

一様分布と積分の近似計算について

(華羅庚, 王元著: 「数論在近似分析中的应用」の紹介)

名古屋大学 数学教室 江田義計

[A]

s は正整数とし, G_s は s -dim 空間の単位立方体, $0 \leq x_i \leq 1$ ($1 \leq i \leq s$) を表わすとする. n_l ($1 < n_1 < n_2 < \dots$) も正整数とし $P_{n_l}(k) = (x_1^{(n_l)}(k), \dots, x_s^{(n_l)}(k))$ ($1 \leq k \leq n_l$) を G_s 中の点集合とする. $\therefore 0 \leq x_i^{(n_l)}(k) < 1$ ($1 \leq i \leq s$) である. 任意の $\hat{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in G_s$ に対し $N_{n_l}(\hat{\gamma}) = N_{n_l}(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$ を $P_{n_l}(k)$ ($1 \leq k \leq n_l$) で不等式 $0 \leq x_i^{(n_l)}(k) < \gamma_i$ ($1 \leq i \leq s$) を満たすものの個数と表わす. もし $\sup_{\hat{\gamma} \in G_s} |N_{n_l}(\hat{\gamma})/n_l - |\hat{\gamma}|| = \varphi(n_l)$, $|\hat{\gamma}| = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s$ であれば点集合 $P_{n_l}(k)$ ($1 < n_1 < \dots$) は偏差 $\varphi(n_l)$ をもつという. もし $\varphi(n_l) = o(1)$ であれば点集合 $P_{n_l}(k)$ ($1 < n_1 < \dots$) は一様分布をなし偏差 $\varphi(n_l)$ をもつという. 特に $n_l = l$ に対し $x_1^{(l)}(k) = x_1(k), \dots, x_s^{(l)}(k) = x_s(k)$ ($l=1, \dots$) のとき点列 $P(k) = (x_1(k), \dots, x_s(k))$ ($k=1, 2, \dots$) は G_s 上一様分布をなし偏差 $\varphi(n)$ をもつという (Weyl, 1916).

Roth (1954) による次の偏差の下界についての評価はこれ以後の理論の基本となるものである.

定理 1. $s \geq 2$ とする. 任意の点列 $P_n(k)$ ($1 \leq k \leq n$) に対し

1.

常に次式を得る:

$$\varphi(n) > 2^{-2s-4} (s-1)^{-\frac{s-1}{2}} n^{-1} (\log_2 n)^{\frac{s-1}{2}}$$

次の定理 2 による指数和と偏差の評価を用いて定理 3 の合同式の解と偏差によっての結果を得る. $\bar{x} = \max(1, |x|)$, $\|\hat{x}\| = \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s$, $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$ (内積) とそれぞれ表わすとする.

定理 2. r, h は正整数とし, $h > r/\eta$ ($0 < \eta < 1/6$) すると任意の $\hat{x} \in G_s$ に対し常に $\left| \frac{1}{n} N_n(\hat{x}) - |\hat{x}| \right| < \varphi(n)$ であり, かつ

$$\begin{aligned} \varphi(n) = & \sum'_{|m_i| \leq h} \frac{1}{\|\pi \hat{m}\|} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i (m, p_n(k))} \right| + (5s+6)\eta \\ & + \frac{s 2^s r^{s-1}}{\pi^{s+r} \eta^r h^r} (\log 64h)^{s-1}, \quad \text{ここで } \sum' \text{ は } \sum \text{ から } \hat{m} \neq \end{aligned}$$

$\hat{0} = (0, \dots, 0)$ と示す. ($s=1$ は Erdős, Turán 1948, 一般には

Kokama (1950), Hlawka (1961), Hua-Wang (1973))

定理 3. 合同式 $(\hat{a}, \hat{m}) \equiv 0 \pmod{n}$ は区域 $\|\hat{m}\| \leq M$ ($M \geq 1$)

$\hat{m} \neq 0$ には解が存在する. かつとき集合 $(\{\frac{u_k}{n}\} \dots \{\frac{v_k}{n}\})$ ($1 \leq k \leq n$) は偏差 $\varphi(n) \leq c(s) M^{-1} (\log 3M)^s$ となる.

