

ホモトピー表現群と Swan 部分群

阪大理(院) 長崎生光 (Ikumitsu Nagasaki)

§1. ホモトピー表現群

G は有限群とする. 線型作用に近い球面上の G の作用として tom Dieck - Petrie は [2] でホモトピー表現を定義し研究した.

定義 (1.1) i) 有限次元の G -CW 複体 X がホモトピー表現とは, 任意の G の部分群 H に対して H -固定点集合 X^H が $(\dim X^H)$ 次元の球面とホモトピー同値または $X^H = \emptyset$ のときをいう.

ii) ホモトピー表現 X が有限 G -CW 複体と G ホモトピー同値のとき, X は有限ホモトピー表現という.

iii) ホモトピー表現 X が実表現の単位球面と G ホモトピー同値のとき, X は線型ホモトピー表現という.

実表現の単位球面がいつ G ホモトピー同値になるかという問題と関連して tom Dieck [1], 川久保 [3] 等は群 $JO(G)$ または $J_G(*)$ を定義してある種の群 G に関して計算しているが, ホモトピー表現に対しても同様の群が定義される。すなわち,

$$V^+(G, h^0) = \{ \text{ホモトピー表現の } G\text{-ホモトピー型} \}$$

$$V^+(G, h) = \{ \text{有限ホモトピー表現の } G\text{-ホモトピー型} \}$$

$$V^+(G, l) = \{ \text{線型ホモトピー表現の } G\text{-ホモトピー型} \}$$

とおく。これらは 結 (join) によって可換半群となる。そこで, $V^+(G, \lambda)$ ($\lambda = h^0, h, l$) の Grothendieck 群を $V(G, \lambda)$ と書いてホモトピー表現群と呼ぶ。($\lambda = l$ のときが $JO(G)$.)

記号 $\phi(G) = \{ G \text{ の部分群の共役類} \}$
 $C(G) = \{ f: \phi(G) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ 関数} \}$

ホモトピー表現 X に対して, 関数 $\text{Dim } X \in C(G)$ を

$$(\text{Dim } X)(H) = \dim X^H + 1 \quad (H) \in \phi(G)$$

で定義する。($X^H = \phi$ のときは $\dim X^H = -1$ とする。) このとき, $\text{Dim } X * Y = \text{Dim } X + \text{Dim } Y$ ($*$ は join) が成立するから, 準同型

$$\text{Dim} : V(G, \lambda) \longrightarrow C(G)$$

が定義できる。Dim の像を $\text{Dim } V(G, \lambda)$, 核を $v(G, \lambda)$ とすると

$$V(G, \lambda) \cong \text{Dim } V(G, \lambda) \oplus v(G, \lambda)$$

したがって, $V(G, \lambda)$ の研究は $\text{Dim } V(G, \lambda)$ と $v(G, \lambda)$ の2つを研究することに帰着される。[2]では次の事が示されている。

定理 (1.2) [2] i) $\text{Dim } V(G, \ell) = \text{Dim } V(G, h) = \text{Dim } V(G, h^\infty) \iff G$ は中零。

ii) $v(G, h^\infty) \cong \text{Pic } \Omega(G)$. (右辺は Burnside 環の Picard 群。)

iii) $0 \rightarrow v(G, h) \xrightarrow{k_G} v(G, h^\infty) \xrightarrow{f} \bigoplus_{(H) \in \phi(G)} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}WH)$ は完全系列。($WH = NH/H$, NH は H の G の中での

正規化群。) ここで, κ_G は $v(G, h)$ から $v(G, h^0)$ への自然に定義される準同型, ρ は finiteness obstruction map. $\square$

以後の節では $v(G, \lambda)$ について述べる.

§ 2. Swan 部分群

$r \in \mathbb{Z}$ を $|G|$ と素な整数とし, $\Sigma_G = \sum_{g \in G} g$ とする.
 $[r, \Sigma_G]$ を r と Σ_G で生成される $\mathbb{Z}G$ の左 ideal とする,
 $[G]$ より, 準同型

$$\tilde{S}_G : \mathbb{Z}/|G|^* \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$$

が $\tilde{S}_G(r) = ([r, \Sigma_G])$ で定義される. $\tilde{S}_G(\pm 1) = 0$ より

$$S_G : u(G) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G)$$

$$u(G) = (\mathbb{Z}/|G|^*) / \pm 1$$

が誘導される. S_G を Swan 準同型といい, S_G の像を Swan 部分群といって $T(G)$ で表す. 次の結果はよく知られた $T(G)$ の性質です.

