

行列の加法的数論にあらわれる Dirichlet 級数について

江上 繁樹

Shigeki EGAMI

§0 正値対称行列の加法的数論を、代数体の加法的数論のアナロジーとみる考え方は三井 [M] で展開されており、それに従えば、代数体の場合、有効であった種々の解析的手段の行列の場合の類似を求めることが重要になる。[M] の序文にはそのような例として Dirichlet 級数

$$\sum_{\substack{T \in S_n(\mathbb{Z}) \\ T > 0}} \frac{1}{\det(T)^s}$$

$$S_n(\mathbb{Z}) = \{X \in M_n(\mathbb{Z}) \mid {}^t X = X\} \quad (1)$$

$T > 0$ は「 T が正定値」をあらわす

の解析接続の問題があげられている。この級数は行列の分割数を、代数体の場合と同じような方法で取り扱おうとするとき、自然にあらわれるものであり、代数体の場合、特に二次体 K の場合、対応する級数は Hecke によってくわしく研究されたもの $\sum_{\alpha \in \mathcal{O}_K, \alpha, \alpha' > 0} (\alpha + \alpha')^{-s}$

* 本研究は科学研 究費補助金 (一般研究 (C), No. 05640023) を受けた。

ただし、 $\mathcal{O}_K$ は K の整数環、 α は α の共役元、
 になる。Hecke はこの級数を K の単数群に関する Fourier
 解析を応用することにより研究し、全 s -平面への解析
 接続を示した。同様のことを (1) に対して行なおうと
 すれば、 $g \in SL_n(\mathbb{R})$ のパラメータを導入し

$$F(s, g) = \sum_{\substack{T \in SL_n(\mathbb{Z}) \\ T > 0}} \frac{1}{\text{tr}(g^T \pi(g))}^s \quad (3)$$

を考えることになる。容易にわかるように $F(s, g)$ は右 $SO_n(\mathbb{R})$
 不変な $SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ の保型関数となり、 $L^2(SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z}))$
 のスペクトル分解が Fourier 解析の自然な対応物と
 考えられる。この考え方を完全に実行するにはまだいくつ
 かの困難が予想され、実際、(1) の解析接続の問題は
 どんな $n \geq 2$ に対しても解決されていない。この小論では
 $n=2$ の場合で、 $S_2(\mathbb{Z})$ のかわりにある条件をみたす 2 次
 対称行列空間の lattice をとったものを考える (残念
 ながら $S_2(\mathbb{Z})$ の場合は除外される)。このとき、解析接続
 の問題が上のような考え方で実際解決される。以下で
 その概略を見ることにしよう。

§1.

$$S = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid {}^tX = X\}$$

$X \in S$ に $\lambda \neq 0$ に対し $X > 0$ で X が正定値であることを表わす。

$$S^{(0)} = \{X \in S \mid \det X > 0\}$$

$$S^{(1)} = \{X \in S \mid \det X < 0\}$$

また、

$$S_+^{(0)} = \{X \in S^{(0)} \mid X > 0\}$$

$$S_-^{(0)} = \{X \in S^{(0)} \mid -X > 0\}$$

とかく、 S には $G = SL_2(\mathbb{R})$ から $X \mapsto {}^tgXg$ で作用

する。 $L \in S$ の lattice とするとき $\text{Aut}(L) = \{g \in G \mid {}^tgLg = L\}$

とする。 L に対して、仮定

(*) $G/\text{Aut}(L)$ は compact

を置く。 $L = S_2(\mathbb{Z})$ (対称整数行列全体) のときは $\text{Aut}(L)$

$= SL_2(\mathbb{Z})$ となり、この条件をみたす。 また、(*) をみたす

例として、 $g, r \in \mathbb{N}$ が条件

$$x^2 - gy^2 - rz^2 + gr u^2 \neq 0 \quad (x, y, z, u) \in \mathbb{Z}^4 \setminus \{0\}$$

をみたすとき

$$L_{g,r} = \left\{ \begin{pmatrix} x - \sqrt{g}y & \sqrt{r}z \\ \sqrt{r}z & x + \sqrt{g}y \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

がそうなる。 ($[H^2]$, ...)

