

# Inner amenable group & Group operator algebra

大阪教育大 長田まり子

$\text{II}_1$ -factor は von Neumann による Property  $\Gamma$  によつて、大ざっぱに、二つの類に分けられる。Property  $\Gamma$  をもつ  $\text{II}_1$ -factor の類は、 $\text{II}_1$ -factor の中で重要な役割を占める hyperfinite factor を含む。 $\text{II}_1$ -factor が Property  $\Gamma$  をもつたことは、Connes [8] の定義による full であることと同値である。ここでは先づ Property  $\Gamma$  (及び fullness) は、有限操作のもとでは、不変な性質であることを示す。所が、hyperfiniteness と異なり、操作が無限になると、最も単純な (あるいは cyclic な) 操作に關しても、もはや不変であり得ないことを、例をあげて示す。

$\text{II}_1$ -factor の代表的な例は、infinite discrete countable ICC group  $G$  の left regular 表現  $\lambda$  に対し、 $\lambda(G)$  の生成する von Neumann algebra  $R(G)$  で与えられている。重要な群の例は、自然数上の有限置換全体のなす群  $\Pi$  と、二つの

生成元をもつ自由群  $F_2$  である。  $R(\pi)$  は hyperfinite factor であり、  $R(F_2)$  は full factor である。 1976 年に, Connes [9] は,  $\text{II}_1$ -factor の hyperfiniteness は, 富山 [22] による extension property ともつことと同値であることを示し,  $R(G)$  の hyperfiniteness と群  $G$  の amenability の同値性を示した。 Effros [11] は, 群  $G$  に, amenability をゆるめた, inner amenability を定義し,  $R(G)$  が property  $\Gamma$  ともつならば,  $G$  は inner amenable である事を示した。 ここでは, 群  $G$  が amenable である事は,  $B(\ell^2(G))$  上の state  $\phi$  で,  $\phi(\lambda_g x) = \phi(x \lambda_g)$  ( $g \in G, x \in B(\ell^2(G))$ ) とするものが存在する事と同値である事を示し,  $G$  の inner amenability と  $R(G)$  及び state との関係で述べる。

次に, 群  $G$  と  $\lambda(G)$  の生成する  $C^*$ -algebra  $C_r^*(G)$  との関係について考える。  $G$  が amenable である事は,  $C_r^*(G)$  が character を持つことと同値となる。  $F_2$  は, inner amenable でない群の代表例であるが, Powers [16] の結果より,  $C_r^*(F_2)$  は simple で tracial state を唯一つしか持たない。 そこで, 群の inner amenability と  $C_r^*(G)$  の simplicity 及び tracial state の唯一性との関連が一つの問題として, 考えられる。 これらは, 互いに独立な性質であるという例を示す。

以下,  $N$  と canonical trace  $\tau$  をもつ  $\text{II}_1$ -factor,  $\text{tr}$  を

Dixmier [10], Segal [20] による Hilbert space  $L^2(N, \tau)$  とする。すると,  $N$  は  $L^2$  上 standard に act している。 $N$  中の任意有限個の元  $x_1, x_2, \dots, x_n$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対し,  $N$  の  $\varepsilon$ -タリ  $u$  が存在して,  $\tau(u) = 0$  かつ  $\|x_j u - u x_j\|_2 < \varepsilon$  ( $1 \leq j \leq n$ ) を充すとき,  $N$  は property  $\Gamma$  をもつという, ただし,  $x \in N$  に対して,  $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$  である。  $\text{Aut } N$  及び  $\text{Int } N$  をそれぞれ  $N$  の automorphism 全体 及び inner automorphism 全体とする。一般の factor  $M$  の  $\text{Aut } M$  に対して,  $M_\ast$  での各点 norm 収束の位相を導入したとき,  $\text{Int } M$  が部分群をなしているならば,  $M$  は full であるという [8]。この位相は  $\text{II}_1$ -factor  $N$  の  $\text{Aut } N$  に対しては, 各点毎の  $\|\cdot\|_2$ -収束による位相と一致する。 $N$  が full であることと,  $N$  が property  $\Gamma$  をもつことは [8] 及び [19] によって同値である。 $(x_k)_k$  を  $N$  の bounded sequence とする。このとき,  $(x_k)_k$  が central sequence であるとは,  $\|x_k y - y x_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  かつ, すべての  $y \in N$  に対して成立することとする。また, central sequence  $(x_k)_k$  が trivial であるとは,  $(x_k)_k$  に対して, 複素数の sequence  $(\mu_k)_k$  が存在して,  $\|x_k - \mu_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  を充すことである。すると  $N$  が property  $\Gamma$  をもつことと,  $N$  が non-trivial かつ central sequence をもつことは同値である [10]。

Full  $\text{II}_1$ -factor の outer automorphism group による crossed

product.

von Neumann 環の理論において, tensor product 及び crossed product は, (ほぼ) 有効な手段として, 用いられる。そこで, fullness (したがって property  $\Gamma$ ) の, それらの product のもとでの, 不変性について, 考えてみる。Connes [8] 及び McDuff [13] は,  $\text{II}_1$ -factor  $N, M$  に対して, その tensor product  $N \otimes M$  が full である為の必要十分条件は,  $N$  と  $M$  が共に full であることを示した (必要条件については, 御園生 [14] も示している)。所で境 [18] は,  $N$  がどのような  $\text{II}_1$ -factor であっても, infinite tensor product  $\bigotimes_{i=1}^{\infty} N_i$  ( $N_i = N, \forall i$ ) は常に property  $\Gamma$  を持つことを示した。従って, fullness は, 有限 tensor product のもとでは, 必ずしも不変であるが, 巡回無限 tensor product のもとでは, 不変であり得ないことになる。ここでは, crossed product に関しても, 同様な結果が成立することを示す。

