

乱流相対拡散の自己相似電信モデル

京都大学・大学院理学研究科 金谷 健太郎 (Kentaro Kanatani)

京都大学・大学院理学研究科 小笠原 健 (Takeshi Ogasawara)

京都大学・大学院理学研究科 藤 定義 (Sadayoshi Toh)

Graduate School of Science, Kyoto University

1 はじめに

乱流相対拡散とは、乱流中で受動的に流される粒子対の相対距離の拡がりの様子を調べる研究分野であり、乱流の基礎研究のうちの一つとなっている。乱流相対拡散を調べることは、乱流中の混合・輸送過程を知るうえで重要であり、乱流の秩序構造を知る手がかりともなっている。この問題は、実用的には大気中における汚染物質の拡散や内燃機関における燃料の混合のような環境問題や工業的問題と結びついている。学問的には濃度拡散の問題とも関連している [1]。

相対拡散が 1 粒子拡散と大きく違うところは、1 粒子拡散が一つの粒子の定点からの距離を考察するのに対して、相対拡散は 2 粒子間の相対距離を調べることにある。したがって、一方はオイラー的、他方はラグランジュ的な見方であるといえる。さらに乱流中では、1 粒子拡散の場合は主として大きなスケール、すなわちエネルギー保有領域の渦に支配されるのに対して、相対拡散は粒子対の相対距離と同程度の大きさの速度揺らぎの影響を受ける。この揺らぎは、大きなスケールの流れに依存しない普遍的性質を持つため、相対拡散もまた普遍的な振る舞いを示すと考えられる。乱流中の慣性領域で成り立つこの普遍的性質をここでは「自己相似性」と呼ぶことにする。以下では、このような自己相似性を持った慣性領域における乱流相対拡散を考えることにする。

2 乱流相対拡散に対する古典的モデル

乱流相対拡散の研究はリチャードソンの先駆的論文に始まる [2]。粒子対の相対距離の確率密度関数の時間発展を記述する方程式を考えていたリチャードソンは、大気中の実験データを基にして拡散係数が相対距離の 3 分の 4 乗に、相対距離の 2 乗平均が時間の 3 乗に比例することを示唆した。後者がかの有名なリチャードソン則と呼ばれるものである。これら二つのスケーリング則の関係は、拡散係数がおよそ相対距離の 2 乗平均の時間微分で表されることから理解される。すなわち、相対距離の 2 乗平均の時間微分は時間の 2 乗に比例するが、リチャードソン則そのものよりこれは相対距離の 3 分の 4 乗であると見積もられる。

そこで、上記の乱流中における拡散係数の相対距離依存性に基づいて、リチャードソンは相対距離 r の確率分布 $P(r, t)$ の時間発展を拡散方程式で表現した。乱流の等方性を仮定すると、その方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[D(r) r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{r^2} \right) \right]. \quad (1)$$

ここで、 $D(r)$ は拡散係数であり、上述のスケーリング則より

$$D(r) = k_R \varepsilon^{1/3} r^{4/3} \quad (2)$$

となる。 k_R は無次元定数、 ε はエネルギー散逸率である。このリチャードソンの拡散方程式はその後の乱流相対拡散に対するモデルの基礎となった。しかし、この方程式は拡散型であるために、粒子対の相対速度の有限性を表現できていない。この欠点を克服するモデルの一つとして、クライチナンによるものがある [3]。彼は、LHDIA(ラグランジュ履歴直接相互作用近似)を用いて拡散係数を時間と空間の両方に依存するようにした。これにより、初期において粒子対の相対速度が有限に留まることになる。しかしながら、長時間極限でクライチナンのモデルはリチャードソンのものに一致するため、クライチナンのモデルでも長時間経過後の粒子対の相対速度の有限性を記述することはできない。そこで我々は、この有限性の効果を取り入れるために、確率密度関数の従う式を拡散(放物)型から電信(双曲)型へと拡張することを考えた。

