

ある準線形双曲型方程式の初期- 境界値問題の解の大域的存在

京大 工 西田孝明

§1. 序

準線形双曲型方程式系の初期値(=境界値)問題を時間について大域的に考えると、一般には滑らかな解が存在しないことはよく知られている。そのため一般化された(不連続な)解を考えねばならない。このような大域解の存在について、単独方程式の場合には、Hopf [1] に初め、[2][3][4] 等がある。方程式系の場合、初期値に各種の制限をかけた時の解の存在について、Riemann [5] を初めとして [6]~[14] 等がある。

ここでは、次の方程式の場合に一般な初期値、境界値について一般化された解の大域的存在を考える。

0+

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a^2}{v} \right) = 0 \end{cases}$$

この系は 気体の比体積 v , 速度 u とした時の状態方程式 $p = a^2/v$, $a = \text{定数}$ と与えられる場合の質量・運動量保存の Lagrange 形式で書いたものである。

初期値は $-\infty < x < +\infty$ 上

$$(2) \quad v(0, x) = v_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x)$$

初期値-境界値は

$$(3) \quad \begin{cases} v(0, x) = v_0(x), \quad u(0, x) = u_0(x) & x \geq 0 \\ u(t, 0) = u_1(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

と与える。 $v_0(x), u_0(x), u_1(t)$ は有界な可微分可能な関数で $v_0(x) \geq \delta = \text{定数} > 0$ とする。

この問題は (2) は初期値問題、問題 (1)(3) は混合問題である。この問題を解くには Glimm の差分法 [13] を用いる。

3.2 初期値問題

初期値問題 (1)(2) の一般化として解 v, u の定義は

$v(t, x), u(t, x)$ は 有界可微関数で $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ の積分方程式を

$$(4) \quad \int_{t=0}^t (v f_t - u f_x) dt dx + \int_{x=0}^x v_0(x) f(0, x) dx = 0$$

$$\int_{t=0}^t (u g_t + \left(\frac{a^2}{v}\right) g_x) dt dx + \int_{x=0}^x u_0(x) g(0, x) dx = 0$$

但し $f(t, x), g(t, x)$ は 有界な連続的微分可能な三変数関数

方程式系 (1) は $v > 0$ の双曲型である (固有値

と λ に対応する Riemann invariants, 非線形性はない) である。

$$\lambda = -\frac{a}{v}, \quad r = u + a \log v$$

$$(5) \quad \mu = \frac{a}{v}, \quad s = u - a \log v$$

$$\partial \lambda / \partial r = \partial \mu / \partial s = (1/2a) \exp\{-(r-s)/2a\} > 0$$

Riemann 問題 RPS 系 (1) の初期値問題は

$$(6) \quad v_0(x) = \begin{cases} v_- & x < 0 \\ v_+ & x > 0 \end{cases} \quad u_0(x) = \begin{cases} u_- & x < 0 \\ u_+ & x > 0 \end{cases}$$

$= = z$ $v_{\mp}, u_{\mp}$ は定数, $\sigma_{\mp} > 0$,

の場合の初期値問題について.

補題 1

Riemann 問題 (1) (6) は 区分的に連続, 区分的に滑らかな解 $v(t, x), u(t, x)$ をもち, 次の a priori 評価が成り立つ。

$$(7) \quad r(v(t, x), u(t, x)) \geq r_0, \quad s(v(t, x), u(t, x)) \leq s_0,$$

$$\text{但} \quad r_0 = \min \{ r(v_-, u_-), r(v_+, u_+) \}, \quad s_0 = \max \{ s(v_-, u_-), s(v_+, u_+) \}$$

