

On the Bernoulli numbers and the circular
units of cyclotomic fields

佐賀大 理工 上原 健

§1. p を奇素数, ζ を 1 の原始 p 乗根とし正整数 n に対して ζ_n を $\zeta_n^p = \zeta_{n-1}$, $\zeta_0 = \zeta$ によって定義する。 p 分体 $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上のガロワ群を G とする。 $(a, p) = 1$ となる $a \in \mathbb{Z}$ (有理整数環) に対して $\zeta^{\sigma_a} = \zeta^a$ で定まる G に含まれる自己同型 σ_a が存在する。 G の指標の値は p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ に含まれるものとする。 G の指標 χ を $(a, p) = 1$ である $a \in \mathbb{Z}$ に対して $\chi(a) = \chi(\sigma_a)$ となる $\text{mod } p$ の Dirichlet 指標 χ と同一視する。 $(a, p) = 1$ となる $a \in \mathbb{Z}$ に対して $\omega(\sigma_a) \equiv a \pmod{p}$ であるような G の指標 ω が存在し G の指標群を生成する。 σ_a を $\zeta_n^{\sigma_a} = \zeta_n^{\omega(a)}$ で定まる $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ の自己同型 σ_a と同一視する。

B_χ を G の指標 χ に対する 1 次の Bernoulli 数, あるいは $B_\chi = p^{-1} \sum_{a=1}^{p-1} a \chi(a)$ とする。 v を $v(p) = p^{-1}$

となる $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の付値とし, $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ に対して $\text{ord}_p(\beta)$ を $v(\beta) = p - \text{ord}_p(\beta)$ で定義する。ここで G の奇指標 χ に対して $e_\chi = \text{ord}_p(B_{\chi^{-1}})$ と定義すれば, よく知られているように $e_\chi \in \mathbb{Z}$, $e_\omega = -1$, $\chi \neq \omega$ ならば $e_\chi \geq 0$ である。

χ を G の指標とし $\varepsilon_\chi = \frac{1}{p-1} \sum_{\sigma \in G} \chi^{-1}(\sigma) \sigma$ と置く。これは G の p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上の群環 $R = \mathbb{Z}_p[G]$ に含まれる。 ψ を G の non-trivial な偶指標とし, $\mu_\psi = \sum_{a=1}^{p-1} m_a \sigma_a \in \mathbb{Z}[G]$ を次の様にする:
 $\sum_{a=1}^{p-1} m_a = 0$ かつ十分大きな k に対して $\mu_\psi \equiv \varepsilon_\psi \pmod{p^k R}$ 。
 このとき $(1-\zeta)^{\mu_\psi}$ は K の円単数であり, $\log_p (1-\zeta)^{\mu_\psi} \equiv \frac{1}{p-1} \sum_{a \bmod p} \psi^{-1}(a) \log_p (1-\zeta^{-a}) \pmod{p^k \mathbb{Z}_p}$ が成立する, ただし $\log_p$ は p 進対数関数である。ここで $d_\psi = \text{ord}_p(\log_p (1-\zeta)^{\mu_\psi})$ は k に無関係に定まる。同様に $n \geq 1$ に対しても

$d_\psi^{(n)} = \text{ord}_p(\log_p (1-\zeta_n)^{\mu_\psi})$ が定義できる。

p 進 L 関数の連続性より, G の non-trivial な偶指標 ψ に対して

$$B_{\psi\omega^{-1}} \equiv \frac{\tau(\psi)}{p} \sum_{a=1}^p \psi^{-1}(a) \log_p (1-\zeta^{-a}) \pmod{p}$$

が成立する, ただし $\tau(\psi) = \sum_{a=1}^{p-1} \psi(a) \zeta^a$ である。

これよりあぐに $e_{\psi^{-1}\omega} \geq 1 \Leftrightarrow d_{\psi} > 1$ がわかる。この
 ような関係を深めたい。ここでは $e_{\psi^{-1}\omega}$ と $d_{\psi}^{(n)}$ の間に
 成立する関係について述べる。

§ 2. η を K_n の単数, ω を K_n のイデアルとす
 る。 $\text{mod } p^{n+1}$ で定まる整数 $[\eta, \omega]_n$ を

$$[\eta, \omega]_n = \left(\frac{\eta}{\omega}\right)_n$$
 で定義する。ここで $\left(\frac{\eta}{\omega}\right)_n$ は
 η と ω に対する p^{n+1} 巾剰余記号である。さて、次の
 補題は Iwasawa [2] の結果の類似である。

