件 (i)
 がなりたつ。あと条件 (ii) をチェックすればよい。

いま F_i の double $W_i = F_i \cup_{\partial F_i} F_i$ を考えると, W_i は
 奇数次元閉多様体だから,

$$\chi(W_i) = 2\chi(F_i) - \chi(\partial F_i) = 0$$

となる。

$$\text{補題 2.3. } |\chi(\partial F_i)| \leq \frac{n!}{v} \text{vol } \partial F_i$$

証明. ∂F_i に含まれる $(n-1)$ 単体の個数は $\text{vol } \partial F_i / v$
 以下である。1つの $(n-1)$ 単体は $(n! - 1)$ 個の単体を含む。
 ゆえに ∂F_i に含まれる全単体の個数は $(n!/v) \text{vol } \partial F_i$ より
 少ない。□

以上より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} |\chi(F_i)| / \text{vol } F_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2} |\chi(\partial F_i)| / \text{vol } F_i \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{n!}{2v} \cdot \frac{\text{vol } \partial F_i}{\text{vol } F_i} = 0 \end{aligned}$$

であるから $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(F_i) / \text{vol } F_i = 0$ を得る。したがって,
 (F, g) の平均 Euler 数は 0 である。(定理 1 の証明終り)

§3. 概周期的リーマン多様体の平均 Euler 数

向きづけ可能で完備な n 次元リーマン多様体 (F, g) が 概周期的 であるとは、有限個のコンパクトな n 次元リーマン多様体 $(P_1, g_1), \dots, (P_\nu, g_\nu)$ が与えられ、 C, C' をそれぞれ $\partial P_i, \partial P_j$ の連結成分としたとき有限集合 $\Phi(C, C') \subset D_1 \# (C, C')$ が指定されていて、さらに正定数 A, B と F のコンパクト多様体被覆 $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して

- (i) $\{\text{Int } K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は disjoint, $K_\lambda \cap K_\mu$ は閉多様体,
- (ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して微分同型 $f_\lambda \in K_\lambda \rightarrow P_{j(\lambda)}$ が存在して

$$A \cdot \|v\|_g \leq \|f_{\lambda*} v\|_{g_{j(\lambda)}} \leq B \cdot \|v\|_g \quad (\forall v \in TM|_{K_\lambda}),$$

- (iii) さらに各連結成分 $C \subset K_\lambda \cap K_\mu$ に対し $C_1 = f_\lambda(C)$

$$C_2 = f_\mu(C) \text{ とおくと } \varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}|_{C_1} \in \Phi(C_1, C_2)$$

がなりたつことをいう。このとき各 (P_j, g_j) を 周期 といい。

周期 (P_j, g_j) が essential とは $\#\{\lambda \in \Lambda \mid j(\lambda) = j\} = \infty$

となることをいう。周期 (P_j, g_j) が frequent であるとは、

ある $x_0 \in F$ に対し $f_j(r) = \#\{\lambda \in \Lambda \mid K_\lambda \subset D_r(x_0), j(\lambda) = j\}$ とお

くとき

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} f_j(r) / \text{vol } D_r(x_0) > 0$$

となることをいう。

(F, g) が概周期的であるかどうかは *quasi-isometry* 不変量である。概周期的な (F, g) は一様単体分割をもつ。それは

各周期 (P_i, g_i) に対し $\exists P_i$ の単体分割を有限個とりどの $\varphi \in \Phi(C_1, C_2)$ に対しても C_1 のある単体分割が φ で C_2 のある単体分割に対応するようにしておいて、それらを P_i の単体分割に拡張したものを準備しておいて、各 K_λ に対して他の K_μ たちとのはりつけ具合をみてふさわしい $P_j(\lambda)$ の単体分割を K_λ に移せばよいからである。

概周期的なリーマン多様体に対しては次のように平均 Euler 数が計算できる。

定理2 (F, g) を偶数次元の向きづけ可能で完備なリーマン多様体とする。 (F, g) が *non-exponential growth* とし、さらに概周期的であるとしてその周期の族 $\{(P_j, g_j)\}_{j=1}^V$ などを1組とり固定しておく。

(1) もしすべての frequent な周期 (P_j, g_j) に対し $\chi(P_j) = 0$ ならば、 (F, g) の平均 Euler 数は 0 である。

(2) もしすべての essential な周期 (P_j, g_j) に対して $\chi(P_j) > 0$ (< 0) ならば (F, g) の平均 Euler 数は 0 ではない。