補題 1  $\text{II}_1$ -factor  $N$  が full であることと,  $N$  上の  $n \times n$ -matrix algebra  $M_n(N)$  が full であることは, 同値である。

証明  $(x_k)_k \in M_n(N)$  の bounded sequence とする。  $x_k$  の  $(i, j)$ -要素を  $x_k(i, j)$  とする。  $(x_k)_k$  が central sequence であることは,  $x_k(i, j)$  が  $i \neq j$  ならば 0 に strongly 1 に収束し,

かつ  $x_k(i, i)$  は  $N$  の central sequence である事と同値である。  
従って,  $N$  が non-trivial な central sequence をもつ事と,  $M_u(N)$   
が non-trivial な central sequence をもつ事は同値となる。〃

$G$  を von Neumann 環  $N$  の automorphism のなす可算な,  
discrete group とする。  $\pi \in N$  の  $l^2(G, \text{tr})$  上への表現;

$$(\pi(x)\xi)(g) = g^{-1}(x)\xi(g), \quad (g \in G, x \in N, \xi \in l^2(G, \text{tr}))$$

とし,  $\lambda \in G$  の  $l^2(G, \text{tr})$  上への表現;

$$(\lambda_h \xi)(g) = \xi(h^{-1}g), \quad (h, g \in G, \xi \in l^2(G, \text{tr}))$$

とす。  $\pi(N)$  と  $\lambda(G)$  の生成する  $l^2(G, \text{tr})$  上の von Neumann  
環を,  $N$  の  $G$  による crossed product といい,  $G \rtimes N$  とす。

定理 2  $N$  を separable な predual をもつ  $\text{II}_1$ -factor,  $G$   
を  $N$  の outer automorphism のなす有限群とすると, 次の  
(1), (2), (3) は, 同値である;

(1)  $N$  が full である。

(2)  $G \rtimes N$  が full である。

(3)  $N^G = \{x \in N; g(x) = x \quad \forall g \in G\}$  が full である。

証明  $\text{II}_1$ -factor  $N$  の outer automorphism のなす有限群  
 $G$  に対し,  $G \rtimes N$  及び  $N^G$  は  $\text{II}_1$ -factor である [15]。

(1)  $\Rightarrow$  (2):  $G \rtimes N$  の central sequence は, すべて trivial であ  
る事という。  $(x_k)_k$  を  $G \rtimes N$  の central sequence とす。  
各  $x_k$  は,  $x_k = \sum_{g \in G} x_k(g) \lambda_g$ ,  $(x_k(g) \in \pi(N))$  という形で,

一意的に展開される。  $\pi(N)$  上の  $\lambda_g$  で induce される automorphism を又同じ  $g$  で表わすことにする。  $(x_k)_k$  が central sequence だから、すべての  $a \in \pi(N)$  に対して、

$$\|x_k a - a x_k\|_2^2 = \sum_{g \in G} \|x_k(g) g(a) - a x_k(g)\|_2^2 \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0.$$

従って、 $\|x_k(g) g(a) - a x_k(g)\|_2^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  がすべての  $a \in \pi(N)$

と  $g \in G$  に対して成立する。  $g \neq 1$  ならば、 $g$  は  $\pi(N)$  の outer

automorphism である。所で  $\pi(N)$  は full だから、outer

automorphism  $g(\neq 1)$  は、 $\text{Int } N$  の closure に属さない。従って、

[9: 定理 3.1] によつて、 $(x_k(g))_k$  は  $g \neq 1$  ならば、0 に strongly

に収束する。  $g = 1$  に対しては、上式は  $(x_k(1))_k$  が  $\pi(N)$  の

central sequence であることを示す。  $\pi(N)$  は full だから、

$(x_k(1))_k$  は trivial でなければならぬ。従って、複素数

の sequence  $(\mu_k)_k$  で  $\|x_k(1) - \mu_k\|_2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  とするものが、存

在する。  $\|x_k - \mu_k\|_2^2 = \sum_{g \in G} \|x_k(g)\|_2^2 + \|x_k(1) - \mu_k\|_2^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$

より  $(x_k)_k$  は trivial である。

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) : [2: 定理 1] より、 $G$  の位数を  $n$  とすると、

$G \otimes N$  は  $N^G$  上の  $n \times n$ -matrix algebra と同型である。

従って、補題 1 により、(2) と (3) は同値である。

(2)  $\Rightarrow$  (1) :  $N$  が property T をもてば、 $G \otimes N$  が property T をもつことを示す。[9: 定理 2.1] により、II<sub>1</sub>-factor  $B$  が property T をもつための必要十分条件は、任意の finitely

generated by inner automorphism group  $K$  に対し  $Z$ ,  $B$  上の  $K$ -invariant な non-normal state が, 存在することである。  $B$  の  $\forall z \in Z$  の元は,  $B$  の中の  $z$  = タリ の一次結合であらわされるから,  $B$  が property T をもつことは,  $B$  の中の任意の有限集合  $x_1, x_2, \dots, x_m$  に対して,  $\varphi(x_i y) = \varphi(y x_i)$  ( $y \in B$ ) が成立つ  $B$  上の non-normal state  $\varphi$  が存在することと同値である。

$N$  が property T をもつとす。  $G$  の  $N$  の中の有限集合  $x_1, x_2, \dots, x_m$  とし,  $m \geq 1$  とす。 各  $x_j$  の展開を  $x_j = \sum_{g \in G} x_j(g) \lambda_g$  ( $x_j(g) \in \pi(N)$ ) とする。  $\varphi \in \pi(N)$  上の non-normal state とし,

$$\varphi(x_j(g) y) = \varphi(y x_j(g)) \quad (y \in \pi(N), g \in G, j=1, 2, \dots, m)$$