3 自己相似電信モデル

ここで、分子拡散(ブラウン運動)の場合の電信方程式を考えてみることにする。完全にランダムな動きをする粒子が存在する確率分布の時間発展を記述する拡散方程式に、粒子の速度の有限性の効果を取り入れて電信方程式は導出される。この電信方程式によると、時間が大きいところで分布関数の標準偏差は時間の2分の1乗に、最大長は時間に比例することになる [4]。したがって最大長が標準偏差に比べて速く進んでしまうので、時間が経つと確率分布の先端以外では粒子の速度の有限性の効果が無視できるようになり、このとき電信方程式は拡散方程式で近似される。

ところが、スケーリング則もしくは自己相似性が成り立つ乱流の慣性領域では、粒子対の相対距離の標準偏差と最大長は同じスケーリング則に従うと考えられる。この場合、時間が経っても速度の有限性の効果が消えることはなく、粒子対の相対距離を表す確率分布は拡散型の方程式に従う確率分布に漸近しない。これらのことを考慮すると、方程式を電信(双曲)型へと拡張する際には乱流中の自己相似性の効果を取り入れる必要がある。

そこで小笠原と藤は、粒子対の相対距離の有限性の効果を取り入れた電信(双曲)型のモデルとして、以下の自己相似電信方程式を考案した [5]。

$$\frac{T_c(r)}{\lambda} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[D(r) r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{r^{d-1}} \right) \right] + \sigma \frac{\partial}{\partial r} [v(r)P]. \quad (3)$$

ここで、空間の次元数は d で表され、 $T_c(r)$ は r の大きさをもつ渦の特性時間、 $v(r)$ は粒子対の相対速度を表している。 λ と σ は乱流場の特性を表すパラメーターである。 $T_c(r)$ 、 $D(r)$ 、 $v(r)$ は以下のスケーリング則に従うものとする。

$$T_c(r) = \tilde{A}^{-1} r^s, \quad D(r) = \tilde{A} \lambda^{-1} r^{2-s}, \quad v(r) = \tilde{A} r^{1-s}. \quad (4)$$

ここで、 $\tilde{A}$ は次元つき定数、 s はスケーリング指数である。スケーリング指数 s の値は、コルモゴロフのスケーリングの場合は $2/3$ 、ボルギャノーオブコフのスケーリングの場合は $2/5$ である。式 (3) の右辺第2項はドリフト項であり、乱流場のコヒーレンスを表している。このとき、ドリフト速度は $-\sigma v(r)$ で表される。 λ^{-1} はソコロフが導入した持続パラメーター P_s に対応している [6]。これは、粒子対の平均自由行程が相対距離 r に比例すると考えたときの比例係数であり、粒子対の運動の持続的效果を表すパラメーターである。二次元逆カスケード乱流の直接数値シミュレーションによると、この持続パラメーター P_s は 0.87 と見積もら

れている [7]。つまり、これは粒子対の持続的運動が相対距離の約 2 倍程度まで続くということの意味する。

4 数値解の性質

以下では、この自己相似電信モデルがどの程度までよく乱流相対拡散を記述しているかを調べるために、乱流の直接数値シミュレーション (DNS) との比較を行うことにする。その準備段階として、まず自己相似電信方程式を数値的に解き、解の振る舞いを調べることにする。二次元自由熱対流乱流の直接数値シミュレーションと比較するので、自己相似電信モデルのパラメータは $d = 2$ 、 $s = 2/5$ とし λ 、 σ については論文 [8] で見積もられた値 5.2 および 0.083 を使うことにする。

4.1 初期条件および境界条件

自己相似電信モデルは慣性領域における粒子対の相対距離の振る舞いを表すモデルなので、対応する直接数値シミュレーション (DNS) においても慣性領域における相対拡散を調べなければならない。しかしながら、DNS で実現される慣性領域は有限であるので、初期 ($t = 0$) における粒子対の相対距離は 0 ではなくある一定の大きさを持たせることにする。したがって、初期分布として相対距離 $R (\neq 0)$ を中心とする δ 関数型の分布を考える。自己相似電信方程式は時間 2 階微分項をもつので、さらに確率分布の時間微分を初期条件として与える必要がある。ここでは、伸長する粒子対と収縮する粒子対が初期において対称であると仮定し、 $t = 0$ における確率分布の時間微分を 0 と置いた。このことは、物理的には乱流中の速度場と粒子対の初期配置が無相関であることを意味している。また、境界条件については $r = 0$ と $r = \infty$ で確率分布を 0 とした。