$\hat{h} = (h_0, h_1, \dots, h_s)$, ($h_0=1$). $\hat{m}^{(1)} = (m_0, m_1, \dots, m_s)$ は整数で

$\hat{m} = (m_1, \dots, m_s)$ とおくと $\langle \hat{h}, \hat{m} \rangle \geq b \|\hat{m}\|^{-a}$ と仮定し, 常数 a, b は $s \geq a \geq 1$, $b > 0$ とする. かつ $\left| h_i/n - \alpha_i \right| \leq d n^{-1-\delta}$

($d > 0$ 定数) ($1 \leq i \leq s$) とし $0 \leq \delta \leq \frac{1}{s} < 1$ とする. かつとき正定数

$c(b, d, s) < 1$ があって区域 $\|\hat{m}^{(1)}\| \leq c(b, d, s) n^{\frac{1+\delta}{1+a}}$, $\hat{m}^{(1)} \neq 0$ には

解となる合同式 $(\hat{h}, \hat{m}^{(1)}) = \sum_{i=0}^s h_i m_i \equiv 0 \pmod{n}$ は解をもたない.

と仮定する。かくて有理近似の偏差に1対する次の定理4~6を得る。

定理4. 任意の整数 $n \neq 0$ に対し $\langle (\hat{\gamma}, \hat{m}) \rangle \geq b \|\hat{m}\|^{-a}$ と仮定する。定数 a, b は $1 \leq a \leq 1 + \frac{1}{2s}$, $b > 0$ とする。 $|\frac{h_i}{n} - \delta_i| \leq d n^{-1-g}$ ($1 \leq i \leq s$) とする。 d, g は正定数で $0 \leq g \leq \frac{1}{s}$ とする。点列 $(\{\frac{k}{n}\}, \{\frac{h_1 k}{n}\}, \dots, \{\frac{h_s k}{n}\})$ ($1 \leq k \leq n$) は偏差 $\varphi(n) = c(b, d, s) n^{-(1+g)/(1+a)} (\log 3n)^{s+1}$ とする。

定理5 上記と同じ仮定のもとで点列 $P_n(k) = (\{\gamma_1 k\}, \dots, \{\gamma_s k\})$ ($1 \leq k \leq n$) は偏差 $\varphi(n) = c(b, s) n^{-1+2s(a-1)} (\log 3n)^{1+s\delta_{1,a}}$ とする。 $\delta_{\alpha, \beta}$ は Kronecker の記号である。

更に同じ仮定のもとで

定理6. 整数 g が $1 \leq g \leq n^{(1+g)/(2-2s(a-1))}$ のとき、点集合 $\varphi(\{\frac{h_1 k}{n}\}, \dots, \{\frac{h_s k}{n}\})$ ($1 \leq k \leq g$) は偏差 $\varphi(g) = c(b, d, s) g^{-1+2s(a-1)} (\log 3g)^{1+s\delta_{1,a}}$ とする。

[B]

$G_s \ni \hat{\gamma}$ とし、もし $P(k) = (\{\gamma_1 k\}, \dots, \{\gamma_s k\})$ ($1 \leq k \leq n$) なる点集合は偏差 $\varphi(n) = c(\hat{\gamma}, \varepsilon) n^{-1+\varepsilon}$ とするとき「佳点集合」といふ。「最佳分布点集合」といふ（定理1）又 $\hat{\gamma}$ を「佳点」といふ。

定理4の不平等式によれば、それに適合する γ の存在と具体的な構成問題とは佳点集合の構成問題は等価である。

具体的に佳点を構成するのは最近のことである、この方面の結果

果に同じことは Roth の著名な結果を拡張した Thue-Siegel-Roth の定理 (Schmidt 1970) や指数関数に属する有理近似についての結果 (Baker 1965) から導く。

定理 7. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ とし α_i ($1 \leq i \leq s$) は一組の交代数的数とし, $1, \alpha_1, \dots, \alpha_s$ は有理数体上一次独立ならば, 任意の整数ベクトル $\hat{m} \neq 0$ に対し $\langle \hat{\alpha}, \hat{m} \rangle > c(\hat{\alpha}, \varepsilon) \|\hat{m}\|^{-1+\varepsilon}$ となる ε は任意に与えられる正数。

定理 8. $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ とし $\beta_i = e^{\gamma_i}$ ($1 \leq i \leq s$) であって, γ_i ($1 \leq i \leq s$) は一組の相異なる非零有理数とすると, 任意の整数ベクトル $\hat{m}$ に対し $\langle (\hat{\beta}), \hat{m} \rangle > c(\hat{\beta}, \varepsilon) \|\hat{m}\|^{-1+\varepsilon}$, ($\varepsilon > 0$)

これから

定理 9. 点集合 $P(k) = (\{\alpha_{1k}\}, \dots, \{\alpha_{sk}\})$ ($1 \leq k \leq s!$) は偏差 $\varphi(n) = c(\hat{\alpha}, \varepsilon) n^{-1+\varepsilon}$ をもつ。

