

アスペクト比の小さいテラー・クエット流の遷移

同志社大・工 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)

同志社大・工 三浦 知仁 (Tomohito MIURA)

1 はじめに

静止外周壁に囲まれた容器内で2枚の平行円板が同じ軸のまわりに同一方向に回転するとき、2円板間の流体中に生じる流れは流体力学でよく知られたテラー・クエット流の回転軸方向長さが有限長の場合に対応している。また、円板間隔が円板半径に対して非常に狭い場合はコンピュータのハードディスク内部流れのモデルでもある。2円板が高速度で回転する場合、2円板間に生じる流れは複雑になり、ハードディスクの振動や騒音の原因となる。また、シリコンウエハ製造の加工工程においては、表面処理を行う際に多数枚のウエハを同軸で回転させるため、同様の流れが発生する。表面処理仕上げの精度を向上させるためにもこの流れ場の理解が不可欠である。

回転2円板間流れは主にハードディスク内部流れのモデルとして研究されてきた。Lennemann¹⁾は、円板間流体層の水平断面(回転軸は鉛直方向とする)の可視化を行い、コアと呼ばれる領域で流れ場が多角形パターンを示すことおよびコア領域は2円板の回転速度の約80%で回転していることを示し、2円板のフラッタ現象についても詳しく調べた。Abrahamson, Eaton and Koga²⁾は、2円板間鉛直矩形断面の縦横比(アスペクト比)が小さい場合の水平断面内の流れ場を可視化実験により調べ、流れ場が回転ハブ付近で剛体回転する内部領域と大きな渦に支配される外部領域および静止外周壁の境界層の三つの領域に分けることができることを示した。Shuler *et al.*³⁾も Abrahamson *et al.*²⁾と同様にこの流れの可視化実験を行った。彼らは流れ場を回転軸付近の剛体回転領域、静止外周壁の境界層、コアと呼ばれる非粘性領域、非粘性コア領域から剛体回転領域へ遷移するまでの孤立したせん断層、2円板に沿って伸びるエクマン層の五つの領域に分類した。Humphrey and Gor⁴⁾は、鉛直断面内の流れ場について可視化実験を行い、定常な2次元軸対称流から非定常な3次元流への遷移が起こる条件を求めた。

舟木, 滝澤, 平田, 矢野⁵⁾は外周壁が少し異なった形状の回転2円板間流れについて、回転軸方向から見た流れ場(水平断面)の可視化実験を行い、回転中心部(ハブ)付近に楕円形, 三角形, 四角形, 五角形, 六角形および円形の6種類のコア領域が発生することを確認した。

最近では、数値シミュレーションによって軸対称流れ場について調べた例や、軸対称性の破れ、3次元流れ場を調べた例も報告されている。Herrero, Giralt and Humphrey⁶⁾は、アスペクト比が小さい領域で、軸対称な2次元流から遷移する非定常な3次元流について異なる二種類の流れのパターンが存在することを確認し、Randriamampianina *et al.*⁷⁾はアスペクト比が比較的大きい場合に、軸対称流れ場でピッチフォーク分岐とホップ分岐が生じることを示した。

これまでの研究においては、流れ場の構造についてはよく調べられてきたが、流れパターンの遷移についての研究は少なくあまり明らかにはなっていない。本研究では軸対称な流れ場の仮定のもとに回転2円板流れの不安定性と遷移を実験および定常解の数値計算と線形安定性解析および数値シミュレーションにより調べる。また、水平断面内の可視化実験を行い、多角形パターンの発生領域を調べる。

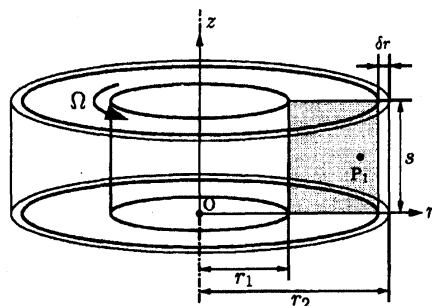


図 1: アスペクト比の小さいテイラー・クエット流と座標系。

2 定式化

2.1 基礎方程式

アスペクト比の小さいテイラー・クエット流について考える(図1)。2枚の円板間隔を s 、内円筒半径を r_1 、円板半径を r_2 とする。2円板は静止外円筒内を Ω の角速度で回転するものとする。座標系は円筒座標で、回転軸と下方の円板との交点を原点 O とし、半径方向を r 、鉛直方向を z にとる。この流れを支配する無次元パラメーターはアスペクト比 Γ 、半径比 η 、間隔比 β およびレイノルズ数 Re であり次のように定義する。

$$\Gamma = \frac{s}{d}, \quad \eta = \frac{r_1}{r_2}, \quad \beta = \frac{r_1}{d} = \frac{\eta}{1-\eta}, \quad Re = \frac{r_2 \Omega d}{\nu}.$$