4.2 数値解の時間発展

前節の条件のもとで、自己相似電信方程式の数値解を差分スキームを用いて求めた。結果は図 1 の通りである。この二つの図を見ると、確率分布の先端に隆起部が見られる。この隆起は電信 (双曲) 型方程式の解の性質の一つであり、式 (4) で示されるような粒子対の相対速度の相対距離に対する一意性を仮定したことによるものである。しかし読者は、現実の乱流相対拡散において粒子対の相対速度はある決まった相対距離に対して分布を持っているのではないか、と思われるかもしれない。ところが二次元自由熱対流乱流の直接数値シミュレーションによると、相対速度はほとんど分布を持たないことが [8] の Fig.7 からわかる。したがって、我々は相対速度の分布を δ 関数で近似することを考え、式 (4) の最後の式のようなスケーリング則を仮定した。

4.3 相似解への漸近性

ところで、自己相似電信方程式 (3) は相似変数 $\eta = \frac{\lambda r^s}{\lambda t}$ を使うと二階常微分方程式に変形することができる [5]。したがって、自己相似電信方程式は相似解を持つ。この相似解を図 2

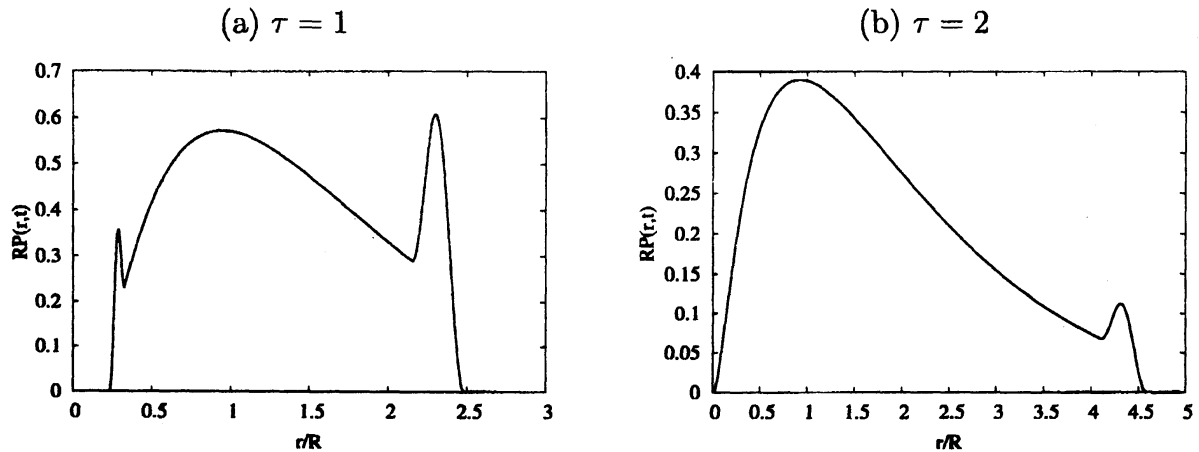


図 1: 自己相似電信方程式 (3) の数値解の時間発展。空間は初期相対距離 R で規格化した。無次元化された時間 $\tau = \tilde{A}t/R^s$ を使用した。(a) $\tau = 1$ 、(b) $\tau = 2$ 。