定理 10. 点集合 $P(k) = (\{\beta_{1k}\}, \dots, \{\beta_{sk}\})$ ($1 \leq k \leq n$) は偏差 $\varphi(n) = c(\hat{\beta}, \varepsilon) n^{-1-\varepsilon}$ をもつ。

さて, $\hat{h} = (h_1, \dots, h_s)$ とし有理ベクトル $\hat{h}/n = (h_1/n, \dots, h_s/n)$ に対し「格点集合」 $(\{\frac{h_1}{b}k\}, \dots, \{\frac{h_s}{b}k\})$ ($1 \leq k \leq n$ ($\leq s!$))) の偏差 $\varphi(n) = c(s, \varepsilon) n^{-1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) をもつならば上記点集合は佳格点集合とす。 $\hat{h}$ と b と $n = b^a$ と $a \equiv \text{mod } q$ の極値得数とす。

[C]

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の s 次代数体 $F_s = F/\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\alpha)$ とする。その実

共役体の位数を r_1 とし、虚の共役体の位数を $2r_2$ とし $s = r_1 + 2r_2$,
 $r = r_1 + r_2$ とおき、 γ_i ($1 \leq i \leq r$) と $\sum_{i=1}^{r_1} \gamma_i + \sum_{j=1}^{r_2} 2\gamma_j = 0$ を満足
 する任意の実数の一組とすると、 γ_i と γ_j

定理 11. 不等式 $c^{-1} e^{\gamma_i} \leq |\eta_i^{(i)}| \leq c e^{\gamma_i}$ ($1 \leq i \leq r$) を満足

する単数 $\eta \in F_s$ があつて、 $c = c(F_s)$. 従つてまた任意
 の実数 γ に対して $c^{-1} e^{\gamma} \leq |\eta| \leq c e^{\gamma}$ かつ $c^{-1} e^{-\frac{\gamma}{s-1}} \leq |\eta^{(i)}|$
 $\leq c e^{-\frac{\gamma}{s-1}}$ ($1 \leq i \leq s$) とする $\eta \in F_s$ があつて、 $c = c(F_s)$. しかるに

定理 12. 増大する単数列 η_l ($l=1, 2, \dots$) で $\eta_l > l$, $|\eta_l^{(i)}| \leq$
 $c(F_s) \eta_l^{-\frac{1}{s-1}}$ ($2 \leq i \leq s$) とするものがあつて、 $\eta_l = \sum_{i=1}^s \eta_l^{(i)}$ によ
 り $h_j^{(l)} = \sum_{i=1}^s \eta_l^{(i)} \omega_j^{(i)}$ ($1 \leq j \leq s$) と置くとき n_l , $h_j^{(l)}$ はす
 べて ($1 \leq j \leq s$) 有理整数であつて、 ω_j は s 次整数基底 ω_j の
 有理近似式が得られる:

$$\left| h_j^{(l)} / n_l - \omega_j \right| \leq c(F_s) n_l^{-1 - \frac{1}{s-1}} \quad (1 \leq j \leq s)$$

右辺は ω にも関係する指数は $-1 - \frac{1}{s-1} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ には出ない。

特に実円分体において、素数 $p \geq 5$ とし $s = \frac{1}{2}(p-1)$ とおき
 $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$ の根 $e^{2\pi i l/p}$ ($1 \leq l \leq p-1$) と
 する。 $\mathbb{Q}_s = \mathbb{Q}(\omega, \frac{2\pi}{p})$ は s 次完全 (共役がすべて実となる)
 実代数体である。 s 次実円分体としよう。 $\omega_l = 2\cos(\frac{2\pi}{p} l)$
 とおき、 ω は $p-1$ 中 ω は $\omega \equiv 1 \pmod{p}$ (p の原始根)
 $\omega^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ とおき $\Omega = [\omega_{i+j}]$ ($1 \leq i, j \leq s$), $S = \Omega \Omega^t$ とお
 く。前定理に於けるように単数列を作り $\eta_0 = \sum_{i=1}^s \eta_i^{(i)} \omega_i$ とお

$$\langle (h_1^{(1)}, \dots, h_s^{(1)}) = (k_1^{(1)}, \dots, k_s^{(1)}) \rangle \quad \text{with } h_i^{(1)} \in n_l = - \sum_{i=1}^s k_i^{(1)}$$

with n_l is defined. $\therefore$ it is clear.

$$\text{Theorem 13. } w_i \text{ is a rational approximation to } \omega_i \text{ such that } |h_i^{(1)}/n_l - \omega_i| < c(\mathcal{Q}_s).$$

$$\cdot n_l^{-1 - \frac{1}{s-1}} \quad (1 \leq i \leq s) \quad \text{is obtained.}$$

$p_1, \dots, p_r$ is a set of distinct prime numbers. $s = 2^t$ and

$$\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r}) = D_s \text{ is a (real Dirichlet) field.} \quad \therefore \text{it is}$$

the theoretical tool.