補題 2

(r, s) 平面において 衝撃波曲線は 同一形をもつ。

即ち 点 (r_0, s_0) から出る每一种衝撃波は

$$(8.1) \quad s - s_0 = f(r - r_0) \quad r \leq r_0$$

と表わされ, 每一种衝撃波は

$$(8.2) \quad r_0 - r = f(s_0 - s) \quad s \leq s_0$$

と表わされる。但し 函数 $f(r)$ は r の奇関数であり、
 1) 始点 (r_0, s_0) に依存せず, $0 \leq f'(r) \leq 1$,
 $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ である。

== 2° Glimm の差分法を用いる。

初期値 (2) の階段関数を近似する

$$(9) \quad v^l(0, x) = v_0(ml), \quad u^l(0, x) = u_0(ml)$$

$$(m-1)l < x < (m+1)l, \quad v_l > 0, \quad m: \text{偶数}$$

次に定義する。

$$r_0 = \inf_{-\infty < x < +\infty} r(v_0(x), u_0(x)), \quad s_0 = \sup_{-\infty < x < +\infty} s(v_0(x), u_0(x))$$

$$(10) \quad \frac{r}{l} = \exp\{(r_0 - s_0)/2a\}/a$$

$$(11) \quad \begin{cases} Y = \{(m, n), m, n \text{ 整数}, m-n \text{ 奇数}, n \geq 1\} \\ A = \prod_{(m,n) \in Y} [(m-1)l, (m+1)l) \times (n\bar{a})] \end{cases}$$

== 3° A の右因子は (t, x) 平面の x 軸に平行な線分

である。以下、点 $a = (a_{m,n}) \in A$ を三度点または

格子点と云う。 $a_{m_0} = m_0 \bar{a} = (2n-1)$ 。

$$\text{近似解 } v^l = v^l(-, x), \quad u^l = u^l(-, x), \quad t = t^l(-, x)$$

$x, t = a_{m-1, n-1}, a_{m+1, n-1}$ で定義区間 $I \sim T_0$ とする。

関数 v, u は初期値から $x < ml, x > ml$ まで

$$v(x, (n-1)h) = \begin{cases} v^l(a_{m-1, n-1}) \\ v^l(a_{m+1, n-1}) \end{cases}, \quad u(x, (n-1)h) = \begin{cases} u^l(a_{m-1, n-1}) \\ u^l(a_{m+1, n-1}) \end{cases}$$

である Riemann 問題は (1) の解とする。

$$v^l(a_{mn}) = v(a_{mn}), \quad u^l(a_{mn}) = u(a_{mn})$$

とあり $(m-1)h \leq x \leq (m+1)h, (n-1)h \leq t < nh$ に対して

$$v^l = v(t, x), \quad u^l = u(t, x)$$

とあり m は整数であるから v^l, u^l は

$(n-1)h \leq t < nh$ での一般化された解を与えよう。

というわけは $x = (m \mp 1)h$ の近くでは補題 1 と

$$(10) \text{ と } (1) \text{ から } v^l = v^l(a_{m \mp 1, n-1}), \quad u^l = u^l(a_{m \mp 1, n-1})$$

なる定数であるから。

したがって $\forall h > 0$ に対して近似解 v^l, u^l が

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T \quad \text{で定義される。}$$

近似解 v^l, u^l の適当な部分列が収束する = とを見る
ためには、次の補題を用いる。その証明には補題 1, 2 を
用いる。

補題 3

$$(12) \quad F(J_2) \leq F(J_1)$$

但 J_i ($i=1,2$) は格子点 $a_{m-1,n}, a_{m,n-1}, a_{m+1,n}$
(あるいは $a_{m-1,n}, a_{m,n+1}, a_{m+1,n}$) を結ぶ線分である。

$$F(J_i) = \sum_{J_i} (\Delta r + \Delta s)$$

但 Δr (あるいは Δs) は、 γ -種 (あるいは γ -種) の衝撃波に対する Riemann invariant r (あるいは s) の変動。 $\sum_{J_i}$ は J_i 上でのすべての衝撃波についての和。