を満たすものとす。  $\psi(y) = \frac{1}{m} \sum_{j \in G} \varphi(y x_j)$ , ( $y \in \pi(N)$ ), とおくと,  $\psi$  は  $\pi(N)$  上の state と,

$$\psi(y x_j) = \psi(x_j y) \quad \text{かつ} \quad \psi(x_j(g) y) = \psi(y x_j(g)) \quad (g \in G, y \in \pi(N), 1 \leq j \leq m)$$

を満たす。 この  $\psi$  は  $G$  の  $N$  上に,  $\psi(x) = \psi(x(1))$  により拡張し, 拡張された state を, 同じ  $\psi$  で表わす。 任意に  $x_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) と,  $x \in G$  の  $N$  に対し,

$$\begin{aligned} \psi(x_j x) &= \sum_{g \in G} \psi(x_j(g) g(x(g^{-1}))) = \sum_{g \in G} \psi(g(x_j(g^{-1})) x(g)) \\ &= \sum_{g \in G} \psi(x(g) g(x_j(g^{-1}))) = \psi(x x_j). \end{aligned}$$

もし  $\psi$  が  $G$  の  $N$  上で normal だと仮定すると,  $\psi$  は  $\pi(N)$  上で, normal である。 よって,  $x$  state  $x \in \pi(N)$  の中の positive な元

の net で  $x_\alpha \downarrow 0$  となるものがあると、 $\psi(x_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \varphi(g(x_\alpha)) \downarrow 0$  となり、 $\varphi(x_\alpha) \downarrow 0$  となる。これは  $\varphi$  が  $\pi(N)$  上で non-normal なることに反する。従って、 $\psi$  は  $G \otimes N$  上の non-normal state で  $\psi(x_j x) = \psi(x x_j)$  ( $x \in G \otimes N$ ,  $1 \leq j \leq m$ ) を充す。故に  $G \otimes N$  は property  $\Gamma$  をもつ。 //

注 もし群  $G$  が有限でなければ、定理 2 の内容は、cyclic group に対しても、もはや成立しない。その例として、 $R(F_2)$  上の次の様な automorphism  $\alpha$  を考える。 $R(F_2)$  の元は、 $x = \sum_{g \in F_2} x(g) \lambda_g$  ( $x_g$ : 複素数,  $\lambda$  は  $F_2$  の left regular 表現) と  $\pi$ -strong 位相のもとで展開される。 $\pi$  を  $2\pi$  を法として無理数とし、 $\mu = e^{i\pi}$  とおく。 $F_2$  の元  $g$  を reduced word で表わしたときの各 component の力の和を  $o(g)$  とする。(例えば  $a, b$  は  $F_2$  の generator としたとき、 $a^{x(1)} b^{x(2)} \dots a^{x(k)} = g$  に対する  $o(g)$  は  $\sum_{j=1}^k n_j$  である)。  $R(F_2)$  の automorphism  $\alpha$  と、 $\alpha(x) = \sum_{g \in F_2} x(g) \mu^{o(g)} \lambda_g$  とおくと、すべての整数  $j$  に対して、 $\alpha^j$  は  $R(F_2)$  の outer automorphism である [4, 補題 1]。  $\alpha$  の生成する群を  $G$  とすると  $R(F_2)^G$  は  $R(F_\infty)$  と同型となり  $R(F_2) R$  は  $R(F_\infty)$  は共に full であるから  $G \otimes R(F_2)$  は property  $\Gamma$  をもつ [6: 注意 4]。

### 群の inner amenability と group factor の性質

$G$  は discrete countably infinite ICC group (すなわち、

$G \ni g \neq 1$  ならば,  $C_g = \{hgh^{-1} : h \in G\}$  は無限集合) とする。  
 $\delta_g$  は  $g \neq 1$ , 他で 0 の値をとる  $G$  上の関数とする。 $R(G)$  は,  
 $\tau(x) = \langle x, \delta_1, \delta_1 \rangle$  ( $x \in R(G)$ ) で定義される faithful normal  
trace  $\tau$  をもつ  $\mathbb{H}_1$ -factor である。 $\ell^\infty(G)$  は  $G$  上の bounded  
sequence 全体とする。 $G$  の left regular 表現  $\lambda$  と同じ記号  
 $\lambda_g$  をもって,  $\ell^\infty(G)$  上の isometry  $\lambda_g(f)(h) = f(g^{-1}h)$  ( $h \in G$ ,  
 $f \in \ell^\infty(G)$ ) を表わす。 $A_g$  は  $\ell^2(G)$  及び  $\ell^\infty(G)$  上の  
 $A_g f(h) = f(ghg^{-1})$  ( $g, h \in G$ ) なる isometry を表わす。  
 $G$  が amenable であるとは,  $\ell^\infty(G)$  上の state  $\sigma$  で,  $\sigma(\lambda_g f) =$   
 $\sigma(f)$ , ( $g \in G, f \in \ell^\infty(G)$ ) なるものが存在することである。こ  
れに対し, Effros は,  $G$  の inner amenability を次のように  
定義した [11]。  $G$  が inner amenable であるとは,  $\ell^\infty(G)$  上の  
state  $\varphi$  で  $\varphi(A_g f) = \varphi(f)$  ( $g \in G, f \in \ell^\infty(G)$ ) かつ  $\varphi(\delta_1) \neq 1$  と  
なるものが存在することである。 Amenable group は,  
inner amenable であり,  $F_2$  は inner amenable ではない。  
 $\mathbb{H} \times F_2$  は amenable ではない inner amenable group であ  
る。 Connes [9] による  $\mathbb{H}_1$ -factor の hyperfiniteness の特  
徴付け, 及び  $R(G)$  の hyperfiniteness と  $G$  の amenability  
の同値性を用いると, 次のような  $G$  の amenability につい  
ての特徴付けを行うことができる。