ここで、 $d = r_2 - r_1$ であり、 ν は流体の動粘性係数である。

流れは軸対称であると仮定し、代表長さ d と代表速度 $r_2 \Omega$ で無次元化すると、角速度 Ω で回転する円柱座標系における連続の式と非圧縮ナビエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right) + 2(1-\eta)v + r(1-\eta)^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{uv}{r} = \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) - 2(1-\eta)u, \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w \quad (4)$$

となる。ここで、

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

である。

変数 $x = r - \beta$ を定義し、速度 $\mathbf{u} = \frac{1}{r_2 \Omega} (u, v, w)$ を流れ関数 ψ と関数 ϕ を用いて

$$u = \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\phi}{r_\beta}, \quad r_\beta = x + \beta \quad (5)$$

と表せば、式 (1) - (4) から ω と ϕ についての次の発展方程式が得られる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\omega}{r_\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r_\beta} J(\psi, \omega) - \frac{2}{r_\beta^3} \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{Re} D^2 \omega - \frac{\omega}{r_\beta^2} + 2(1 - \eta) \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (6)$$

$$\omega = \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{r_\beta^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r_\beta} D^2 \psi, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{r_\beta} J(\psi, \phi) = \frac{1}{Re} D^2 \phi - 2(1 - \eta) \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (8)$$

ここで、

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{r_\beta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad J(f, g) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x}$$

である。

境界条件として全壁面上で粘着 (すべりなし) 条件を仮定する。したがって、流れ関数 ψ の境界条件は全壁面上 ($x = 0, 1$ と $z = 0, 1$) で

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \psi = 0 \quad (9)$$

となる。関数 ϕ については 2 円板表面と内円筒壁上 ($x = 0$ と $z = 0, 1$) で

$$\phi = 0 \quad (10)$$

であり、静止外円筒壁上 ($x = 1$) では

$$\phi = -(1 + \beta) \quad (11)$$

となる。

2.2 非線形定常解と線形安定性解析

アスペクト比の小さいテラー・クエット流の非線形定常解の分岐構造とその安定性を調べる。非線形定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ を支配する方程式は式 (6) に式 (7) を代入して時間微分項を 0 とおいた式

$$-\frac{1}{r_\beta} J(\bar{\psi}, D^2 \bar{\psi}) - \frac{2}{r_\beta^2} D^2 \bar{\psi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} - \frac{2}{r_\beta^2} \bar{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} = \frac{1}{Re} D^4 \bar{\psi} + 2(1-\eta) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \quad (12)$$

と式 (8) で時間微分項を 0 とおいて得られる式

$$-\frac{1}{r_\beta} J(\bar{\psi}, \bar{\phi}) = \frac{1}{Re} D^2 \bar{\phi} - 2(1-\eta) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z}. \quad (13)$$

であり、境界条件は式 (9) – (11) と同じである。

非線形定常解の攪乱に対する線形安定性を調べるために、 ψ と ϕ をそれぞれ定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ と攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\phi})$ を用いて、

$$\psi = \bar{\psi} + \hat{\psi}, \quad \phi = \bar{\phi} + \hat{\phi} \quad (14)$$

と表す。式 (14) を式 (6)–(8) に代入し、式 (12) と式 (13) を引く。攪乱について 2 次の非線形項を無視することによって得られる式で、攪乱の時間依存性を複素線形増幅率 λ を用いて、

$$\hat{\psi} = \tilde{\psi} e^{\lambda t}, \quad \hat{\phi} = \tilde{\phi} e^{\lambda t} \quad (15)$$

