

氏 名	伊 藤 昭 い とう あきら
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	理 博 第 559 号
学位授与の日付	昭 和 54 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 物 理 学 第 一 専 攻
学位論文題目	平衡から遠くはなれた系における相転移現象

論文調査委員 (主 査) 教 授 富 田 和 久 教 授 巽 友 正 教 授 恒 藤 敏 彦

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は概周期運動の安定性, およびこれより分岐する新しい運動形態に関する理論的研究であるが, その内容は, I. 概周期運動の無限小摂動に対する安定性, II. 極限周期運動の外力による引込みとその限界, III. 逐次的分数調波分岐の結果現われる混沌相, の三つに分けることができる。

I. 概周期運動の無限小摂動に対する安定性

概周期運動

$$\vec{W}(t) = \{W_k^{(0)}\} = \{R_k^{(0)} \exp i\omega_k^{(0)}t\} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

に無限小の相互作用 $\vec{f}(\vec{W})$ (《1》) を加えた場合, 概周期運動はこわれるか, 或いは変形を受けても概周期運動として継続するか, これがここでの問題であるが, 申請者は次の方程式から出発する。

$$\frac{d}{dt} \vec{W} = F(|W|) \vec{W} + \varepsilon \vec{f}(\vec{W})$$

この種の問題においては永年項の効果をさげえないので, Bogoliubov 等による漸近展開の方法に従って

$$\theta_k = \omega_k t + \varphi_k + \varepsilon \theta_k^{(1)}(\varphi, t) + \varepsilon^2 \theta_k^{(2)}(\varphi, t) + \dots$$

$$R_k = R_k^{(0)} + \varepsilon R_k^{(1)}(\varphi, t) + \varepsilon^2 R_k^{(2)}(\varphi, t) + \dots$$

$$\frac{d}{dt} \varphi_k = \varepsilon A_k^{(1)}(\varphi) + \varepsilon^2 A_k^{(2)}(\varphi) + \dots$$

の如く展開し, 共鳴条件の近傍, すなわち

$$|\sum_{k=1}^n l_k \omega_k^{(0)}| \sim 0(\varepsilon)$$

の場合を考える。この時, $\omega_k^{(0)}$ をわずかに動かして適当な ω_k をえらび

$$\sum_{k=1}^n l_k^{(s)} \omega_k = 0 \quad s=1, 2, \dots, m$$

を満たしたとすれば, 系の運動を支配する方程式は

$$\dot{\phi}_s = \sum_{j=1}^n l_j^{(s)} \varphi_j \quad s=1, 2, \dots, m$$

を用いて

$$\frac{d}{dt}\phi_s = \sum_{k=1}^n l_k^{(s)} \omega_k^{(0)} + \sum_{k=1}^n l_k^{(s)} \sum_{s'=1}^m C_{\{l_j^{(s')}\}}^k e^{i\phi_{s'}} \quad (s=1, 2, \dots, m)$$

で与えられる。ここに摂動 $f(w)$ の効果はフーリエ係数 $C_{\{l_j^{(s)}\}}^k$ に含まれている。この式において、第1項の効果が優勢であれば概周期運動は保たれ、逆に第2項の効果が優勢となれば、 ϕ_s は新しい軌道に引き込まれることになるであろう。

申請者は、上記の事態に対応する条件を立入って論じた結果、引込みの起る領域が $0(\varepsilon)$ 程度におさまるためには $f(W)$ が $(n+1)$ 回微分可能の関数であればよいこと、換言すれば、最後の条件が成立つならば $0(\varepsilon)$ の小領域を除き、概周期運動は安定であることを示したのである。

II. 極限周期運動の外力による引込みとその限界

Iにおいて展開した摂動論を実際問題に適用する場合には、非摂動問題の解が既知であることが要求されるが、これは一般には困難な条件である。そこで、非摂動問題の解があるパラメータに関する摂動解として求められており、新たに加わる相互作用が、この摂動論と矛盾しないという特殊な場合を取上げた。

具体的には、反応系におこる Hopf 分岐点からの僅かの距りをパラメータにえらび、この系の示す極限周期運動に周期的外力を加えて、これを引き込みうるか否かを論ずる。そのような例として、すでに数値的に詳しく調べられているブラッセル模型の強制振動を扱った。これは、次の方程式に要約される。

$$\frac{d}{dt}X = A - X - BX + X^2Y + a \cos \omega t$$

$$\frac{d}{dt}Y = BX - X^2Y$$

まず、 $a=0$ の場合を考えると、この式の定常状態は $X_s=A$, $Y_s=B/A$, また極限周期運動のあらわれる分岐点は $B=B_c \equiv 1+A^2$ で与えられる。ここで、 $X=X_s+x$, $Y=Y_s+y$ とおき、さらに y の代りに $z \equiv x+y$ を用いることとすれば、 $\vec{u} \equiv \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ に対して、次の方程式がえられる。

$$\frac{d}{dt}\vec{u} = (L_0 + L_1)\vec{u} + \vec{G}(\vec{u})$$

$$\text{ここに、} L_0 = \begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} B_c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{G}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} g^{(u)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