定理 3  $G$  は discrete countably infinite Loc 群と

する。  $G$  が amenable であるための必要十分条件は,  $B(l^2(G))$  上の state  $\varphi$  で  $\varphi(x\lambda_g) = \varphi(\lambda_g x)$  ( $g \in G, x \in B(l^2(G))$ ) とするものが存在することである。

証明  $G$  が amenable であることと  $R(G)$  が hyperfinite であることは同値 [9: 系 7.2] であり,  $\text{II}_1$ -factor が hyperfinite であることは, hypertrace をもつことと同値である [9: 定理 5.1]。従って,  $G$  が amenable であることと  $B(l^2(G))$  上の state  $\varphi$  で  $\varphi(xy) = \varphi(yx)$  ( $x \in B(l^2(G)), y \in R(G)$ ) を満たすものが存在することと同値である。  $G$  が amenable と仮定すると,  $\varphi(x\lambda_g) = \varphi(\lambda_g x)$  ( $x \in B(l^2(G)), g \in G$ ) なる  $B(l^2(G))$  上の state  $\varphi$  は, 二つのようにして存在する。逆に,  $\varphi(x\lambda_g) = \varphi(\lambda_g x)$  ( $g \in G, x \in B(l^2(G))$ ) を満たす  $B(l^2(G))$  上の state  $\varphi$  が存在するとする。  $\alpha$  を  $l^\infty(G)$  の  $B(l^2(G))$  への表現:  $\alpha(f)\xi(h) = f(h)\xi(h)$  ( $\xi \in l^2(G), h \in G$ ) とすると,  $\varphi \circ \alpha$  は

$$\varphi(\alpha(f)) = \varphi(\lambda_g \alpha(f) \lambda_g^*) = \varphi(\alpha(\lambda_g f)) \quad (g \in G, f \in l^\infty(G))$$

を満たす。従って,  $G$  は amenable である。  $\square$

この定理の帰結と inner amenability に対して考えられる次のようにする。

定理 4  $G$  は discrete countably infinite lcc group とする。  $G$  が inner amenable であるための必要十分条件は,  $R(G)$  上の non-normal state  $\varphi$  で  $\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x\lambda_g)$  ( $g \in G, x \in R(G)$ )

を充すものが存在することである。

定理4の証明の前に、少し準備をする。  $\omega$  を自然数上の、free ultrafilter とする。  $\Pi_1$ -factor  $N$  の bounded sequence 全体の成す von Neumann algebra  $\Pi_1^\omega N_\mathbb{R}$  に対し、  $\tau_\omega((x_k)_k)$   
 $= \lim_{k \rightarrow \omega} \tau(x_k)$  なる trace  $\tau_\omega$  の 0-ideal による quotient algebra を  $N^\omega$  とかく。  $N^\omega$  は canonical trace  $\tau_\omega$  をもつ  $\Pi_1$ -factor である。以下  $N$  を自然数  $\omega$  のみにより  $N^\omega$  の sub-factor とみなす。

補題5  $\Pi_1$ -factor  $N$  が property T をもつ 為の必要十分条件は、  $N$  の  $N^\omega$  における relative commutant  $N' \cap N^\omega$  が scalar だけの operator を含むことである。

証明  $N$  が property T をもつ ことと  $N$  の non-trivial な central sequence の存在することとは、同値である [10'; prop. 1.10 I]。  $N$  が property T をもたないとする。  $N' \cap N^\omega$  の元  $z$  に対し  $(z_k)_k$  をその representative sequence とする。  $(y_k)_k$  を operator norm に關する  $N$  の単位球の中の  $\|\cdot\|_2$ -dense な sequence とする。すると各  $k$  に対し、  $\|z_{n_k} y_j - y_j z_{n_k}\|_2 < \frac{1}{k}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) とする番号  $n_k$  が存在する。  $(z_{n_k})_k$  は明らかに、  $N$  の central sequence である。従って、仮定より、  $\lim_{k \rightarrow \omega} \|z_{n_k} - \tau(z_{n_k})\|_2 = 0$ 。故に  $N' \cap N^\omega$  はスカラーのみとなる。逆に、  $N$  が property T をもつとすると、  $(z_n)_n$  は  $N$  の central sequence で、

$\|x_n - \tau(x_n)\|_2$  が 0 に収束しないものとする。すると正の数  $\alpha$  と  $(x_n)_n$  の subsequence  $(x_{n_k})_k$  で  $\|x_{n_k} - \tau(x_{n_k})\|_2 > \alpha$  ( $\forall k$ ) となるものが存在する。 $(x_{n_k})_k$  が代表する  $N' \cap N^\omega$  の元はスカラーではない。 //

ここにおけるいくつかの証明の方法は [9] における手法の modification である。

補題 6  $\text{II}_1$ -factor  $N$  が property  $\Gamma$  をもてば、 $N' \cap N^\omega$  は、無限次元である。

証明 補題 5 により、 $N$  が property  $\Gamma$  をもつと、 $N' \cap N^\omega$  は  $N$  には含まれない。従って、 $x \in N' \cap N^\omega$  ( $\|x\| = 1$ ) で  $N$  には含まれないものが存在する。 $(x_k)_k$  を  $x$  の representative sequence とすると、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y\|_2 \neq 0$  ( $\forall y \in N$ )。  $N$  の operator norm に關する単位球は  $N_1$  は、 $\|\cdot\|_2$  に關してコンパクトであるから、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - y\|_2 > \alpha$  ( $y \in N_1$ ) をみたす正の数  $\alpha$  が存在する。 $(y_k)_k \in N_1$  で  $\|\cdot\|_2$ -dense sequence とする。各  $k$  に対して、次のような  $U_k \in \omega$  をとる：