とおいて整理することにより、次の攪乱方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \lambda D^2 \tilde{\psi} - \frac{2}{r_\beta^2} \left(D^2 \bar{\psi} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} + D^2 \tilde{\psi} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) - \frac{1}{r_\beta} \{ J(\bar{\psi}, D^2 \tilde{\psi}) + J(\tilde{\psi}, D^2 \bar{\psi}) \} \\ - \frac{2}{r_\beta^2} (\bar{\phi} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} + \tilde{\phi} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}) = \frac{1}{Re} D^4 \tilde{\psi} + 2(1-\eta) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\lambda \tilde{\phi} - \frac{1}{r_\beta} \{ J(\bar{\psi}, \tilde{\phi}) + J(\tilde{\psi}, \bar{\phi}) \} = \frac{1}{Re} D^2 \tilde{\phi} - 2(1-\eta) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z}. \quad (17)$$

攪乱 $\tilde{\psi}$ と $\tilde{\phi}$ の境界条件は全壁面上で、

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial z} = \tilde{\psi} = \tilde{\phi} = 0 \quad (18)$$

である。

3 数値計算法

3.1 非線形定常解の計算方法

非線形定常方程式 (12) と (13) を境界条件 (9) – (11) のもとで数値的に解き、 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ を求める。数値計算では、式 (12) と (13) において変数変換 $\xi = 2x - 1$ と $\zeta = 2z/\Gamma - 1$ を行い、

流れ関数 $\bar{\psi}(\xi, \zeta)$ と周方向速度 $\bar{\phi}(\xi, \zeta)$ をチェビシエフ多項式を用いて,

$$\bar{\psi}(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tilde{T}_m(\xi) \tilde{T}_n(\zeta), \quad (19)$$

$$\bar{\phi}(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^{M+2} \sum_{n=0}^N b_{mn} T_m(\xi) \tilde{T}_n(\zeta) \quad (20)$$

と展開する. ここで, チェビシエフ多項式は

$$T_m(x) = \cos m\theta, \quad \theta = \arccos x \quad (m = 0, 1, 2, \dots, -1 \leq x \leq 1)$$

によって定義される. また, $\tilde{T}_m(x)$ と $\tilde{T}_m(x)$ は境界条件を満たすように変形したチェビシエフ多項式であり,

$$\tilde{T}_m(x) = (1 - x^2)^2 T_m(x), \quad \tilde{T}_m(x) = (1 - x^2) T_m(x)$$

である. 展開 (20) は $\phi(\xi, \zeta)$ の ξ (r) 方向の境界条件を満たしていないので, 境界上にもコロケーション点を取り, 境界条件 (11) と (10) を満たすように展開係数を決める. このとき, 2円板と静止外円筒壁間の周方向速度成分 ϕ の不連続性を考慮し, この不連続性を適切な関数形で近似することにより補正を行う. 展開式 (19), (20) において級数の上限は, 展開打ち切り項数を表す. 展開打ち切り項数は, 必要な計算精度が得られるように十分大きくとる. 展開式 (19) と (20) を非線形定常方程式と ϕ の $\xi = -1$ と 1 ($r = 0$ と 1) での境界条件にそれぞれ代入し, コロケーション法を用いると a_{mn} と b_{mn} に関する $(M+1) \times (N+1)$ 個の代数方程式が得られ, それらをニュートン・ラフソン法により解く. コロケーション点には, ξ 方向は境界を含み, ζ 方向は境界を含まない次の点を用いる.

$$\xi_i = \cos \frac{(i-1)\pi}{M+1} \quad (i = 1, 2, \dots, M+2),$$

$$\zeta_i = \cos \frac{i\pi}{N+2} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1).$$

3.2 線形安定性解析

定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\phi})$ の安定性を調べるために, 攪乱方程式 (16) と (17) を境界条件 (18) のもとでチェビシエフ・コロケーション法を用いて数値的に解く. ここでも, 変数変換 $\xi = 2x - 1$ と $\zeta = 2z/\Gamma - 1$ を行い, 関数 $\tilde{\psi}$ と $\tilde{\phi}$ を

$$\tilde{\psi}(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N a_{mn} \tilde{T}_m(\xi) \tilde{T}_n(\zeta), \quad (21)$$

$$\tilde{\phi}(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N b_{mn} \tilde{T}_m(\xi) \tilde{T}_n(\zeta) \quad (22)$$