(a) に示す。この図から明らかなように、相似解には上限があり $\eta > \eta_c \equiv s\lambda$ では 0 になっている。この相似解の有限性は自己相似電信モデルの特徴の一つであり、粒子対の相対距離の有限性の効果を取り入れられていることを示している。最大相対距離は $r_{max} = (\tilde{A}st)^{1/s}$ であるが、これは式 (4) の相対速度を相対距離の時間微分 $\frac{dr(t)}{dt}$ と仮定し、 $r(t=0) = 0$ の条件の下で解くと得られる。ここからもわかるように、この相似解を確率密度関数 $P(r, t)$ に読みかえ時刻を 0 にすると原点に分布する δ 関数 $P(r, 0) = \delta(r)$ となる。この条件は、現在の我々の初期条件（有限な初期相対距離を仮定）と相反している。しかしながら、十分時間が経てば初期相対距離の影響も小さくなり、最大相対距離も相似解のものに近づくとの推察から、前節で求めた数値解が長時間後にこの相似解へと漸近することが予想される。

そこで、前節の数値解をさらに長く時間発展させ、確率分布を相似解の形に書き直し、相似解と比較させたところ、図 2 (b) のようになった。この図より、有限な初期相対距離の下でも長時間後には初期相対距離が 0 の相似解へと漸近することが確認された。

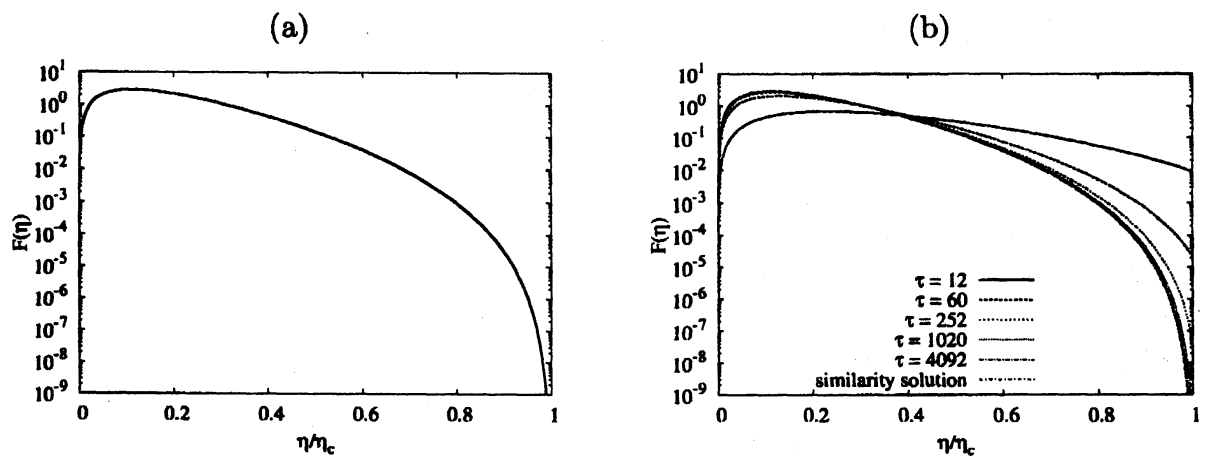


図 2: 自己相似電信方程式 (3) の相似解 (a) とそれに対する数値解の漸近性 (b)。ここで、 $F(\eta) = (\tilde{A}t/\lambda)^{1/s}P(r, t)$ 、 $\eta_c \equiv s\lambda$ 。(b) では、 $\tau = 4092$ でほとんど相似解と重なっている。

4.4 バチェラーのスケーリング

次に、相対距離の2乗平均の時間変化をこのモデルを用いて調べる。2章では相対距離の2乗平均が時間の3乗に比例するというリチャードソン則を紹介したが、時間が初期相対距離の大きさをもち渦の相関時間 t_0 よりも小さいときは、別のスケーリング則が存在することが知られている。この場合、初期相対距離 r_0 がスケーリング則の中に入ってくる。バチェラーは次のようなスケーリング則を導いた [9]。

$$\langle r(t)^2 \rangle - r_0^2 \propto t^2 \quad (t \ll t_0). \quad (5)$$

ここで、 $t_0 \equiv (r_0^2/\varepsilon)^{1/3}$ である。このバチェラーによるスケーリング則とリチャードソン則の違いは、バチェラーのスケーリング則は初期相対距離の影響を受けているということである。そこで、このスケーリング則が自己相似電信モデルでも再現できるか否かを確認するために相対距離の2乗平均を計算した。結果は図3 (a) の通りであり、自己相似電信モデルでもバチェラーのスケーリング則が再現された。