$\|y_j x_i - x_i y_j\|_2 < 1/k$  ( $1 \leq j \leq k, i \in U_k$ )。各  $l$  に対して、 $(x_k)_k$  の subsequence  $(x_k^l)_k$  で  $\|y_j x_k^l - x_k^l y_j\|_2 < 1/k$  ( $1 \leq j \leq k$ ) かつ  $\|x_k^l - x_m^l\|_2 > \alpha$  ( $l < m$ ) を充たすものがとれる。 $(x_k^l)_k$  を representative sequence とする  $N^\omega$  の元を  $z_l$  とすると、 $(y_j)_j$  が  $N_1$  で  $\|\cdot\|_2$ -dense であることよ

り,  $z_\ell$  は  $N' \cap N^\omega$  に属する。一方, 次の不等式が成立する:

$$\|z_\ell - z_m\|_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k^\ell - x_k^m\|_2 > \alpha, \quad (\ell \neq m).$$

$N' \cap N^\omega$  が有限次元とすると,  $N' \cap N^\omega$  の  $\|\cdot\|_2$  に關する単位球はコンパクトである。 $\|x\| = 1$  より  $\|z_\ell\| \leq 1$  だから, 上の様な無限点列  $(z_\ell)_\ell$  及び  $\alpha$  の存在はコンパクト性に反する。故に,  
 $N' \cap N^\omega$  は無限次元である。//

補題 7  $\text{II}_1$ -factor  $N$  が property  $\Gamma$  をもつならば,  $N$  の  $\mathcal{U}$  =  
 タリ  $\mathcal{U}$  任意の可算集合  $(u_j)_j$  に対し,  $N$  上の non-normal  
 state  $\varphi$  が存在して,  $\varphi(u_j x) = \varphi(x u_j)$  ( $x \in N, j$ ) を充す。

証明  $N$  が property  $\Gamma$  をもつとする。補題 6 より,  $N' \cap N^\omega$   
 は無限次元の von Neumann algebra  $Z$ ; normal finite  
 trace  $\tau_\omega$  をもつ。従って,  $N' \cap N^\omega$  は無限次元の abelian  
 von Neumann algebra を含みから, 各  $k$  に対し,  
 $\tau_\omega(e_k) < 1/k$  とする。また projection  $0 \neq e_k \in N' \cap N^\omega$   
 が存在する。 $(f_n^k)_n$  を  $N$  の projection からなる  $e_k$  の  
 representative sequence とする。 $\|e_k\|_2 > \varepsilon' > 0$  とする  
 任意の  $\varepsilon'$  に対し,  $u_j e_k = e_k u_j$  より  $\forall (j, k) \in \omega$  存在  
 して,  $\|f_n^k u_j - u_j f_n^k\|_2 < (\|e_k\|_2 - \varepsilon')/2k$  が全  $z$  の  
 $n \in \mathcal{U}(j, k)$  に対して成立する。他方  $\tau_\omega$  の定義より,  $\forall k \in \omega$   
 が存在して,  $|\|e_k\|_2 - \|f_n^k\|_2| < \varepsilon'$  が全  $z$  の  $n \in \mathcal{U}_k$  に対  
 して成立する。又  $\forall k \in \omega$  で  $\tau(f_n^k) < 1/k$  を全  $z$  の  $n \in \mathcal{U}_k$  に

に対して充ちものも存在する。各  $k$  に対して,  $\bigcap_{j=1}^k U'(j, k) \cap U'_k \cap \nabla_k$  中の自然数  $m$  をとり,  $f_k = f_m^k$  とおくと,  $f_k$  は,  

$$\tau(f_k) < 1/k, \quad f_k \neq 0, \quad \|f_k u_j - u_j f_k\|_2 < \|f_k\|_2 / 2k$$
をみたす  $j (=1, 2, \dots, k)$  に対して満足する。  $N$  上の normal state  $\phi_k$  を  $\phi_k(x) = \tau(f_k x) / \tau(f_k) \quad (x \in N)$  で定義する。 $(f_k)_k$  は  $\sigma$ -strongly  $1=0$  に収束するのにより,  $\phi_k(f_k) = 1$  となり, [1: 定理 2.3] より, 集合  $(\phi_k)_k$  は  $N_*$  で weakly relatively compact である。従って,  $N^*$  における集合  $(\phi_k)_k$  の weak closure に属する non-normal state  $\phi$  が存在する。各  $x \in N$ ,  $j$  と任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 自然数  $k$  で  $k \geq \max(j, 3\|x\|/\varepsilon)$  のとき

$$|\phi(u_j x u_j^*) - \phi_k(u_j x u_j^*)| < \varepsilon/3, \quad |\phi(x) - \phi_k(x)| < \varepsilon/3$$

を充ちものをとる。すると任意の  $k$  と  $j$  に対し,

$$\begin{aligned} |\phi_k(u_j x u_j^*) - \phi_k(x)| &= |\tau(f_k u_j x u_j^*) - \tau(f_k x)| / \tau(f_k) \\ &\leq \|u_j^* f_k u_j - f_k\|_1 \|x\| / \tau(f_k) \\ &\leq 2\|u_j^* f_k u_j - f_k\|_2 \|f_k\|_2^2 / \tau(f_k) \quad [9: \text{prop. 1.2.1}] \\ &\leq \|x\| / k \end{aligned}$$