証明. $x_0 \in F$ とする。上の注意のように (F, g) の一様単体分割 T をとり、その正定数を v, V, d, N とする。 K_λ は T に関する部分複体となっている。 (F, g) が概周期的であることから、正定数 v^*, V^*, d^*, N^* が存在して、

$$v^* \leq \text{vol } K_\lambda \leq V^*, \text{ diam } K_\lambda \leq d^*$$

C を K_λ の連結成分とすると、 $v^* \leq \text{vol } C \leq V^*$

$$\#\{C \mid C: K_\lambda \text{ の連結成分}\} \leq N^*$$

がなりたつ。

補題3.1. (F, g) に対し正定数 C_1, C_2 が存在して, F の余次元1 p.l. 閉部分多様体 S が T に関する部分複体になっているとき, S から r 以内の距離にある点の集合を $N_r(S)$ と表わせば

$$\text{vol } N_r(S) \leq e^{C_1 r + C_2} \text{vol } S$$

証明. (F, g) の断面曲率が有界なことから, 正定数 ε_0 と単調増加関数 $C: (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して,

$$\forall x \in F \text{ と } \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] \text{ に対し } \text{vol } D_\varepsilon(x) \leq C(\varepsilon)$$

がなりたつ。必要な ε は重心細分をくりかえして $15d \leq \varepsilon$ と仮定しておいてよい。 S に含まれる T の頂点の集合を $\mathcal{V}(S)$ とおくと

$$N_{12d}(S) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{V}(S)} D_{13d}(\alpha)$$

となる。いま $N^*(S) = \bigcup \{ \sigma^*; T^* \text{ の } n\text{-cell} \mid \sigma^* \cap N_{10d}(S) \neq \emptyset \}$ とおくと, $N^*(S)$ は F の p.l. 部分多様体であり

$$\partial N^*(S) \subset N_{12d}(S) - N_{10d}(S)$$

となる。したがって

$$\text{vol } N^*(S) \leq \text{vol} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathcal{V}(S)} D_{13d}(\alpha) \right)$$

$$\leq C(13d) \cdot \# \mathcal{V}(S) \leq C(13d) \cdot \frac{n}{v} \cdot \text{vol } S$$

を使って

$$\begin{aligned} \text{vol } \partial N^*(S) &\leq V \cdot \#\{\sigma: (n-1)\text{単体} \mid \sigma \subset \partial N^*(S)\} \\ &\leq V \cdot \#\mathcal{V}(N^*(S)) \cdot N \\ &\leq NV \cdot \frac{(n+1)}{v} \text{vol } N^*(S) \leq \frac{n(n+1)}{v^2} NV \cdot C(13d) \cdot \text{vol } S \end{aligned}$$

を得る。 $K_1 = \text{Max}\{2, C(13d) \cdot \frac{n}{v}\}$, $K_2 = \text{Max}\{2, \frac{n(n+1)}{v^2} \cdot NV \cdot C(13d)\}$ とおく。

次に $S' = \partial N^*(S)$ に対して上と同じ操作をすれば,

$$\text{vol } N^*(S') \leq K_1 \cdot \text{vol } S', \quad \text{vol } \partial N^*(S') \leq K_2 \cdot \text{vol } S'$$

となる。この操作を $([r/10d] + 1)$ 回くりかえせば, $N_r(S)$

を覆う p.l. 部分多様体

$$N^*(S) \cup N^*(\partial N^*(S)) \cup \dots \cup N^*(\partial N^*(\dots(\partial N^*(S))\dots))$$

を得るから, $r' = ([r/10d] + 1)$ とおけば

$$\begin{aligned} \text{vol } N_r(S) &\leq K_1 (K_2 + K_2^2 + \dots + K_2^{r'}) \text{vol } S \\ &< K_1 K_2^{r'} \frac{1}{1 - \frac{1}{K_2}} \text{vol } S < \frac{K_1 K_2}{K_2 - 1} K_2^{\frac{r}{10d} + 1} \text{vol } S \end{aligned}$$

従って

$$C_2 = \log \frac{K_1 K_2^2}{K_2 - 1}, \quad C_1 = \frac{\log K_2}{10d}$$

とおけば求める不等式を得る。□

(1) の証明. いま $r > 0$ に対して $G_r = \bigcup \{K_\lambda \mid K_\lambda \cap D(x_0) \neq \emptyset\}$ とおくと, 定理1の証明と同様にして $\{G_{3^k r d^*}\}_{k \in \mathbb{N}}$ の部分列 $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が

$$(i) \exists r_1, r_2, \dots \rightarrow \infty \text{ s.t. } D_{r_i}(x_0) \subset F_i \subset D_{r_i+d^*}(x_0)$$

$$(ii) \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol } \partial F_i / \text{vol } F_i = 0$$