ここで比較のために自己相似電信方程式の時間2階微分項を落とした場合についても同様の計算を試みた。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[D(r) r^{d-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{P}{r^{d-1}} \right) \right] + \sigma \frac{\partial}{\partial r} [v(r)P]. \quad (6)$$

この式は、リチャードソンの拡散方程式 (1) にドリフト項を付加した形になっている。このような拡張はパーム (E. Palm) が 1957 年に議論している [10]。最近では、後藤とバシリコスも同じ式を導出している [11]。

図3 (b) にはその計算結果が示されている。式 (6) のパラメーターは電信方程式の場合と同一にしてある。相対距離の2乗平均からその初期値を引いたものが時間が小さいところで時間に比例している。これはバチェラーのスケーリングと異なっている。したがって、方程式を電信（双曲）型へと拡張すること、すなわち粒子対の相対距離（速度）の有限性の効果を取り入れることがバチェラーのスケーリングを再現するうえで重要であるということがこの結果からわかる。

バチェラーのスケーリングと相対速度のスケーリング則との関係についてもう少し詳しく考えてみることにする。4.3節では相対速度の式を $r(0) = 0$ のもとで積分することで最大相対距離が得られたが、ここでは $r(0) = r_0 (\neq 0)$ という条件を課して積分することにする。すると

$$r(t) = (r_0^2 + \dot{A}st)^{1/2} \quad (7)$$

という式が得られる。ここで、 $r_0^2 \gg \dot{A}st$ であれば $r(t) \simeq r_0(1 + \dot{A}t/r_0^2)$ のように展開される。相対距離の2乗平均の平方根もまた最大相対距離と同じような振る舞いを示すと考えると、上の式より $\langle r^2 \rangle - r_0^2 \propto t$ がいえる。よって、相対距離の2乗平均からその初期値を引いたものは初期において時間に比例する。この結論は相対速度のスケーリング則のみから導出された。したがって、スケーリング則だけではバチェラー則は出てこないということになる。しかし、式 (7) からある程度定性的な説明がなされると考えられる。実際、式 (7) の2乗を式 (6) における相対距離の2乗平均に対してフィッティングさせると、図4に示すように非常によく合っている。

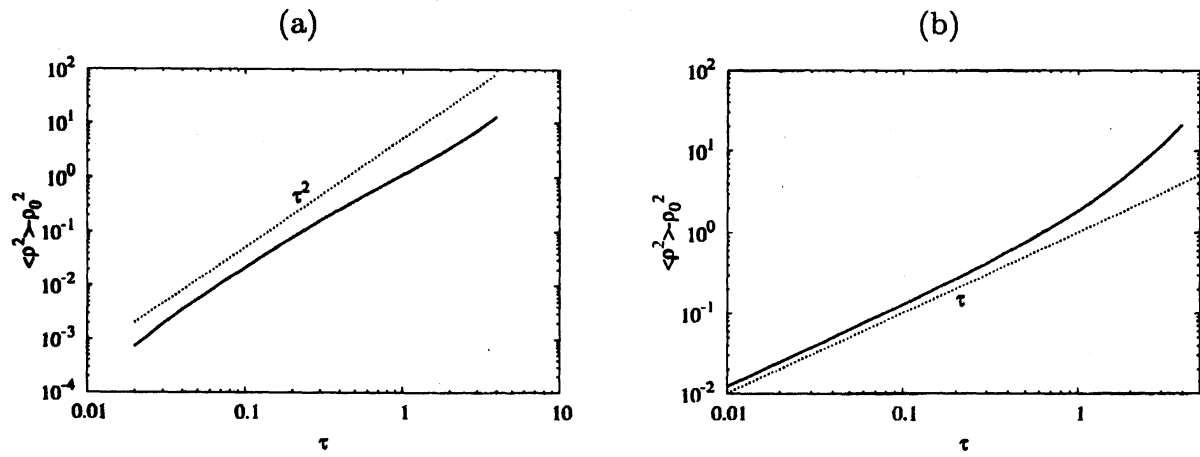


図 3: (a) 自己相似電信方程式 (3) および (b) その時間 2 階微分項を落とした式 (6) における数値解の 2 乗平均の時間発展。 $\rho = r/R$ 。初期 $t = 0$ の値 ρ_0^2 を引いてある。(a) では時間の 2 乗に比例するというバチェラー則が見られるが、(b) では時間に比例している。