いま、 $\Gamma \in \text{Aut}(L)$ の指数有限の任意の部分群とし、固定

する。 (*) のかわりに、 " G/Γ は compact" といっても同じ

である。

級数

$$F(s, g, L) = \sum_{x \in L \cap S_+^{(0)}} \frac{1}{\text{tr}(tg \times g)^s}$$

と考える。この級数が $\text{Re } s > 3$ で絶対かつ広義一様に収束すること、 $\text{Re } s > 2$ で $s=3$ における 1 位の極を除いて正則な関数に解析接続されることは格子点に関する初等的考察より容易にわかる。また、明らかに

$$F(s, r g k, L) = F(s, g, L), \quad \forall k \in SO_2(\mathbb{R}), r \in \Gamma.$$

$$\text{また, } F(s, \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}, L) = f(s, x+iy, L) \quad \text{とあくと}$$

$$f(s, z, L) \in L^2(\Gamma \backslash H) \quad (H \text{ は複素上半平面}) \text{ かわかる.}$$

§2. $L^2(\Gamma \backslash H)$ のスペクトル分解の応用

$\Gamma \backslash H$ 上の関数 $f(z), g(z)$ に対し、内積を

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma \backslash H} f(z) \overline{g(z)} \frac{dx dy}{y^2}$$

とあく。 $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle < \infty$ とする関数全体は Hilbert 空間 $L^2(\Gamma \backslash H)$ をなし、その正規直交基底として、次のような関数の列 $\{\varphi_n\}$ をとれる。 ([H1], p3~4) ,

① $\varphi_n(x+iy)$ は x, y について実解析的, $\varphi_0 \equiv \left(\int_{P \setminus H} \frac{dx dy}{y^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$

② $\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ とおくとき, $\Delta \varphi_n = -r_n \varphi_n$

とある非負実数 λ_n が存在し, $0 = r_0 < r_1 \leq \dots \leq r_n \leq \dots$

③ $u(z) \in L^2(P \setminus H) \cap C^2(P \setminus H)$ のとき, Fourier 展開

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n(z)$$

は $P \setminus H$ 上 一様絶対収束する.

これを $f(s, z, L)$ ($\text{Re } s > 3$) に適用する. Fourier 係数は Selberg 変換を適用して, 次のように計算される.

Prop. 1.

$$\langle f(s, \cdot, L), \varphi_n \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \Gamma(s)} \Gamma\left(\frac{s-\lambda_n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-1+\lambda_n}{2}\right) \zeta_+(s, L, \varphi_n)$$

ただし, $\lambda_n = \frac{1}{2} - i\sqrt{r_n - \frac{1}{4}}$, また $\zeta_+(s, L, \varphi_n)$ は次節で定義されるゼータ関数である.

§3. 対称行列の保型形式つきゼータ関数

佐藤 [Sa1] [Sa2] の結果を引用する.

H と $D = \{X \in S_+^{(n)} \mid \det X = 1\}$ と対応を

$$X = \begin{pmatrix} -y + \frac{x^2}{y} & \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y} & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \longleftrightarrow z_X = x + iy$$

により与える。同値関係 $X_1 \sim X_2 \iff {}^t r X_1 r = X_2 \exists r \in \Gamma$

による L の Γ -不変部分集合 L' の同値類の代表系を

$\Gamma \backslash L'$ で表わす。 $X \in L \cap S_+^{(n)}$ に対し、 $\varepsilon(X) = \#\{r \in \Gamma \mid {}^t r X r = X\}$

と置く。

$$\zeta_+(s, L, \varphi_n) = \sum_{\Gamma \backslash L \cap S_+^{(n)}} \frac{\varphi_n(z_X)}{\varepsilon(X) \det(X)^s}$$

と置く。このようなゼータ関数は Siegel [Si], Maass [Ma], 新谷 [Sh]

Hejhal [H2], 佐藤 [Sa1], [Sa2], [Sa3] によって研究された。これ

について述べるため、記号を準備する。 S において、内積

$$\langle X, X^* \rangle = \text{tr}(X w X^* w^{-1}), \quad t=t^{-1}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{を考へ。}$$

この内積に関する L の dual lattice を L^* と置く。 $X \in L \cap S^{(n)}$

$$\text{に対し, } (\det X)^{-\frac{1}{2}} X = g_X J_2 {}^t g_X, \quad t=t^{-1}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となるような G の πg_X をとると、これは $SO_2(1,1)$ の右剰余類

として一意に定まる。 $g_X^{-1} \Gamma_X g_X$ は $SO_2(1,1)$ の部分群に

なり。 $SO_2(1,1)/g_X^{-1} \Gamma_X g_X$ の基本領域として、ある正実数

p_X が存在して、 $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid 1 \leq a \leq p_X \right\}$ の π のものか

とれる。このとき、 $M_X(\varphi_n)$ を

$$M_X \varphi_n = \frac{1}{4} \int_1^{P_X} \varphi_n(t g_X^{-1} i) \frac{dt}{t}$$