をみたすようにとれる。さらに $\partial^* D_{r_i}(x_0) = \bigcup \{K_\lambda \mid K_\lambda \cap \partial D_{r_i}(x_0) \neq \emptyset\}$ とおくと

$$\partial^* D_{r_i}(x_0) \subset N_{2d}^*(\partial F_i)$$

となる。いま $f_{j,i} = \#\{K_\lambda \subset F_i \mid j(\lambda) = j\}$ とおくと,

$$\begin{aligned} |f_j(r_i) - f_{j,i}| &\leq \#\{K_\lambda \mid K_\lambda \subset \partial^* D_{r_i}(x_0)\} \\ &\leq \text{vol } N_{2d}^*(\partial F_i) / v^* \leq \frac{1}{v^*} e^{C_1 2d + C_2} \text{vol } \partial F_i \end{aligned}$$

となる。

$$\text{補題 3.2. } \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol } \partial D_{r_i}(x_0) / \text{vol } F_i = 1.$$

証明. $F_i - D_{r_i}(x_0) \subset \partial^* D_{r_i}(x_0)$ より,

$$\begin{aligned} |\text{vol } F_i - \text{vol } D_{r_i}(x_0)| &\leq \text{vol } N_{2d}^*(\partial F_i) \\ &\leq e^{C_1 \cdot 2d + C_2} \text{vol } \partial F_i \end{aligned}$$

となるから

$$\left| 1 - \frac{\text{vol } D_{r_i}(x_0)}{\text{vol } F_i} \right| \leq e^{C_1 \cdot 2d + C_2} \frac{\text{vol } \partial F_i}{\text{vol } F_i} \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty)$$

を得る。□

以上のことを使えば,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{|\chi(F_i)|}{\text{vol } F_i} = \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_{j=1}^n f_{j,i} \cdot \chi(P_j) \right|}{\text{vol } F_i}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol } F_i} \cdot \sum_{j=1}^v \left(f_j(r_i) + \frac{1}{v^*} e^{C_1 \cdot 2d + C_2 \cdot \text{vol } \partial F_i} \right) |\chi(E_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^v \left(\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{f_j(r_i)}{\text{vol } F_i} \right) |\chi(E_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{f_j(r_i)}{\text{vol } D_{r_i}(x_0)} \right) \cdot |\chi(E_j)| = 0.
\end{aligned}$$

ゆえに $\lim \chi(F_i)/\text{vol } F_i = 0$ となり, (F, g) の平均 Euler 数は 0 である。□

(2) の証明. 平均 Euler 数の定義におけるような列

$F_1 \subset F_2 \subset \dots$ で (i)(iii) をみたすものがあつたとする。いま

$F_i^* = \bigcup \{K_\lambda \mid F_i \cap K_\lambda \neq \emptyset\}$ とおくと,

$$F_i^* - F_i \subset N_{d^*}^*(\partial F_i)$$

となる。補題 3.2. と同様にして

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol } F_i^* / \text{vol } F_i = 1 \text{ となる。}$$

補題 3.3. $\liminf_{i \rightarrow \infty} \chi(F_i^*) / \text{vol } F_i^* = \liminf_{i \rightarrow \infty} \chi(F_i) / \text{vol } F_i$

証明.

$$\begin{aligned}
&\left| \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\chi(F_i^*)}{\text{vol } F_i^*} - \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\chi(F_i)}{\text{vol } F_i} \right| \\
&\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{|\chi(F_i^*) - \chi(F_i)|}{\text{vol } F_i} \\
&\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{v} \cdot e^{C_1 d^* + C_2} \cdot \frac{\text{vol } \partial F_i}{\text{vol } F_i} = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

さて $\chi_{\min} = \min \{ \chi(P_j) \mid P_j : \text{essentialな周期} \}$ と
おくと仮定より $\chi_{\min} > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\chi(F_i^*)}{\text{vol } F_i^*} &= \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{K_\lambda \subset F_i^*} \chi(K_\lambda)}{\sum_{K_\lambda \subset F_i^*} \text{vol } K_\lambda} \\ &\geq \frac{\chi_{\min}}{V^*} > 0. \end{aligned}$$

ゆえに $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\chi(F_i)}{\text{vol } F_i} = 0$ とはならない。したがって
(F, g) の平均 Euler 数は 0 でない。

§4 主定理

定理 B の拡張として次の結果を得る。

定理 3. M を次元 $2n+1$ (≥ 5) の向きづけ可能な C^∞ 閉多様体とし、 $\mathcal{F}$ を余次元 1 の向きづけ可能な C^∞ 葉層とし F をその葉とする。

$$(1) \quad H_1(M; \mathbb{R}) = 0 \quad (\Leftrightarrow H^{2n}(M; \mathbb{R}) = 0)$$

$$(2) \quad \overline{F} \text{ は有限枚の葉の和} \quad (\Leftrightarrow F: \text{finite depth})$$