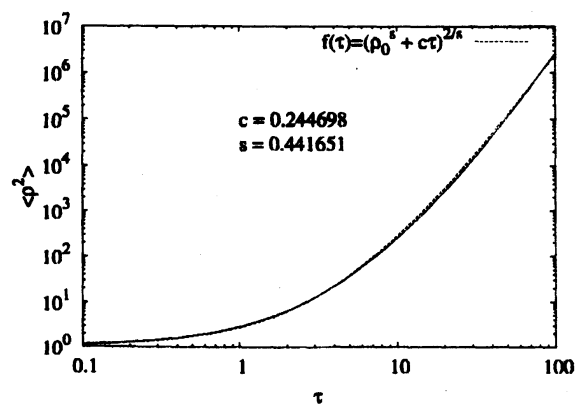


図 4: 式 (6) の数値解の 2 乗平均の式 (7) の 2 乗によるフィッティング。

5 乱流の直接数値シミュレーション

前章では、自己相似電信モデルの数値解の性質について調べた。そこで、今度は乱流の直接数値シミュレーションを行って乱流相対拡散を調べ、自己相似電信モデルから得られた結果と比較することにする。本研究では二次元自由熱対流乱流の直接数値シミュレーションを行うことにする。その理由は、一つには三次元ナビエ-ストークス乱流では大きな計算容量を必要とするので長時間に渡って粒子対の軌跡を追うことが難しいためであり、またもう一つには二次元自由熱対流乱流が三次元ナビエ-ストークス乱流と似たような統計的および動的特質を持つためである [12, 13]。

基礎方程式は以下の通りである。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{u} - \alpha g T \mathbf{e}_g, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T. \quad (10)$$

ここで $\mathbf{u}$ 、 T 、 p は速度場、温度場、圧力場を表す。 $\mathbf{e}_g$ は重力方向の単位ベクトルである。係数 ν 、 κ 、 ρ_0 、 α 、 g はそれぞれ動粘性係数、熱拡散係数、流体の平均密度、熱膨張係数、重力加速度である。シミュレーションは、 $2\pi \times 2\pi$ の領域で二重周期境界条件を課し、モード数 2048^2 を用いた擬スペクトル法によって行われた。時間積分には 4 次のルンゲ-クッタ法を用いた。この乱流場の中に相対距離が一定である粒子対を 500 万個入れ、その相対距離の時間発展を調べた。初期相対距離 r_0 は $150\Delta x$ (Δx はグリッドサイズ) とした。

まず、シミュレーションでバッチャーのスケーリングが出てくるかどうかを調べてみた。相対距離の 2 乗の平均を取り、その初期値を引いたものの時間発展をグラフにしたのが図 5 である。時間の 2 乗に比例しているのが明らかであり、バッチャーのスケーリングが確認された。また、相対距離の確率分布の時間発展を表しているのが図 6 である。自己相似電信モデルの数値解に見られたような先端における隆起は見られないが、これは相対速度の分布の影響であると考えられる。しかしながら、自己相似電信方程式は相似解を持っているので、この相似解とシミュレーションにおける確率分布とを比較してみることにする。相似解は先端 (最大相対距離) 付近で次のような漸近形を持つ [5]。