と展開する. 展開関数 $\tilde{T}_m(x)$ と $\tilde{T}_m(x)$ は 3.1 節の場合と同様に境界条件 (18) を満たすように変形したチェビシェフ多項式である. 展開式 (21) と (22) を攪乱方程式 (16) と (17) に代入し, コロケーション法を用い, 線形増幅率 λ を固有値とする行列の固有値問題に帰着する. この固有値問題を QR 法により数値的に解く. コロケーション点には r と z の両方向ともに境界を含まない次の点を用いる.

$$\xi_i = \cos \frac{i\pi}{M+2} \quad (i = 1, 2, \dots, M+1),$$

$$\zeta_i = \cos \frac{i\pi}{N+2} \quad (i = 1, 2, \dots, N+1).$$

固有値の中で $\text{Re}(\lambda)$ が最大となる λ が定常解の安定性を決定し, それに対応する固有関数が最大増幅攪乱である.

3.3 発展方程式の数値シミュレーション

発展方程式 (6) と (8) およびポアソン方程式 (7) を有限差分近似し, 数値シミュレーションを行う. 変数の離散化については $0 \leq r \leq 1$ の範囲を M 等分, $0 \leq z \leq 1$ の範囲を N 等分し, 4 次精度の中心差分近似を行う. 時間積分についてはオイラー陽解法を用いる. ポアソン方程式 (7) は SOR 法により解く. SOR 法の収束条件は, 流れ関数 ψ の各離散点における k ステップ目と $k+1$ ステップ目の相対誤差の総和が 10^{-9} 以下になったとき収束したとみなす. 渦度 ω と周方向速度成分 ϕ について各離散点における n 番目の時間ステップと $n+1$ 番目の時間ステップの相対誤差の総和が 10^{-9} 以下になったとき解は定常状態に達したものとして計算を打ち切る.

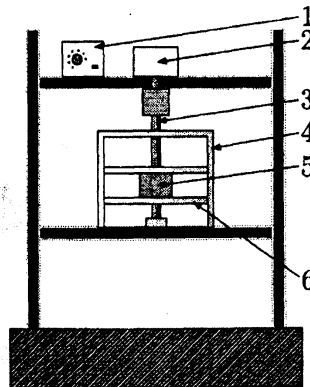


図 2: 実験装置概略図. 1: 回転数制御装置, 2: モータ, 3: 回転軸, 4: 静止外円筒, 5: 内円筒, 6: 回転円板.

4 可視化実験

鉛直断面内および水平断面内の流れ場の可視化実験を行った. 2 円板間の流れを支配する無次元パラメータは, 数値計算と同様, レイノルズ数 $Re = r_2 d \Omega / \nu$, アスペクト比 $\Gamma = s/d$,

半径比 $\eta = r_1/r_2$ である。ここで、 r_1 と r_2 はそれぞれ内円筒および外円筒半径、 $d = r_2 - r_1$ 、 Ω は回転角速度、 ν は動粘性係数、 s は 2 円板間距離である。

実験装置の概略を図 2 に示す。静止外周壁 4 および回転円板 7 はアクリル製であり、半径はそれぞれ 200 mm ($= r_2$)、198 mm ($= r_2 - \delta r$, δr は外円筒と円板との間隙幅) である。内円筒 5 は半径 50 mm ($= r_1$) で塩化ビニル製である。このとき、 $\eta = r_1/r_2 = 0.25$ となる。2 円板間隔 s はいろいろな値に設定する。たとえば、 $\Gamma = 0.3$ のとき $s = 45$ mm である。回転軸 3 はアルミニウム製である。作動流体には空気 (20°C , $\nu = 15.12 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)、可視化には線香の煙を用いる。

実験では、流体層に煙を充満させた後、回転数制御装置 1 でモータ 2 の回転数を調節する。このようにモータの回転数を調節することで $1.0 \times 10^3 \lesssim Re \lesssim 1.8 \times 10^5$ の範囲のレイノルズ数流れを実現する。鉛直断面内の流れ場を可視化する場合は、流体層に鉛直にスリット光を照射し、水平方向からデジタルビデオカメラで撮影する。水平断面内の流れ場を可視化する場合は、流体層に水平にスリット光を照射し、鉛直下方からデジタルビデオカメラで撮影する。

