

On the cobordism of companions of knots

大阪工大 茨谷哲夫

R^3 中の 2 つの genus 1 の solid tori V^*, V がある。そのとき V^* から V への orientation preserving homeomorphism が faithful とは、 V^* の longitude を V のそれにうつす写像をいう。ここでは V^* の core (k^* と書く) が trivial knot の場合を考える。そこで $f: V^* \rightarrow V$ を faithful としたとき V^* の knot k^* に対して V の knot $f(k^*)$ を k で表わす。そのとき、 k_0, k^*, k の間には次の関係が知られている。

Theorem A ([2], [4]) p を k と V の meridian disk M との intersection number としたとき、

- (i) $\Delta_k(t) = \Delta_{k_0}(t^p) \Delta_{k^*}(t)$ (Alexander polynomial)
- (ii) $g(k) \geq g(k^*) + pg(k_0)$ (genus)

Theorem B ([7]) signature に関しては、

$$\sigma(k) = \begin{cases} \sigma(k^*) & \text{if } p \text{ is even} \\ \sigma(k^*) + \sigma(k_0) & \text{if } p \text{ is odd} \end{cases}$$

ここではまず、これらの knots の 4次元 genus の関係を調べる。

$R^3[0]$ の knot k の 4次元 genus ($h(k)$ で表わす) とは、 k に $R^3[0, \infty)$ で locally flat な surface を span したときの surface の genus の最小数とする。ここで $R^3[0] = \{(x, y, z) \in R^4 \mid t=0\}$, $R^3[0, \infty) = \{(x, y, z, t) \in R^4 \mid t \geq 0\}$ とする。

そのとき次の定理が証明できる。

Theorem 1 ([5]) δ を $k \cap M$ の最小数としたとき、

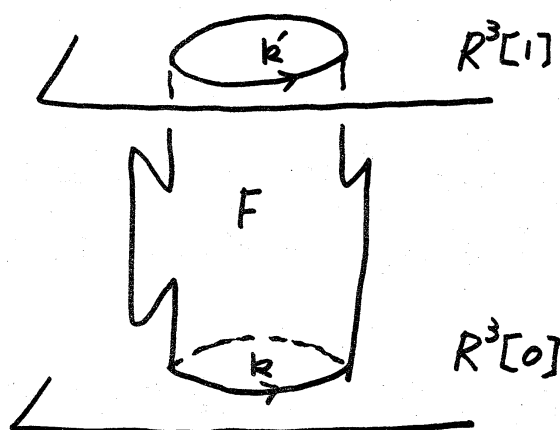
$$h(k) \leq \begin{cases} h(k^*) & \text{if } k_0 \text{ is a slice knot} \\ h(k^*) + p h(k_0) + \frac{8-p}{2} & \text{if } k_0 \text{ is not a slice knot} \end{cases}$$

k が slice knot であることと $h(k) = 0$ が同値だから、

Corollary もし k_0 と k^* が slice knot ならば、 k は slice knot になる。

次にこれらの knots の cobordism の間係を調べる。

2つの knots k, k' が cobordant とは ($k \sim k'$ で表わす), $k \subset R^3[0]$, $k' \subset R^3[1]$ に対して $R^3[0,1]$ で locally flat な annulus F で $\partial F = k \cup (-k')$ となるものが存在するときをいう ([3]). したがって $k \sim 0$ とは k が slice knot というのである。



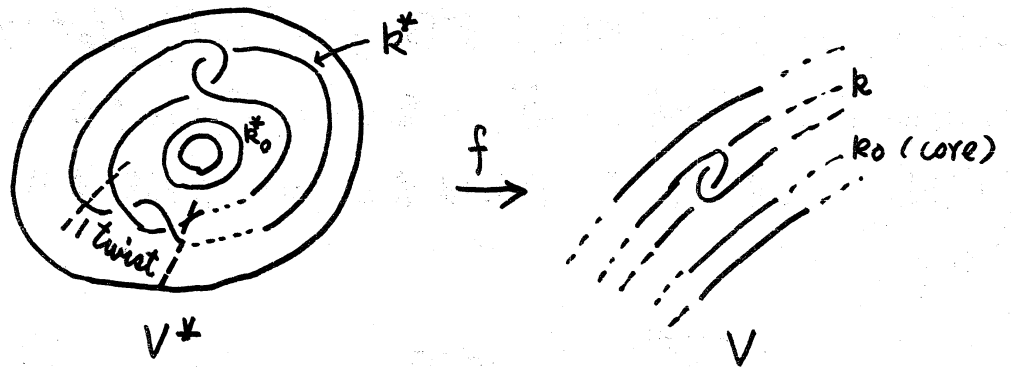
そのとき、次の定理が証明できる。

Theorem 2 ([6]) もし $k_0 \sim k_0^*$ ならば、 $k \sim k^*$.

Remark Theorem 2 を使うと Theorem 1 で k が slice knot のとき、 $h(k) = h(k^*)$ になる。

ここで下図の knot $k^* \subset V^*$ を考えて faithful homeomorphism f でうつしたとき $k = f(k^*)$ を k_0 の double とい

い、twist する数 n のとき twisting number n といふ。そのとき [1] により次のことが知られている。

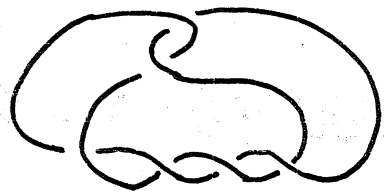


Theorem C ([1]) trivial knot の double k の slice knot $\iff k$ の twisting number が 0 or 2.

twisting number が 0 のときは trivial knot で 2 のときは 6_1 .



0

 6_1

したがって Theorem 2 と Theorem C を使うと次の Corollary を得る。

Corollary k_0 が slice knot のとき、 k_0 の double k が slice knot $\iff k$ の twisting number が 0 or 2.

Theorem 2 の逆は成立しない。すなわち k_0 に無関係に次の定理が成立する。

Theorem 3 k^* が V^* の n 々の split した knots $k_1^*, \dots, k_n^*$ の complete fusion で得られる knot で、各 k_i^* が V^* で Geometrically essential (i.e. 任意の meridian disk M^* of V^* に対して $k_i^* \cap M^* \neq \emptyset$) でないならば、 $k \sim k^*$.

しかし Theorem 3 以外の場合、Theorem 2 の逆が成立するかどうかは知られていない。

References

- [1] A. J. Casson and C. McA. Gordon: On slice knots in dimension three, Proc. of Symposia in Pure Math., 32, Amer. Math. Soc. (1978), 39-

53.

- [2] R.H. Fox : A quick trip through knot theory, *Topology of 3-manifolds and Related Topics*, Prentice-Hall, (1962), 120-167
- [3] R.H. Fox and J.W. Milnor : Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, *Osaka J. Math.*, 3 (1966), 257-267
- [4] H. Schubert : Knoten und Vollringe, *Acta Math.*, 90 (1953), 131-286
- [5] T. Shibuya : On 4-dimensional genera of compound knots, *Kobe Math. Sem. Notes* 8 (1980), 299-305
- [6] T. Shibuya : On the cobordism of compound knots, *Kobe Math. Sem. Notes* 8 (1980) 331-337
- [7] Y. Shinohara : On the signature of knots and links, Ph.D. Dissertation, Florida State Univ. (1969).