$$F'(\xi) \propto (\xi_+ - \xi)^{(\lambda-d)/2s}. \quad (11)$$

ここで、 $F'(\xi) = \langle r^2 \rangle^{1/2} P(r, t)$ 、 $\xi \equiv (r / \langle r^2 \rangle^{1/2})^s$ 、 $\xi_+ \equiv (r_{\max} / \langle r^2 \rangle^{1/2})^s$ である。この式をシミュレーションの確率分布の先端部分にフィッティングした。結果を図 7 に示す。先端付近で相似解の漸近形とよく合っていることがわかる。自己相似電信モデルのパラメーター λ の値をこのフィッティングによって見積もることができ、 $\lambda \simeq 7.3$ となった。別の方法 (exit-time 統計) でも λ の値は見積もられており、それによると $3.5 < \lambda < 8.3$ である [8]。したがって、自己相似電信モデルの相似解はシミュレーションの確率分布を定量的に表していると考えられる。

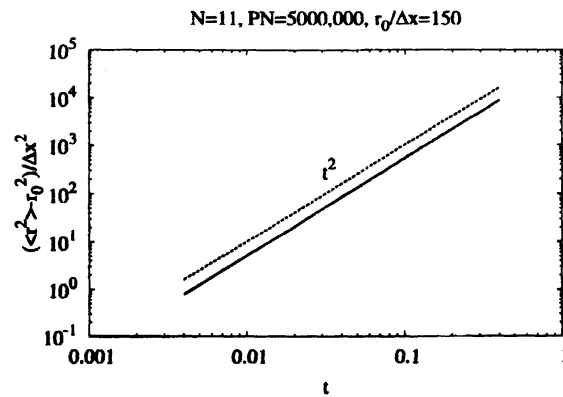


図 5: 直接数値シミュレーションにおけるバチェラーのスケーリング。

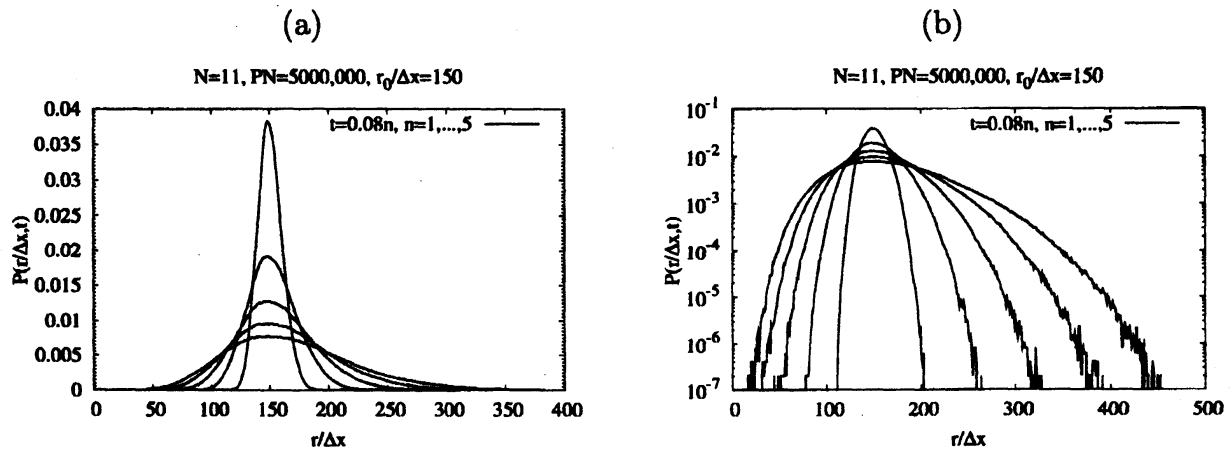


図 6: 粒子対の相対距離の確率分布の時間発展。時間は 0.08 から 0.08 刻みで 0.4 まで示してある。(a) 線形プロット、(b) 片対数プロット。

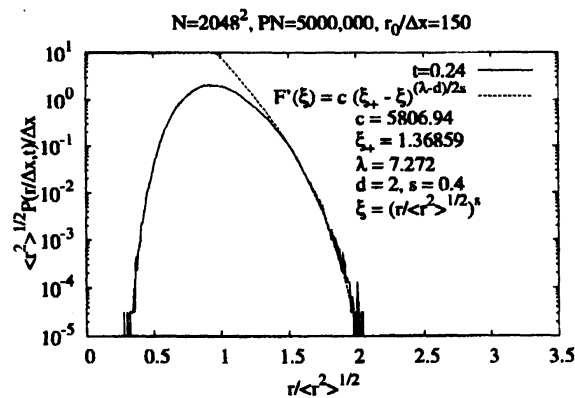


図 7: 自己相似電信方程式 (3) の相似解の先端（最大相対距離）付近の漸近形によるフィッティング。$t = 0.24$ のときの確率分布を使用した。ここでは、c、ξ_+、λ を自由パラメーターとした。

6 まとめ

乱流相対拡散の研究は古くからなされているが、その実験的検証は最近になって始まったばかりである。実験室や直接数値シミュレーションでは、相対拡散を定量的に解析できるほど大きな慣性領域を持った乱流を作るに至っていない。しかし、近年における実験技術の進歩は目覚ましく、粒子対の軌跡を長時間に渡って追うことが可能になった [14, 15]。論文 [14, 15] の著者たちは粒子対の相対距離と相対速度との初期における相関性を主張し、バッチラーのスケーリングに補正が加わることを示唆している。しかしながら、これは実験上の初期条件の取り方によるものであると思われる。直接数値シミュレーションにおいて彼らの初期条件を再現するには、粒子対を乱流場に入れてしばらく時間が経過してから統計を取るといった処置が必要であろう。今後、我々は直接数値シミュレーションの慣性領域を広げ、乱流相対拡散のさらなる解析や自己相似電信モデルの検証を行う予定である。

本研究の数値計算は京都大学基礎物理学研究所の計算機システムを用いて実行した。

参考文献

- [1] B. Sawford, "Turbulent relative dispersion," *Annu. Rev. Fluid Mech.* **33**, 289 (2001).
- [2] L. F. Richardson, "Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph," *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **110**, 709 (1926).
- [3] R. H. Kraichnan, "Dispersion of particle pairs in homogeneous turbulence," *Phys. Fluids* **9**, 1937 (1966).