[D]

$F_s = \mathbb{Q}(\alpha)$ is a s -th degree field and α is a root of the polynomial equation.

$$f(x) = x^s - a_{s-1}x^{s-1} - \dots - a_1x - a_0 = 0 \quad \text{such that } \alpha (= \alpha^{(1)}) > 1.$$

$$|\alpha^{(2)}| \leq \dots \leq |\alpha^{(s)}| < 1 \quad \text{and } \alpha \neq 0 \text{ and } \alpha \neq 1 \quad (\therefore \alpha \text{ is a root of}$$

Pisot - Vijayaraghavan number). $\rho = -\log |\alpha^{(s)}| / \log \alpha$ is

$$\text{such that } S_l = \alpha^l + \alpha^{(2)l} + \dots + \alpha^{(s)l} \quad (l=1, 2, \dots) \quad \text{and}$$

$$|S_{n+k}/S_n - \alpha^k| \leq c(\alpha) S_n^{-1-\rho} \quad (1 \leq k \leq s-1) \quad \text{is obtained.}$$

$$\text{Let } \mathcal{Q}_n = \{ \quad \text{is a set of numbers and } \mathcal{Q}_n = \sum_{i=1}^s \xi_i^{(i)} \alpha^{(i)n} \quad \text{and}$$

$$\text{recurrence formula } \mathcal{Q}_n = a_{s-1} \mathcal{Q}_{n-1} + \dots + a_1 \mathcal{Q}_{n-s+1} + a_0 \mathcal{Q}_{n-s} \quad \text{and}$$

$$\hat{\mathcal{Q}}_n = (\mathcal{Q}_0, \dots, \mathcal{Q}_{s-1}) \neq \hat{0} \quad \text{and } \hat{\mathcal{Q}}_n \text{ is a vector of integers and}$$

$$1 \leq k \leq s-1, \quad n > M(\hat{\mathcal{Q}}, \alpha) \quad \text{such that } |\mathcal{Q}_n| > 1, \quad |\mathcal{Q}_{n+k}/\mathcal{Q}_n - \alpha^k|$$

$$\leq c(\hat{\mathcal{Q}}, \alpha) |\mathcal{Q}_n|^{-1-\rho} \quad \text{and } \omega_1 (=1), \omega_2, \dots, \omega_s \in \mathbb{Q}(\alpha) \text{ is a set of}$$

$$\text{a set of numbers and } \omega_j = \sum_{k=1}^s t_{jk} \alpha^{k-1} \quad (2 \leq j \leq s) \quad \text{and}$$

$$t_{jk} \quad (2 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq s) \quad \text{is a set of rational numbers and } \mathcal{Q}_n(j) =$$

$\sum_{k=1}^s \tau_{jk} Q_{n+k-1} \quad (2 \leq j \leq s)$ は定義より $Q_n(j)$ は次の
 4 階式。

$$Q_n(j) = a_{s-1} Q_{n-1}(j) + \dots + a_1 Q_{n-s+1}(j) + a_0 Q_{n-s}(j)$$

とす。 $\therefore$ 初期値 $Q_0(j), \dots, Q_{s-1}(j)$ は $Q_0, \dots, Q_{s-1}$ と τ_{jk}
 により正確に決まる。 $\therefore$ 次の定理を得る。

定理 14 $\left| \frac{Q_n(j)}{Q_n} - w_j \right| = O(|Q_n|^{-1-\rho}) \quad (2 \leq j \leq s)$

$\therefore$ O -定数は Q, α, w_j により決まる。

これから次の定理を得る：

定理 15 点集合 $\left(\left\{ \frac{k}{Q_n} \right\}, \left\{ \frac{Q_n(2)}{Q_n} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{Q_n(s)}{Q_n} k \right\} \right) \quad (1 \leq k \leq Q_n)$

の偏差

$$y(Q_n) = c(d, \varepsilon) Q_n^{-\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2} + \varepsilon} \quad \text{とす。}$$