定理(2.1) [8] i) $f: G \rightarrow G'$ が全射のとき,
 f から誘導される準同型 $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}G) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G')$ は $([r, \Sigma_G])$
 を $([r, \Sigma_{G'}])$ に写す。したがって $T(G)$ は $T(G')$ の上に
 写される。

ii) H を G の部分群とすると、 $\text{res}: \tilde{K}_0(\mathbb{Z}G) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}H)$
 は $([r, \Sigma_G])$ を $([r, \Sigma_H])$ に写す。したがって $T(G)$ は
 $T(H)$ の上に写される。 $\square$

Swan 部分群に関する結果は [4], [6], [7], [8]
 に見られる。

§3. $v(G, \lambda)$ について

自然な準同型

$$k_G: v(G, h) \rightarrow v(G, h^\infty)$$

$$j_G: v(G, l) \rightarrow v(G, h)$$

$$i_G: v(G, l) \rightarrow v(G, h^\infty)$$

が定義できるが、これらは単射になる。([2]) したがって
 これらの準同型により、 $v(G, l)$, $v(G, h)$ を $v(G, h^\infty)$
 の部分群とみなすことにする。

G は abel 群 とする。このときは $v(G, \ell)$ と $v(G, h^\infty)$ は完全に計算されている。次の可換図式が知られている。

([3], [2].)

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} v(G, \ell) & \subset & v(G, h^\infty) \\ \cong \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \cong \\ \prod_H u(G/H) & \subset & \prod_H u(G/H) \\ \text{\scriptsize } G/H: \text{cyclic} & & \end{array}$$

$$\text{つまり } u(G/H) = (\mathbb{Z}/|G/H|)^* / \pm 1.$$

さらに tom Dieck - Petrie は次も示している

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} v(G, h^\infty) & & \\ \downarrow \cong & \searrow \rho & \\ \prod_H u(G/H) & \xrightarrow{\prod_H S_{G/H}} & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[G/H]) \end{array}$$

(したがって (1.2) iii) と G/H cyclic なら $T(G/H) = 0$ ([6]) という事実から 次の二つがわかる。

定理 (3.2) G は abel 群とする.

$$i) \quad v(G, h) \cong v(G, l) \times N(G)$$

ここで

$$N(G) = \prod_H \text{Ker } S_{G/H}$$

G/H : non cyclic

$$ii) \quad \frac{v(G, h^\infty)}{v(G, h)} \cong \bigoplus_H T(G/H) \quad \square$$

このように $v(G, h)$ の計算は Swan 部分群の計算に帰着される. 特に $N(G) = 1$ なら $v(G, h) = v(G, l)$ となる. これに関して次の事がわかる.

定理 (3.3) G は abel 群.

$N(G) = 1$ となる必要十分条件は G が次の群の1つと同型るときである.

$$(i) \quad C \text{ cyclic} \quad (ii) \quad G_2 \quad 2\text{-群}$$

$$(iii) \quad G_3 \quad 3\text{-群} \quad (iv) \quad G_2 \times \mathbb{Z}/3$$

$$(v) \quad \mathbb{Z}/2 \times G_3 \quad (vi) \quad (\mathbb{Z}/2)^n \times (\mathbb{Z}/3)^m \quad \square$$

次に $v(G, h) = v(G, h^\infty)$ となる群については次の事が

成立する。

定理(3.4) G は任意の有限群. このとき,

$$\nu(G, h) = \nu(G, h^p) \iff T(G) = 0 \quad \square$$

これは ρ の具体的な形 (ρ は Swan 準同型を用いて表わせる) と (2.1) を用いて証明される。

$T(G) = 0$ となる群 G は 宮田 - 遠藤 [4] によってほぼ完全に決定されている。特に G が C (cyclic), D_{2n} (位数 $2n$ の二面体群), Q_{4m} (m : 奇数 ≥ 3) (位数 $4m$ の quaternion 群) A_4 , S_4 , A_5 のときには, $T(G) = 0$ となる。

(3.4) の応用として次の事を示すことができる。

定理(3.5) $\nu(G, h^p) = 0$ となる必要十分条件は G が次の群の1つと同型るときである。

$$\{1\}, \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/3, \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/6,$$

$$D_6, D_8, D_{12}, A_4, S_4 \quad \square$$

参考文献

- [1] T. tom Dieck : Homotopy-equivalent group representations, Crelles J. Reine Angew. Math. 298, 182-195 ('78).
- [2] T. tom Dieck - T. Petrie : Homotopy representations of finite groups, Publ. Math. IHES 56 ('82).
- [3] K. Kawakubo : Equivariant homotopy equivalence of group representations, J. Math. Soc. Japan 32, 105-118 ('80).
- [4] T. Miyata - S. Endo : The Swan subgroup of the class group of a finite group, (to appear).
- [5] I. Nagasaki : Homotopy representations and spheres of representations, (to appear).
- [6] R. G. Swan : Periodic resolutions for finite groups, Ann. Math. 72, 267-291 ('60).
- [7] M. J. Taylor : Locally free class groups of groups of prime power order, J. Algebra 50, 463-487 ('78).
- [8] S. V. Ullom : Nontrivial lower bounds for class groups of integral group rings, Illinois J. Math. 20, 311-300 ('75).