と置く. して, Zeta 関数 $\zeta_{\pm}(s, \varphi_n, L)$ を

$$\zeta_{\pm}(s, \varphi_n, L) = \sum_{P \setminus L \cap S^{\infty}} \frac{M_X \varphi_n}{|\det X|^s} \quad (\operatorname{Re} s > \frac{3}{2})$$

と定義する. また同様に $\zeta_{\pm}(s, \varphi_n, L^*)$ が定義される. これらによって, 全平面に有理型に解析接続され, さらに

Prop. 3. (Siegel - Maass - Shintani - Hejhal - Sato)

$$\begin{aligned} v(L) \begin{pmatrix} \zeta_{+}(\frac{3}{2}-s, \varphi_n, L) \\ \zeta_{-}(\frac{3}{2}-s, \varphi_n, L) \end{pmatrix} &= 2^{1-2s} \pi^{\frac{1}{2}-2s} \Gamma(s + \frac{\lambda_n - 1}{2}) \Gamma(s - \frac{\lambda_n}{2}) \\ &\times \begin{pmatrix} \cos \pi s & \frac{\pi \Gamma(1 - \frac{\lambda_n}{2}) \sin(\frac{\pi \lambda_n}{2})}{2^{\lambda_n} \Gamma(1 - \lambda_n)} \\ \frac{2^{\lambda_n} \Gamma(1 - \lambda_n)}{\pi \Gamma(1 - \frac{\lambda_n}{2})^2} \cos(\frac{\pi \lambda_n}{2}) & \sin(\pi s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{+}(s, \varphi_n, L^*) \\ \zeta_{-}(s, \varphi_n, L^*) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\alpha_n = \max_{z \in P \setminus H} |\varphi_n(z)|$ とおくと, $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$ には

$$\zeta_{\pm}(s, \varphi_n, L) \ll \alpha_n$$

上の関数等式と Phragmén-Lindelöf 定理により.

Cor. 任意の帯領域 $C_1 \leq \operatorname{Re} s \leq C_2$ について, ある $C > 0$ が存在 ($\frac{3}{2}$ の近傍は除く)

$$\zeta_{+}(s, \varphi_n, L) \ll \alpha_n (\operatorname{Im} s)^C$$

§3. α_n の評価と主定理.

Fourier 展開の収束のため, α_n を評価しなければなら
ないが, Selberg 核関数 とうまく選び, Fourier 展開を
考えることにより, 次の評価を得る.

Prop. 4. 任意の $\nu > 0$ に対し

$$\alpha_n \ll \frac{1}{\nu} |n|^{-\nu} e^{\frac{\pi}{2} \sqrt{|n|}}$$

注. 最近, Iwaniec 氏がこの種の はるかによい評価を
得ていることを本稿氏に教示いただいたこと.

Prop. 1 ~ 4 により, 極を除いた任意の領域で Fourier
展開が広義一様収束することが示され, 次の得る.

Theorem. $f(s, z)$ は全 s -平面に有理型に解析接続
される.

後記. 級数 (1) の解析接続の問題は, 1982 年 (頃?)
三井先生の数学会での講演の中で述べられました. 佐藤 (文)
氏は保型形式 (2) として考えることの重要性を指摘されました.
また, 佐藤, 荒川 両氏には, 対称行列のセータ関数や
関連する話題について多くの教示をいただいたこと, 深く感謝
いたします.

References

- [H1]. D.A. Hejhal, The Selberg trace formula for $PGL(2, \mathbb{R})$, Springer Lecture Note 548.
- [H2]. ———, Proc. Jap. Acad., 58 (1982), 413–417
- [Ma]. H. Maass, Math. Ann 138 (1959), 287–315
- [Mi]. T. Mitsui, 学習院大レクチャーノート 1983.
- [Sa1] F. Sato, 2行2列対称行列空間の保型形式
つきゼータ関数 (preprint, 1993)
- [Sa2] ———, Zeta functions of prehomogeneous
vector spaces with coefficients related to periods of
automorphic forms (preprint, 1993)
- [Sa3] ———, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (1982), 585–604.
- [Sh]. T. Shintani, J. Fac. Sci. Univ Tokyo 22 (1975),
25–65.
- [Si]. C.L. Siegel, Math. Z. 44 (1939), 398–426

所属 富山大学工学部, 〒930 富山市五福3190

Address Faculty of Engineering, Toyama Univ.
Gofuku 3190, Toyama, 930