と仮定すると, F の平均 Euler 数は 0 である。

証明. まず次のことに注意する。

補題 4.1. 定理 3 の仮定のもとで F' を $\mathcal{F}$ の閉葉とすると, $\chi(F') = 0$ である。

証明. e を $\mathcal{F}$ の Euler form とすると, 仮定 (1) より

e のコホモロジー類は 0 である。したがって

$$\chi(F') = \langle [L^*e], [F'] \rangle = \int_{F'} e = 0$$

となる。ただし $i: F' \subset M$ は包含写像。□

我々の証明のアイデアは基本的に次の土屋 [3, 4] の定理から出ている。

定理 C (N. Tsuchiya) 向きづけ可能な C^∞ 閉多様体上の向きづけ可能な余次元 1 C^∞ 葉層の葉 F が *finite depth* であれば、 F は *tame* である。さらに F は *polynomial growth* である。□

紙数の都合で残念ながら "tame" の定義を省略せざるを得ないが、定理 C およびその証明を詳しくみれば、次の事実が示せる。

補題 4.2. 定理 3 の仮定 (1) はのぞくのもとで、 M のリーマン計量 g を 1 とおけば、 $(F, g|_F)$ は概周期的である。さらにその周期の族 $\{(P_j, g_j)\}_{j=1}^{\nu}$ 、コンパクト多様体被覆 $\{K_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 、 C^∞ 微分同型 $\varphi_\lambda: K_\lambda \rightarrow P_j(\omega)$ 等の組が次のようにとれる。すなわち $j=1, \dots, \nu$ に対して、

$$f_j(r) = \#\{K_\lambda \subset D_r(x_0) \mid j(\lambda) = j\}$$

とおくとき、上の P_j 次多項式 $a_j(r)$, $A_j(r)$ が存在して

$$a_j(r) \leq f_j(r) \leq A_j(r)$$

となり、 F を p 次の *polynomial growth* とするとき、

(イ) 各 j に対し, $p_j \leq p$ であり,

(ロ) 少なくとも 1 つの j に対し, $p_j = p$ となり,

(ハ) $p_j = p$ ならば, F_j は子のあるコンパクトな葉 F_j の余次元 1 閉部分多様体 N_j で F_j を切り開いてできる境界をもつコンパクト多様体 $C(F_j, N_j)$ と同相である。□

さて上の補題を使って F が定理 2 の (1) の条件をみたすことを示す。まず F が p 次の polynomial growth であるから, $\mathbb{R}$ の p 次多項式 $a(r), A(r)$ が存在して

$$a(r) \leq \text{vol } D_r(x_0) \leq A(r)$$

となる。このことから $p_j < p$ をみたす j に対して,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{f_j(r)}{\text{vol } D_r(x_0)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{A_j(r)}{a(r)} = 0$$

となり, $p_j = p$ をみたす j に対しては,

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{f_j(r)}{\text{vol } D_r(x_0)} \geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{a_j(r)}{A(r)} > 0$$

となる。以上より frequent な周期 (P_j, q_j) に対しては, $p_j = p$ となり補題 4.2 (ハ) より

$$\begin{aligned} \chi(P_j) &= \chi(C(F_j, N_j)) \\ &= \chi(F_j) + 2\chi(N_j) - \chi(N_j \times [0, 1]) \\ &= \chi(F_j) \quad (\because N_j \text{ は奇数次元閉多様体}) \\ &= 0 \quad (\because F_j \text{ は子のコンパクトな葉}) \end{aligned}$$

を得る。ゆえに定理2(1)により F の平均 Euler 数は 0 である。(定理3の証明終り) $\square$

§5. 予想

定理2の(2)を使えば, §1の例に S^{2n} をかけたもののうち, (a) $\times S^{2n}$, (b) $\times S^{2n}$, (c) $\times S^{2n}$ は平均 Euler 数が 0 でないことが示せる。(d) $\times S^{2n}$ については $S^3 \times S^{2n}$ のある余次元1葉層の finite depth の葉として実現されることが前述の Cantwell-Conlon [1] の結果よりわかる。このことより我々の平均 Euler 数の定義と定理3が non-trivial であることがわかる。さらに定理1, 2, 3 とその証明をみれば我々の平均 Euler 数の定義が妥当であると思えてくる。そこで我々は次のように予想する。

予想 定理3の条件(2)を次の条件

(2') " F は non-exponential growth である"

に替えても F の平均 Euler 数は 0 であろう。

参考文献

- [1] Cantwell-Conlon, Leaves with isolated ends in foliated 3-manifolds, Topology 16 (1977), 311-322.

- [2] Phillips-Sullivan, *Geometry of leaves*, *Topology* 20 (1981), 209-218.
- [3] N. Tsuchiya, *Growth and depth of leaves*, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA* 26 (1979), 473-500.
- [4] N. Tsuchiya, *Leaves of finite depth*, *Japan J. Math.* 6 (1980), 343-364.