また $\varepsilon^2 \equiv (B - B_c)/B_c$ および

$$g(\vec{u}) = \frac{1-A^2}{A}x^2 + 2Axz + x^2(z-x)$$

である。

今、 $L_0\vec{U}_0 = \vec{U}_0^* L_0 = 0$ とし、 $\vec{u}$ を ε で展開して

$$\vec{u} = \varepsilon \vec{u}_1 + \varepsilon^2 \vec{u}_2 + \dots,$$

また $d_t \rightarrow d_t + \varepsilon^2 d_T$ のごとく、時間の尺度を分ければ (通減摂動法),

ε 零次の項から

$$\vec{u}_1 = W_{(T)} U_0 e^{i\omega_0 t} + c.c. \quad (\omega_0 = A)$$

がえられるが、 $W_{(T)}$ を定めるには、低次の解を用いて非線型項を評価しつつ ε の3次まで進むことが必要であり、結果としては W に対して

$$\frac{d}{d\tau}W = \alpha W - \beta |W|^2 W$$

なる方程式がえられる。ここに $\alpha = \frac{1+A^2}{2}$, $\beta = \frac{A^2+2}{2A^2} + i \frac{4A^4-7A^2+4}{6A^3}$ である。

次に, $a \neq 0$ の場合に進む。この場合, 上記の摂動論と矛盾しない形で外力の影響が現われるとすれば, 外力の効果が丁度 ε の 3 次の寄与として残るように a の大きさを調節することが必要になる。このような仮定を導入した結果, 簡単に共鳴条件の近傍を支配する方程式として, 次のようなものがえられる。

(i) $\omega \simeq \omega_0$ の場合

$$\frac{d}{d\tau}W = \alpha W - \beta |W|^2 W + \gamma \tilde{a} e^{i(\tilde{\omega}\tau - \delta)}$$

ただし, $\tilde{a} = \varepsilon^{-3}a$, $\tilde{\omega} = \varepsilon^{-2}(\omega - \omega_0)$, $\gamma \tilde{e}^{i\delta} = \frac{1-iA}{4} (\gamma > 0)$

(ii) $\omega \simeq 2\omega_0$ の場合

$$\frac{d}{d\tau}W = \alpha W - \beta |W|^2 W + \gamma \tilde{a} W^* e^{i(2\tilde{\omega}\tau - \delta)}$$

ただし, $\tilde{a} = \varepsilon^{-2}a$, $\tilde{\omega} = \omega - 2\omega_0$

$$\gamma \tilde{e}^{i\delta} = -\frac{(2-A^2)(A+i)}{6A^2} (\gamma > 0) \text{ である。}$$

申請者は, 上記の様な方程式にもとづいて引込解の 1 次安定性を具体的にしらべ, 引込解が中立安定となる条件を定めた。この結果は, $(a-\omega)$ 面における相図の形に画くことが出来るが, これはすでに数値計算によってえられているものと定性的によい一致を示した。

Ⅲ. 逐次的分数調波分岐の結果あらわれる混沌相

数値的解析の結果によれば, ブラッセル模型の強制振動の場合, $\omega = 2\omega_0$ の共鳴帯において, 外力振幅 a を増していけば, 2^n で表わされる分数調波分岐が逐次にあらわれ ($n=1, 2, \dots$)。これが有限のパラメータ領域に集積した後, chaotic な応答の得られることが知られている。しかし, a を任意に大きくするという意味で, これは明らかにⅡに述べた摂動論の適用範囲外にある。

そこで, 申請者は, Ⅱ(i) $\omega \simeq 2\omega_0$ の W を支配する方程式から出発し, その安定解からの外れが満たす方程式を線型化した上, 適当な変換によって, 次の Mathieu 方程式をえた

$$-\frac{d^2}{dt^2}y + k \frac{d}{dt}y + (a + 2q \cos 2t)y = 0$$

ここに,

$$k \equiv \varepsilon^2 \frac{4}{\omega} \left[\frac{2(2+A^2)}{A^2} |W|^2 - (1+A^2) \right],$$

$$a = \frac{16}{\omega^2} \left[A^2 - 2\varepsilon^2 \frac{(1-A^2)^2}{A^2} |W|^2 \right],$$

$$q \equiv \varepsilon \frac{16}{\omega^2} \sqrt{A^2 + (1-A^2)^2} |W|,$$

また W はⅡ(i)の解で, a に依存する量である。

次に, 非線型効果を取り入れる際に, 申請者はこれが y^3 の形の項に限ると仮定して,

$$-\frac{d^2}{dt^2}y + k \frac{d}{dt}y + (a + 2b \cos 2t)y + y^3 = 0$$

なる方程式を考察し, Mathieu 方程式の解の知られた性質を利用することによって, この方程式の解は

逐次 $2^n (n=1, 2, \dots)$ で表わされる分数調波分岐を行なうことを推論した。

同時に申請者は上記の方程式の数値解をもとめ、実際にパラメータ q の有限領域に 2^n の分数調波分岐が集積した後、chaotic な領域の現われることを確認したのである。