補題 1. ω を K のイデアルで、ある整数 $k \geq 0$ によ
 って $\omega^{p^k} = (\alpha)$ となるものとする、ただし α は K の
 整数で $\alpha \equiv 1 \pmod{(1-\zeta)}$ を満たすものとする。 χ を
 G の non-trivial な偶指標とし $\chi = \psi^{-1}\omega$ と置く。
 $u \in \mathbb{Q}_p$ を $\varepsilon_{\chi}(\log \alpha) = u \tau(\chi^{-1})$ で定義する。
 このとき $n \geq 1$ に対して

$$[(1-\zeta)_n]^{\mu_{\chi}}, \omega]_n \equiv -\frac{u B_{\chi^{-1}}}{p^k} \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p}$$

が成立する。

(証明) 次の変形が成立する。

$$\left(\frac{(1-j_n)^{\mu_4}}{\alpha} \right)_n = \left(\frac{(1-j_{n+k})^{\mu_4}}{\alpha} \right)_{n+k}^{p^k} = \left(\frac{(1-j_{n+k})^{\mu_4}}{\alpha} \right)_{n+k}$$

ここで Artin-Hasse の定理 [1] より

$$\left(\frac{(1-j_{n+k})^{\mu_4}}{\alpha} \right)_{n+k} = \sum_{n+k} p^{-1} T \left(-\frac{j}{1-j} \log_p \alpha \right)$$

を得る, ただし T は $\mathbb{Q}_p(j)$ から $\mathbb{Q}$ への trace を表わす。これより

$$\begin{aligned} [(1-j_n)^{\mu_4}, \alpha]_n &\equiv \frac{1}{p^k} [(1-j_{n+k})^{\mu_4}, \alpha]_{n+k} \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p} \\ &\equiv \frac{1}{p^{k+1}} T \left(\varepsilon_{4\omega} \left(-\frac{j}{1-j} \log_p \alpha \right) \right) \pmod{p^{n+1}\mathbb{Z}_p} \end{aligned}$$

が成立する。 [2] より

$$T \left(\varepsilon_{\chi^{-1}} \left(-\frac{j}{1-j} \log_p \alpha \right) \right) = -u_p B_{\chi^{-1}}$$

であるから, これより補題を得る。

補題2. G の奇指標 χ ($\chi \neq \omega$) に対して
 $\text{ord}_p \varepsilon_\chi(\log_p \alpha) = \text{ord}_p \varepsilon(\chi^{-1})$, $\alpha \equiv 1 \pmod{(1-j)}$
 を満たす k の整数 α が存在する。

(証明) 任意の $\sigma \in G$ について $\sigma(\pi) = \omega(\alpha)\pi$ であり, $\text{ord}_p \pi = \frac{1}{p-1}$ となる $\pi \in \mathbb{Q}_p(\zeta)$ が存在する。

$\chi = \omega^i$, $3 \leq i \leq p-2$ と置けば $\text{ord}_p(\tau(\chi^i)) = \frac{i}{p-1}$ である。ここで K の整数 α を

$\alpha \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \pi^i k \pmod{p\mathbb{Z}_p[\zeta]}$ となるようにとれば

$$\sum \omega^i (\log_p \alpha) \equiv \sum_{\alpha=1}^{p-1} \omega^{-i}(\alpha) \sigma_{\alpha}(\pi^i) \pmod{p\mathbb{Z}_p[\zeta]}$$

$$\equiv -\pi^i \pmod{p\mathbb{Z}_p[\zeta]}.$$

これより補題を得る。

定理. n を正整数, ψ を G の non-trivial な偶指標とするとき, もし $d_{\psi}^{(m)} > n+1$ ならば

$e_{\psi} \omega \geq n+1$ である。

(証明) $\text{ord}_p((1-\zeta_n)^{M_{\psi}}) > n+1$ であるならば, Kummer 拡大の理論より $K_n((1-\zeta_n)^{M_{\psi}})^{\frac{1}{p^{n+1}}}$ は K_n 上不分岐な拡大であり, よって K の整数 α に対して

$$\left(\frac{(1-\zeta_n)^{M_{\psi}}}{\alpha} \right)_n = 1$$

である。 α として特に補題2の条件を満たすようにとれ

ば, 補題1より

$$u B_{\psi^{-1}\omega} \equiv 0 \pmod{p^{n+1} \mathbb{Z}_p}$$

が成立する。今の場合 $\text{ord}_p u = 0$ であるから

$e_{\psi^{-1}\omega} \geq n+1$ を得る。

参考文献

- [1] E. Artin, H. Hasse, Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der ℓ^n -ten Potenzreste im Körper der ℓ^n -ten Einheitswurzeln, Abh. Math. Sem. (Hamburg) 6, 146-162(1928).
- [2] K. Iwasawa, A note on cyclotomic fields, Inventiones math. 36, 115-123(1976).