が成立することより, non-normal  $(N \cap Z)$  上の state  $\phi$  は  $\phi(u_j x u_j^*) = \phi(x) \quad (x \in N, j=1, 2, \dots)$  をみたす。

$R(G)$  は  $\ell^2(G)$  上で standard  $\pi$  に act している。従って,  $\ell^2(G)$  の各元  $\xi$  は,  $R(G)$  に関して strongly dense  $\pi$ -domain である。

7.  $R(G)$  に *affiliate* してゐる *closed operator* とみなすことが出来る [20]. 以下  $R(G)$  の元  $\xi$  に対し,  $|\xi|$  は, *operator* としての絶対値を表わすことにする。

定理 4 の証明 [11: 定理] より,  $G$  が *inner amenable* であるための必要十分条件は, 次の条件 (★) を充つ sequence  $(\xi_k)_k$  が  $R(G)$  の中に存在することである;

$$(★) \quad \|\xi_k\|_2 = 1, \quad \xi_k(1) = 0 \quad \text{かつ} \quad \|A(g)\xi_k - \xi_k\|_2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (g \in G).$$

$G$  が *inner amenable* とし, 2つの場合に分けることにより, 求めるような *state* の存在を示す。

場合 (1): 上記の sequence  $(\xi_k)_k$  が [9: 命題 1.3.1] における次の条件 (★) を充つ場合:

$$(★) \quad \left( \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し, 正の実数 } \alpha \text{ で} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|E_\alpha(|\xi_k|) \cdot |\xi_k|\|_2 < \varepsilon \text{ を充つものが存在する,} \end{array} \right.$$

ただし,  $E_\alpha$  は  $(0, +\infty)$  の特性函数である。このとき,  $(\xi_k)_k$  を代表元とする  $\xi$  は [9: 命題 1.3.1] により,  $N^\omega$  に *affiliate* する *closed operator* である。sequence  $(\xi_k)_k$  の性質により,  $\xi$  は  $\xi \lambda_g = \lambda_g \xi$  ( $g \in G$ ) を充つスカラー  $\mathbb{C}$  上の *operator* である。各正の実数  $b$  に対して,  $x(b) = \xi - \xi E_b(|\xi|)$  とおくと,  $x(b) \in R(G)' \cap R(G)^\omega$  で  $b$  を十分大きくすると  $x(b)$  は,  $\sigma$ -strongly に  $\xi$  に収束する。もし  $R(G)' \cap R(G)^\omega = \mathbb{C} \cdot 1$  ならば,  $x(b)$  はスカラー  $\mathbb{C}$  上なければならないが, これは  $\xi$  ではない。

スカラーで成ることに反する。従って,  $R(G)' \cap R(G)^\omega \neq \mathbb{C} \cdot 1$ .  
 故に補題 5 に より  $R(G)$  は property T をもつ。  $G$  が可算より,  
 $\{\lambda_g : g \in G\}$  は可算な  $R(G)$  のユニタリな集合だから, 補題 7 より  
 $R(G)$  上の non-normal state  $\varphi$  が存在して,  $\varphi(\lambda_g x) =$   
 $\varphi(x \lambda_g)$  ( $g \in G, x \in R(G)$ ) を充す。

場合 (2): 上の  $(\xi_k)_k$  が (\*) を満たさない場合: 実数  $\alpha$  が存  
 在して, 任意の正の実数  $\alpha$  に対して  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_k(\xi_k) \cdot \xi_k\|_2 \geq \alpha$   
 を充す。各  $k$  に対して,  $\cup_k \in \omega$  をとり,  $\|E_{\cup_k}(\xi_k) \cdot \xi_k\|_2 \geq \alpha$   
 が, すべて  $n \in \cup_k$  に対して成立するようにする。  $\cup_k \ni n_k$   
 をとり,  $\eta_k = \xi_{n(k)}$  とおくと, すべて  $k$  に対して,

$$\tau(E_k(|\eta_k|^2) |\eta_k|^2)^{1/2} = \|E_{\cup_k}(|\eta_k|) |\eta_k|\|_2 > \alpha$$

が成立つ。  $R(G)$  上の normal state  $\varphi_k$  を  $\varphi_k(x) = \tau(|\eta_k|^2 x)$   
 $(x \in R(G))$  に よって定義する。 projection の sequence  $(E_k |\eta_k|^2)_k$   
 は  $\tau(E_k |\eta_k|^2) \leq \tau(E_k(|\eta_k|^2) |\eta_k|^2) / k \leq 1/k$  より,  
 $\sigma$ -strongly に 0 に収束する。 -

$$\varphi_k(E_k |\eta_k|^2) = \tau(|\eta_k|^2 E_k(|\eta_k|^2)) \geq \alpha^2 \quad (\forall k)$$

だから, [1: 定理 2.3] より 集合  $(\varphi_k)_k$  は  $R(G)^*$  で weak-  
 ly relatively compact である。従って, 集合  $(\varphi_k)_k$  の  
 $R(G)^*$  における weak closure に  $R(G)$  上の non-normal  
 state  $\varphi$  が存在する。  $\varphi_k$  は

$$|\varphi_k(\lambda_g x \lambda_{g^*}) - \varphi_k(x)| = |\tau(\lambda_{g^*} |\eta_k|^2 \lambda_g x - |\eta_k|^2 x)|$$

$$\leq \|x\| \|\lambda_g(|\eta_k|^2 \lambda_g^* - |\eta_k|^2)\|_1$$

$$\leq 2 \|x\| \|\lambda_g |\eta_k| \lambda_g^* - |\eta_k|\|_2 \|\eta_k\|_2 \quad [9: \text{命題 } 1.2.1]$$

$$= 2 \|x\| \|\lambda_g |\eta_k| \lambda_g^* - |\eta_k|\|_2$$

と充すことより, state  $\varphi$  は  $\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x \lambda_g)$  ( $g \in G, x \in R(G)$ ) と充す。従って,  $G$  が inner amenable ならば,  $R(G)$  上の nonnormal state  $\varphi$  で,  $\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x \lambda_g)$  ( $g \in G, x \in R(G)$ ) と充すものが存在する。