参考論文 1 非平衡における相転移的現象に伴う熱揺動の異常増加を逡減摂動法により扱った速報。

参考論文 2 参考論文 1 の詳報。

参考論文 3 準安定状態からの減衰を確率論的に扱った速報。

参考論文 4 参考論文 2 の詳報。マスター方程式を自己共軛な形に変換し、シュレディンガー方程式との類似に着目して、準安定状態よりの減衰を固有値問題として扱った。

参考論文 5 Belousov-Zhabotinsky 反応に関する Noyes 等の反応機構を簡約した 3 自由度模型を扱い、これから、時間的振動、空間的パターンによって特徴づけられる安定相の存在を導いた。また、臨界点における熱揺動を計算した。

論文審査の結果の要旨

微視的現象を支配する理想的法則が、多くの場合時間の向きを反転した現象の実現をゆるすのに対して、巨視的現象にはしばしば時間の向きが特殊な意味をもつような漸近状態が存在する。物理学におけるこの様な漸近状態としてある程度研究が進んでいるのは、いわゆる熱平衡状態であるといえよう。しかし、自然界におこる現象は、例えば宇宙系や生物系の場合のように、熱平衡から遠く外れた事態に保たれていることが本質的と思われる場合が少なくない。この様な意味において、最近、熱平衡を遠く離れた条件の下で初めて現われる新しい漸近状態に多くの異なる分野から共通の関心が寄せられているが、申請者の本論文はこの種の問題を数理論理的見地から取り上げたものである。

熱平衡から離れた状態であらわれる構造安定相の第一は極限周期運動 (limit cycle) であるが、このような周期運動が 2 つ以上相互作用によって影響し合う場合、新しく期待される事態として次の 3 種が考えられる。

(a) 周期の比が簡単な有理数比に近い場合。

この場合はいわゆる引き込み (entrainment) がおこり、単一周周期運動があらわれる。

(b) 周期の比が簡単な有理数比から遠い場合。

この場合は概周期運動がそのままのころ。

(c) 周期の比、ならびに振幅の比が適当な値の場合。

この場合、運動は初期条件に敏感となり、見掛け上、chaotic な振舞を示す。

外部パラメータを変化させていけば、上記の異なる相の間の移りかわりは、相転移ともいふべき協同的な特徴を示すことが経験的に知られているが、申請者はこの転移現象を理論的に扱った。

本論文第 1 部において申請者は、 n 自由度の力学系について、無限小相互作用が $(n+1)$ 回微分可能であるようなおとなしい関数である場合には、引込み領域は相互作用の大きさ程度の小さい領域に極限され、大部分の領域においては概周期運動が安定であることを示した。これは、Ruelle 等が相互作用に課する条件をよりゆるいものと仮定して、大部分の場合に引き込みが起こることを指摘した主張と相補うもので、

意味深い指摘と考えられる。

第Ⅱ部において申請者は、特殊な模型をとり上げ、極限周期運動と外部から印加された周期運動との相互作用、すなわち強制振動、を外場の振幅の小さい場合、逡減摂動法を用いて扱い、引込み領域(a)と概周期運動領域(b)との境界を理論的に算出した。この結果は、外場の振幅 a と周波数 ω の構成する平面において相図の形であらわされるが、これは、以前にブラッセル模型について、富田と甲斐がえた結果と極めてよい一致を示し、摂動の適用限界をこえても結論は定性的に正しいことが判明した。

第Ⅲ部においては、逐次における分数調波の分岐を理解する手段として、Mathieu 方程式に3次の非線型項を補った模型について、 $2^n (n=1, 2, \dots, \infty)$ で表わされる分数調波分岐が有限のパラメータ領域内で起ることを推論し、数値的計算を用いてこの推論をたしかめた。実際に上記の分数調波分岐が集積的に起った後に、混沌相 (chaos) が現われることをも確かめた。この様な結果は、ブラッセル模型の強制振動に関し、先に富田と甲斐によって行なわれた計算結果と定性的により一致を示している。

以上を要するに、申請者の本論文は、平衡を遠く離れた事態において新たに出現する相と、それらの相の間の相転移という多様性に富む複雑な現象に、明快な理論的理解の1つの視点を与えたものといえることができる。

参考論文はいずれも、申請者のこの方面の研究に対する能力と造詣を語っている。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。