定理 15 点集合 $\left(\left\{ \frac{Q_n(2)}{Q_n} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{Q_n(s)}{Q_n} k \right\} \right) \quad (1 \leq k \leq Q_n)$

の偏差

$$y(g) = c(d, \varepsilon) g^{-1+\varepsilon} \quad \text{とす。}$$

特に $s \geq 2$ とし $F(x) = x^s - x^{s-1} - \dots - x - 1 = 0$ の最大根を

$\eta (= \eta^{(1)})$ とし他を $\eta^{(i)} \quad (2 \leq i \leq s)$ とす。 η は PV-数とな
 る。 $2 - 2^{-(s-1)} < \eta < 2 - 2^{-s}, \quad |\eta^{(i)}| \leq \eta - 1 \quad (2 \leq i \leq s)$ と得る。

$$\hat{f} = (F_0, F_1, \dots, F_{s-1}) = (0, \dots, 0, 1) \quad (n \geq s) \quad \text{とし} \quad F_n(j) = F_{n+j-1}$$

$F_{n+j-2} - \dots - F_n \quad (2 \leq j \leq s)$ とおくと (定義 s -次元 Fibonacci

数とす) ($s=2$ の普通 Fibonacci 数), $w_j = \eta^{j-1} - \eta^{j-2} - \dots$

$- \eta - 1 \quad (2 \leq j \leq s)$ とあり次の関係を得る。

$$\left| \frac{F_n(j)}{F_n} - \omega_j \right| \leq c(\gamma) F_n^{-1 - \frac{1}{2^s \log 2} - \frac{1}{2^{2s+1}}} \quad (2 \leq j \leq s)$$

これにより

定理 17. 点集合 $\left(\left\{ \frac{k}{F_n} \right\}, \left\{ \frac{F_n(2)}{F_n} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{F_n(s)}{F_n} k \right\} \right) \quad (1 \leq k \leq F_n)$

は偏差

$$\varphi(F_n) = c(\gamma) F_n^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{s+1} \log 2} - \frac{1}{2^{2s+1}}}$$

をもつ、点集合 $\left(\left\{ \frac{F_n(2)}{F_n} k \right\}, \dots, \left\{ \frac{F_n(s)}{F_n} k \right\} \right), 1 \leq k \leq g \leq F_n$

は偏差

$$\varphi(g) = c(\gamma, \varepsilon) g^{-1+\varepsilon} \quad \varepsilon > 0$$

$s = 2^{\frac{1}{\varepsilon}}$ ならば $c(\gamma) F_n^{-1} (\log F_n)^2, c(\gamma, \varepsilon) F_n^{-\frac{2}{3}+\varepsilon}$ の偏差をもつ。

[E]

一様分布と数値積分の間の関係は次の定理による。

定理 18. $P_n(k) \quad (1 \leq k \leq n)$ は偏差 $\varphi(n)$ の点集合とする。もし

$f(\hat{x})$ が s -次元区間 R の点 $\hat{x} = (x_1, \dots, x_s)$ の有界変動の関数とし $V(f)$ は G_s の全変動とすると

以下が成り立つ。

$$\left| \int_{G_s} f(\hat{x}) d\hat{x} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(P_n(k)) \right| \leq V(f) \varphi(n)$$

を得る。またもしこの不等式がすべての有界変動の関数に成

りて成立すれば $P_n(k) \quad (1 \leq k \leq n)$ は偏差が $\varphi(n)$ を超える点

集合と矛盾する。

かくて多くの積分近似公式が導き出されることになる。

[F]

上記は

華羅庚, 王元著: 「数論在近似分析中的应用」 (純粹数学と
応用数学專著 第1号 [1978年, 248頁, 北京, 科学出版
社])

「簡単に紹介である. 本書は 1963 年上記出版社刊の
両氏著: 「数値積分及其応用」 160 頁の改訂拡大版であ
る. 所謂数値積分法の数論的方法つまり一様分布集合の積
分の近似計算への応用と上記 [A]~[E] では原著の第1章か
ら第5章までの一部を引用して紹介した. これらの章は特に
両氏が 1964 年頃から最近まで活潑に進展されて来た所
あり大変興味深い. くれしくは原著又は中国科学, 科学通報
Scientia Sinica における原論文を参照していただきたい.

原著序において大変明解に数論的数値積分法の「使
の意味とその位置づけ等のべられてゐるがここでは一切省略
させていたたい.

ベクトルなどの記号は原著にはないが筆記の困難さの為にそ
のように記した一部周知の記号もそのまま使用した. また文
面でも原著は親切であるがこれも略した.