逆に,  $R(G)$  上の nonnormal state  $\varphi$  で  $\varphi(\lambda_g x) = \varphi(x \lambda_g)$  ( $g \in G, x \in R(G)$ ) と充すものが存在したとすると,  $R(G)$  は factor だから,  $\varphi$  は singular である。故に [21: 定理] により,

$0 < \varepsilon < 1/4$  对する  $\varepsilon$  に対し, projection  $e \in R(G)$  が存在して,  $\varphi(e) = 1$  かつ  $\tau(e) < \varepsilon$  とできる。与え  $\psi(e) > 1 - \varepsilon$  对する  $R(G)$  上の state  $\psi$  の集合とする。暫らく自然数  $m$  を固定する。

$(N^*)^m$  を  $N^m$  の dual とみ下す。  $G$  が可算だから  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n, \dots\}$  とおき,  $\alpha_i$  を  $\alpha_i(x) = \lambda_{g_i} x \lambda_{g_i}^*$  ( $x \in R(G)$ ) 对する inner automorphism とし,

$$W = \{(\varphi - \varphi \cdot \alpha_1, \dots, \varphi - \varphi \cdot \alpha_m) \in N^{m*}; \varphi \in S \cap N_*\}$$

とおく。state  $\varphi$  は  $S \cap N_*$  の  $\sigma(N^*, N)$ -closure に属する。従って,  $(\varphi - \varphi \cdot \alpha_1, \dots, \varphi - \varphi \cdot \alpha_m) = 0$  は  $W$  の  $\sigma(N^{m*}, N^m)$ -closure に属する。故に,  $W$  の  $\sigma(N_*^{m*}, N_*^{m*})$ -closure は 0 を含むが,  $W$  は convex だから  $W$  の  $N_*^{m*}$  には 0 が入らない。

$\Delta$  closure に 0 が含まれる。故に  $S \cap N^*$  の state  $\psi_m$  で、

$$\|\psi_m - \psi_m \cdot \alpha_j\| < 1/m \quad (1 \leq j \leq m) \text{ なるものが存在する。 } \xi_m$$

を  $\ell^2(G)$  の元で、 $\psi_m(x) = \tau(\xi_m^2 x)$  ( $x \in R(G)$ ) なる positive operator とする。すると  $\|\xi_m\|_2 = 1$  かつ

$$\begin{aligned} \|A g_j \xi_m - \xi_m\|_2 &\leq \|A g_j \xi_m^2 - \xi_m^2\|_1^{1/2} \quad [9: \text{命題 1.2.1}] \\ &= \|\psi_m \cdot \alpha_j - \psi_m\|^{1/2} < 1/m, \quad (1 \leq j \leq m) \end{aligned}$$

が成立つ。従ってこのように  $\xi_m$  の sequence を考えれば、

$$\|\xi_m\|_2 = 1 \quad \text{かつ} \quad \|A g_j \xi_m - \xi_m\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \quad (\forall g_j \in G) \text{ と充てる。}$$

もし  $|\xi_m(1)| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$  とすると、自然数  $n$  で  $\|\xi_n - \xi_n(1)\bar{\sigma}_1\|_2$

$< \varepsilon$  とするものが存在する。すると、

$$\begin{aligned} |\psi_n(e) - |\xi_n(1)|^2 \tau(e)| &= |\langle e \xi_n, \xi_n \rangle - \langle \xi_n(1)\bar{\sigma}_1, \xi_n(1)\bar{\sigma}_1 \rangle| \\ &\leq \|\xi_n\|_2 \|e(\xi_n - \xi_n(1)\bar{\sigma}_1)\|_2 + |\xi_n(1)| \cdot \|e\bar{\sigma}_1\|_2 \cdot \|\xi_n - \xi_n(1)\bar{\sigma}_1\|_2 \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

他方  $\psi_n$  は  $S$  の元だから、 $|\psi_n(e) - |\xi_n(1)|^2 \tau(e)| \geq 1 - 2\varepsilon$

となり、 $\varepsilon < \frac{1}{4}$  なることに矛盾する。従って  $|\xi_m(1)| \nrightarrow 1$  は

1 に収束しないから  $\xi_m$  の適当な部分列  $\xi_{k_l}$  で

(\*) の条件を充てるものが取れる。故に、 $G$  は, inner amenable である。

### Reduced group $C^*$ -algebra

定理 3 で群の amenability と  $B(\ell^2(G))$  上の state との関係を示したが、 $G$  が ICC group でなくとも、定理 3 は成立する。

又 state はもっと強い次の定理のような性質をもつものに、  
よって与えられる。次の定理 8 は, discrete で TF の locally  
compact group に対しても真である。

定理 8 discrete countably infinite group  $G$  が amenable  
であるための必要十分条件は,  $B(\ell^2(G))$  上の state  $\varphi$  で  $\varphi(\lambda_g) = 1$   
( $g \in G$ ) を充たすものが存在することである。