補題 1 の評価, (10) の k, l の選ぶ方による有限伝播速度をもつことと補題 3 とによる二次評価とをうる。

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tot. var. } \{v^l, u^l\} \leq C \cdot \text{tot. var. } \{v^l, u^l\} \\ t=t_0, |x| \leq X \\ t=0, |x| \leq X+Ct_0 \\ \\ \exp(r_0-s_0)/2a \leq v^l(t, X) \\ \leq v_0(X-Ct) + C \cdot \text{tot. var. } \{v^l\} \leq C \\ t=0, X-Ct \leq x \leq X+Ct \\ \\ |u^l(t, X)| \leq |u_0(X-Ct)| + C \cdot \text{tot. var. } \{u^l\} \leq C \\ t=0, X-Ct \leq x \leq X+Ct \end{array} \right.$$

以上により v^2, u^2 の 適当な部分列は $L_{loc}(t \geq 0, -\infty < x < \infty)$ に収束し、その極限関数が $\bar{u}$ の解である。

定理 1

初期値問題 (1)(2) は、 $t \geq 0$ で一般化された解 $\bar{u}$ をもつ。
すなわち $t = \text{定数}$ 上、 x につき局所的に有界、局所的に有界変動関数で、 $t \rightarrow \{v^2, u^2\}$ は $L_{loc}^1(-\infty < x < \infty)$ の関数として連続である。

3.3 Green 問題

初期-境界値問題 (1)(3) の一般化した解の定義

$v(t, x), u(t, x)$ は $t \geq 0, x \geq 0$ で有界可微分であり、次の積分等式を満たす。

$$(14) \quad \iint_{t \geq 0, x \geq 0} (v f_t - u f_x) dt dx + \int_0^\infty v_0(x) f(0, x) dx + \int_0^\infty u_1(t) f(t, 0) dt = 0 \quad \text{for } \forall f \in \dot{C}^1,$$

$$\iint_{t \geq 0, x \geq 0} (u q_t + \frac{a^2}{c} q_x) dt dx + \int_0^\infty u_0(x) q(0, x) dx = 0 \quad \text{for } \forall q \in \dot{C}^1, \quad q(t, 0) = 0$$

まず $t \geq 0, x \geq 0$ での初期値, 境界値は

$$(15) \quad \begin{cases} v(0, x) = v_+, & u(0, x) = u_+ & x > 0 \\ u(t, 0) = u_- & & t > 0 \end{cases}$$

但 v_+, u_+ は定数で $v_+ > 0$

方程式 (1) を解くと次を得る。

補題 4

問題 (1) (15) は $t \geq 0, x \geq 0$ で区分的に連続, 区分的に滑らかな一般化 Riemann 解をもつ。この解は次の a priori 評価をもつ。

$$r(t, x) \equiv r(v(t, x), u(t, x)) \geq r(v_+, u_+) \equiv r_+,$$

$$s(t, x) \leq \max \{ s_+ \equiv s(v_+, u_+), 2u_- - r_+ \},$$

$$\Delta s \leq C |u_+ - u_-| \equiv C \Delta u,$$

但 Δs は解に現れる波 = 種衝撃波に於ける Riemann invariant s の変動量。 C は $T - \delta$ に依る定数

次の量を定義する

$$r_0 = \inf_{x \geq 0} r(v_0(x), u_0(x))$$

$$s_0 = \max \left\{ \sup_{x \geq 0} s(v_0(x), u_0(x)), 2 \sup_{0 \leq t \leq T} u_1(t) - r_0 \right\}$$

Glimm の差分法を少し変形しよう。

$$\begin{cases} Y = \{ (m, n) : m = 0, 2, 4, \dots, n = 1, 2, 3, \dots \} \\ A = \prod_{(m, n) \in Y} [(m, (m+2)l) \times \{ n h \}] \end{cases}$$

$$= z : r/l = \exp\{(r_0 - s_0)/2a\}/a, \quad \forall l > 0$$

格子点 $a = \{ a_{m,n} \} \in A$ は (注意: 壁と補題 1 と補題 4 とから) 上の差分法は $0 \leq t \leq \forall T, 0 \leq x \leq z$ 近似解 v^l, u^l を与える。

