

ノルム錐計画問題の双対性

小崎敏寛 (Toshihiro Kosaki)*
ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co.,Ltd.)

概要

二次錐計画問題 [1] に表れる二次錐に似たノルム錐を導入する. この錐を使った数理計画問題を導入する. その問題に対して双対問題を考える. そして主問題と双対問題の間に弱双対定理がなりたつことを示す.

1 はじめに

二次錐は, ベクトルの 2 ノルムが非負実数で抑えられるという

$$t \geq \|x\|_2 \quad (1)$$

という形式で記述される. アイデアは, ノルムとしてより一般のノルムを考えることである. 2 ノルムとは限らないノルムを用いて錐制約を $x_0 \geq \|x_{1:n}\|$ とする. この時, 弱双対定理がなりたつことを示す.

2 1 ノルムの場合

ノルムとして 1 ノルムを考える. すると次の問題を考えることになる.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x_0 \geq |x_1| + \cdots + |x_n|. \end{aligned} \quad (\text{P}_1)$$

双対問題は,

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y + z = c \\ & z_0 \geq \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\} \end{aligned} \quad (\text{D}_1)$$

となる. 主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= x^T z \\ &= x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \\ &\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_1 \|z_{1:n}\|_\infty \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

がなりたつことより, 弱双対定理がなりたつ.

*toshihirokosaki@gmail.com

3 2ノルムの場合

ノルムとして2ノルムを考える。すると次の問題を考えることになる。

$$\begin{aligned}
 & \min c^T x \\
 & \text{s.t. } Ax = b \\
 & \quad x_0 \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.
 \end{aligned} \tag{P_2}$$

双対問題は,

$$\begin{aligned}
 & \max b^T y \\
 & \text{s.t. } A^T y + z = c \\
 & \quad z_0 \geq \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2}.
 \end{aligned} \tag{D_2}$$

となる。主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned}
 c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\
 &= x^T z \\
 &= x_0 z_0 + x_{1:n}^T z_{1:n} \\
 &\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_2 \|z_{1:n}\|_2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

がなりたつことより, 弱双対定理がなりたつ。

4 ∞ ノルムの場合

ノルムとして ∞ ノルムを考える。すると次の問題を考えることになる。

$$\begin{aligned}
 & \min c^T x \\
 & \text{s.t. } Ax = b \\
 & \quad x_0 \geq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.
 \end{aligned} \tag{P_\infty}$$

双対問題は,

$$\begin{aligned}
 & \max b^T y \\
 & \text{s.t. } A^T y + z = c \\
 & \quad z_0 \geq |z_1| + \cdots + |z_n|
 \end{aligned} \tag{D_\infty}$$

となる。主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned}
 c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\
 &= x^T z \\
 &= x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \\
 &\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_\infty \|z_{1:n}\|_1 \\
 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

がなりたつことより, 弱双対定理がなりたつ。

5 p ノルムの場合

ノルムとして p ノルムを考える. $p \geq 1$ として, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ をみたす q について,

$$x^T y \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad (5)$$

がなりたつ (Hölder の不等式 [2]). 次の問題を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x_0 \geq \|x_{1:n}\|_p. \end{aligned} \quad (\mathbf{P}_p)$$

双対問題は,

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ \text{s.t.} \quad & A^T y + z = c \\ & z_0 \geq \|z_{1:n}\|_q \end{aligned} \quad (\mathbf{D}_p)$$

となる. 主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= (A^T y + z)^T x - (Ax)^T y \\ &= x^T z \\ &= x_0 z_0 + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n \\ &\geq x_0 z_0 - \|x_{1:n}\|_p \|z_{1:n}\|_q \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

がなりたつことより, 弱双対定理がなりたつ.

6 フロベニウスノルムの場合

行列のノルムとしてフロベニウスノルムを考える. 行列 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して, フロベニウスノルム

$$\|X\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}^2} \quad (7)$$

を考える. 行列 X_1 と X_2 の内積 $X_1 \bullet X_2$ を

$$X_1 \bullet X_2 := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{1ij} X_{2ij} \quad (8)$$

と定義する. 次の問題を考える.

$$\begin{aligned} \min \quad & dx_0 + C \bullet X \\ \text{s.t.} \quad & ax_0 + \mathcal{A}X = b \\ & \|X\|_F \leq x_0 \end{aligned} \quad (\mathbf{P}_F)$$

双対問題は,

$$\begin{aligned}
 & \max b^T y \\
 & \text{s.t. } \mathcal{A}^* y + Z = C \\
 & \quad a^T y + z_0 = d \\
 & \quad \|Z\|_F \leq z_0
 \end{aligned} \tag{D_F}$$

となる. $\mathcal{A}$ は $\Re^{m \times n} \rightarrow \Re^l$ の線形作用素. $\mathcal{A}^*$ は

$$(\mathcal{A}X)^T y = X \bullet \mathcal{A}^*(y) \tag{9}$$

をみたす随伴作用素. 主問題と双対問題の目的関数値について,

$$\begin{aligned}
 dx_0 + C \bullet X - b^T y &= (a^T y + z_0)x_0 + (\mathcal{A}^*(y) + Z) \bullet X - (ax_0 + \mathcal{A}X)^T y \\
 &= x_0 z_0 + X \bullet Z \\
 &\geq x_0 z_0 - \|X\|_F \|Z\|_F \\
 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{10}$$

がなりたつことより, 弱双対定理がなりたつ.

7 証明に使用した不等式

補題 1 実数 $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0$ に対して,

$$ac - bd \geq 0 \tag{11}$$

がなりたつ.

(証明)

$$\begin{aligned}
 0 &\leq (a - b)(c - d) = ac + bd - ad - bc \\
 &= ac - bd + d(b - a) + b(d - c)
 \end{aligned} \tag{12}$$

となる. $d \geq 0$, $a - b \geq 0$, $b \geq 0$, $c - d \geq 0$ より,

$$\begin{aligned}
 ac - bd &\geq d(a - b) + b(c - d) \\
 &\geq 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

がなりたつ.

■

8 まとめと今後の課題

この論文では, 2次錐計画問題を一般化したノルム錐計画問題を提案した. ノルム錐計画問題に対して, 弱双対性がなりたつことを示した.

今後の課題として次のようなものがある. 強双対性がなりたつかどうか調べる. ノルム錐計画問題を解く主双対内点法を考える. ベクトル変数だけでなく, 行列変数を考える.

参考文献

- [1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-Order Cone Programming, *Mathematical Programming*, 95, 3-51, 2003.
- [2] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2007.