証明  $G$  が amenable とすると [12: 定理 2.4.3] と,  $G$  が可算  
であることから  $\ell^1(G)$  中の sequence  $(\eta_n)_n$  で  $\|\eta_n\|_1 = 1$ ,  $\eta_n(g) \geq 0$   
( $g \in G$ ) かつ  $\|\lambda_g \eta_n - \eta_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ( $g \in G$ ) を充たすものが存在する。  
各  $n$  に対して,  $\xi_n(g) = (\eta_n(g))^{1/2}$  とし  $\|\xi_n\|_2 = 1$  かつ  
 $\|\lambda_g \xi_n - \xi_n\|_2 \leq (\|\lambda_g \eta_n - \eta_n\|_1)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ( $g \in G$ ) を充たす。 $\varphi \in \xi_n$   
に対応する vector state の集合  $\{ \varphi \in B(\ell^2(G)) \text{ 上の } w^* \text{-limit point} \}$   
とすると,  $\varphi$  は state で  $\varphi(\lambda_g) = 1$  ( $g \in G$ ) を充たす。

逆に,  $B(\ell^2(G))$  上の state  $\varphi$  が  $\varphi(\lambda_g) = 1$  ( $g \in G$ ) を充たす  
と, Schwartz の不等式より  $\varphi(\lambda_g x \lambda_g^*) = \varphi(x)$  ( $x \in B(\ell^2(G))$ ),  
 $g \in G$  を充たす。故に定理 3.1.1 (i) と同様の証明により,  $G$  は  
amenable である。 //

系 9 群  $G$  が amenable であれば  $C^*(G)$  は character を持  
つ, 従って  $C^*(G)$  は simple で TF である。

amenable group に対するこの結果は, amenable である群の代表例  $F_2$  に対する ( $C^*(F_2)$  は simple で唯一つの

tracial state を持つ) という Powers [16] の結果と対照的である。そこで  $G$  の inner amenability と  $C^*_r(G)$  のこれらの性質との間に何らかの関連があるかという事が考えられるが次に本例によって、これらは互いに独立な性質である事が判る。

例 1  $G$  を  $F_2$  の weak direct product  $\prod_1^\infty G_n$  ( $G_n = F_2$ ) とすると,  $G$  は inner amenable ICC group で,  $C^*_r(G)$  は, 唯一つの tracial state をもつ simple な  $C^*$ -algebra である [3]。

例 2  $d$  を  $F_2$  の  $\pi$  の outer automorphism group への表現で,  $d_g (g \neq 1)$  が non trivial な固定点をもたないとする。積を  $(g, f)(h, l) = (gh, d_h^{-1}(f)l)$  ( $g, h \in F_2, f, l \in \pi$ ) で定義された  $F_2$  と  $\pi$  の semi direct product を  $G$  とする。すると  $G$  は inner amenable な ICC group で,  $C^*_r(G)$  は, 2 つ以上の tracial state をもつ simple な  $C^*$ -algebra である [3]。

文

献

- [1] C. Akemann, The dual space of an operator algebra, Trans. A.M.S., 126(1967), 286-302.
- [2] H. Choda, A comment on the Galois theory for finite factors, Proc. Japan Acad., 50(1974), 619-622.
- [3] H. Choda & M. Choda, Fullness, simplicity and inner amenability, preprint.

- [4] M. Choda, Automorphisms of finite factors on free groups, *Math. Japonica*, 22(1977), 219-226.
- [5] ———, Some relations of  $\text{II}_1$ -factors on free groups, *Math. Japonica*, 22(1977), 383-394.
- [6] ———, The crossed product of a full  $\text{II}_1$ -factor by a group of outer automorphisms, *Math. Japonica*, 23(1978), 385-391.
- [7] ———, The factors of inner amenable groups, to appear in *Math. Japonica*.
- [8] A. Connes, Almost periodic states and factors of type  $\text{III}_1$ , *Journal of Funct. Anal.*, 16(1974), 415-445.
- [9] ———, Classification of injective factors, *Ann. Math.*, 104(1976), 73-115.
- [10] J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bull. Soc. Math. France* 81(1953), 9-39.
- [10'] ———, Quelques propriétés de suites centrales dans les facteurs de type  $\text{II}$ , *Invention Math.*, 7(1969), 215-225.
- [11] E. G. Effros, property T and inner amenability, *Proc. A. M. S.*, 47(1975), 483-486.
- [12] F. P. Greenleaf, Invariant means on topological group,

Van Nostrand Math. Studies, NO. 16, (1969).

- [13] D. McDuff, On residual sequences in a  $\text{II}_1$ -factor,  
J. London Math. Soc. 3(1971), 271-280.
- [14] Y. Misonou, On divisors of factors, Tôhoku Math. J.  
5(1956), 63-69.
- [15] M. Nakamura & Z. Takeda, On certain examples of the  
crossed product of finite factors, I, Proc. Japan Acad.,  
34(1958), 495-499.
- [16] R. T. Powers, Simplicity of the  $C^*$ -algebra associated  
with the free group on two generators, Duke Math. J.,  
42(1975), 151-156.
- [17] J. Philips, Automorphisms of full  $\text{II}_1$ -factors, with  
applications to factors of type  $\text{III}$ , Duke M. J. 43(1976), 375-385.
- [18] S. Sakai, Asymptotically abelian  $\text{II}_1$ -factors, Publ. R. I.  
M. S., Kyoto Univ., 4(1968), 299-307.
- [19] ———, On automorphism groups of  $\text{II}_1$ -factors, Tôhoku  
Math. J., 26(1974), 423-430.
- [20] I. Segal, A non-commutative extension of abstract  
integration, Ann. of Math. 57(1953), 401-457.
- [21] H. Takesaki, On the singularity of a positive linear  
functional on operator algebras, Proc. Japan Acad.,

35 (1959), 365-366.

- [22] J. Tomiyama, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture notes of the Math. Inst. of Univ. of Copenhagen, 1970.