- [4] T. Ogasawara, "Turbulent relative dispersion: Self-similar telegraph model and its comparison with results of direct numerical simulation," *Ph. D. thesis* (2006).
- [5] T. Ogasawara and S. Toh, "Model of turbulent relative dispersion: A self-similar telegraph equation," *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** 083401 (2006).
- [6] I. M. Sokolov, "Two-particle dispersion by correlated random velocity fields," *Phys. Rev. E* **60** 5528 (1999).
- [7] G. Boffetta and I. M. Sokolov, "Statistics of two-particle dispersion in two-dimensional turbulence," *Phys. Fluids* **14** 3224 (2002).
- [8] T. Ogasawara and S. Toh, "Turbulent relative dispersion in two-dimensional free convection turbulence," *J. Phys. Soc. Jpn.* **75** 104402 (2006).
- [9] G. K. Batchelor, "The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion," *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **76** 133 (1950).
- [10] A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics* (MIT Press, Cambridge, MA, 1975), Vol. 2.

- [11] S. Goto and J. C. Vassilicos, "Particle pair diffusion and persistent streamline topology in two-dimensional turbulence," *New J. Phys.* **6** 65 (2004).
- [12] S. Toh and E. Suzuki, "Entropy cascade and energy inverse transfer in two-dimensional convective turbulence," *Phys. Rev. Lett.* **73** 1501 (1994).
- [13] S. Toh and T. Matsumoto, "A class of steady solutions to two-dimensional free convection," *Phys. Fluids* **15** 3385 (2003).
- [14] M. Bourgoïn, N. T. Ouellette, H. Xu, J. Berg and E. Bodenschatz, "The role of pair dispersion in turbulent flow," *Science* **311** 835 (2006).
- [15] N. T. Ouellette, H. Xu, M. Bourgoïn and E. Bodenschatz, "An experimental study of turbulent relative dispersion models," *New J. Phys.* **8** 109 (2006).