線分 J_n の変り = なるような space-like な曲線は定義する。

$$i_m^{n-} \text{ (あるいは } i_m^{n+} \text{)}, \quad m = 2, 4, \dots \quad \text{とは 格子点}$$

$a_{m-2,n}, a_{m,n}$ を結ぶ滑らかな space like な曲線 z

$(n-1)h < t \leq nh$ (あるいは $nh \leq t < (n+1)h$) である点 (nh, ml) は通らないとすることができる。

$i_0^{n\pm}$ は 点 $(nh \pm h/2, 0)$ と 格子点 $a_{0,n}$ とを結ぶ線分とすることができる。

補題 5.

$$(16) \quad \begin{cases} F(i_m^{n+}) \leq F(i_m^{n-}) & m = 2, 4, \dots \\ F(i_0^{n+}) \leq F(i_0^{n-}) + C \cdot \Delta u_1 & m = 0 \end{cases}$$

$= 2$. $F(\cdot)$ は 補題 3 のと同じとし.

$$\Delta u_1 = |u_1(nh + h/2) - u_1(nh - h/2)|.$$

$=$ 補題によつて、近似解 v^h, u^h に対する望みの評価の
 同様に得られる。即ち u^h の全変動量の局所的な有界性
 により、局所的な一様有界性が得られ、次に v^h の
 それらを得られる。これより v^h, u^h の適当な部分列は
 $L^1_{loc}(t \geq 0, x \geq 0)$ で収束し、その極限関数が求める
 解である。

定理 2

コスト = 問題 (1), (3) は $t \geq 0, x \geq 0$ で一般化され
 解 v, u を持ち、それは局所的に有界、 $t = \text{定数}$
 上 $x \mapsto v, u$ は局所的に有界変動関数であり、 $t \mapsto \{v, u\}$
 は $L^1_{loc}(0 \leq x)$ の意味で連続である。

文献

- [1] E. Hopf : The partial differential equation

$$u_t + u u_x = \mu u_{xx}$$

Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950) 201-230

- [2] P. Lax : Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation.

Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954) 159-193

- [3] O. Oleinik : Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Uspekhi Mat. Nauk 12

(1957) 3-73

- [4] E. Conway & J. Smoller : Global solutions of the Cauchy problem for quasilinear first order equations in several space variables

Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966) 95-105

- [5] B. Riemann : Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungswerte

Abh. König. Gesellsch. Wiss. zu Göttingen (8) 1860

- [6] P. Lax : Hyperbolic systems of conservation laws II

Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957) 537-566

- [7] B. Rozhdestvenskii : Discontinuous solutions
hyperbolic systems of quasilinear equations.
Uspekhi Mat. Nauk (1959) 53-111
- [8] Zhang Tong & Guo Yu-Fa : A class of initial
value problems for systems of aerodynamic
equations, Chinese Math., 7(1965) 90-101
- [9] J. Smoller & J. Johnson : Global solutions of
hyperbolic systems of conservation laws in two
dependent variables,
Bull. of Amer. Math. Soc. 74 (1968) 5, 915-918
- [10] J. Johnson : Global continuous solutions of
hyperbolic systems of quasilinear equations
Ph. D. thesis, University of Michigan, 1967
- [11] M. Yamaguti & T. Nishida : On some global
solution for quasilinear hyperbolic equations
Funkcialaj Ekvacioj, 11 (1968) 51-57
- [12] S. Godunov : Estimates of discrepancies for
approximate solutions of the simplest equation
in gas dynamics,
J. of Num. Math. Math. Phys. 1 (1961) 622-637

- [13] J. Glimm : Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations ,
Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 697-715
- [14] J. Glimm & P. Lax : Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws ,
Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 105