5 結果および考察

5.1 可視化実験と数値計算結果の比較

鉛直断面内の流れ場の可視化実験を行い、数値計算結果との比較を行った。図 3 に可視化実験と数値計算から得られた流れ場を示す。図 3(a) と 3(b) はそれぞれレイノルズ数 $Re = 1600$ のときの可視化実験と数値計算により得られた流れ場であり、2 円板間の中心線に対して上下対称なパターンとなっている。図 3(c) と 3(d) は同様にレイノルズ数 $Re = 2200$ のときの流れ場であるが、 $Re = 1600$ のときと異なり、上下非対称なパターンとなっている。また、これらの図から可視化実験と数値計算結果が非常に良く一致していることがわかる。

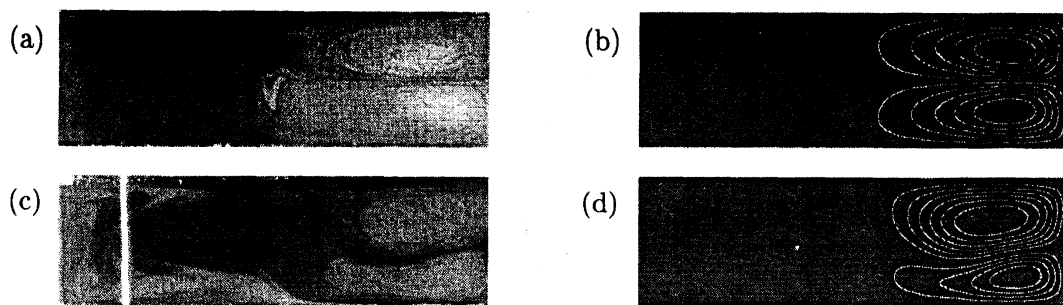


図 3: 流れ場。アスペクト比 $\Gamma = 0.3$, 半径比 $\eta = 0.25$. (a) 可視化写真 ($Re = 1600$), (b) 数値計算 ($Re = 1600$), (c) 可視化写真 ($Re = 2200$), (d) 数値計算 ($Re = 2200$).

5.2 定常解とその安定性

上下対称定常流を数値的に求めその安定性を調べた。全ての計算において半径比を $\eta = 0.5$ とした。アスペクト比の小さいテラー・クエット流を特徴づける代表物理量として、位置

$(x, z) = (4/5, \Gamma/2)$ における z 方向速度 w_1 を用いる.

5.2.1 アスペクト比が小さい場合

アスペクト比 $\Gamma = 0.6$ の場合の定常解の分岐ダイアグラムを図 4 に示す. この図の横軸はレイノルズ数 Re , 縦軸は代表物理量 w_1 である. また, ブランチ AD 上の点 M および PC 上の点 N に対応する流れ場をそれぞれ図 5(a) と 5(b) に示す. 図 4 に示されるように, $\Gamma = 0.6$ では超臨界ピッチフォーク分岐が生じる. ブランチ AD が示すのは, 図 5(a) のような (r, z) 平面内の中心線に関して上下対称な 2 個のセルで形成される定常な流れ場である. 流れの方向は中心線に関して上部のセルは時計回りで, 下部のセルは反時計回りである. 定常解のブランチ PC が示すのは, 図 5(b) のような (r, z) 平面内の中心線に関して上下非対称な 2 個のセルで形成される定常な流れ場である. また, 線形安定性解析から分岐点 (臨界値) が $Re_p = 966.1$ と求められた.

他のアスペクト比についても定常解の分岐とその安定性について調べた. その結果, $\Gamma = 0.3 - 0.68$ では $\Gamma = 0.6$ の場合と同様に, 超臨界ピッチフォーク分岐が生じ, 流れは上下対称な定常流から上下非対称な定常流へ遷移することがわかった.

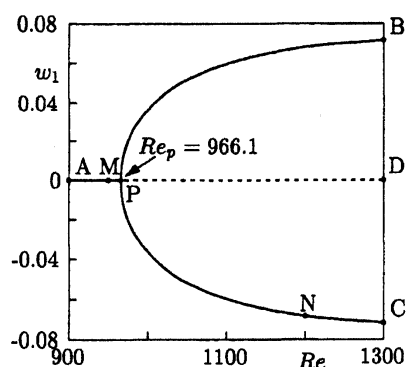


図 4: 分岐ダイアグラム. アスペクト比 $\Gamma = 0.6$, 半径比 $\eta = 0.5$. 実線: 安定な定常解. 破線: 不安定な定常解.

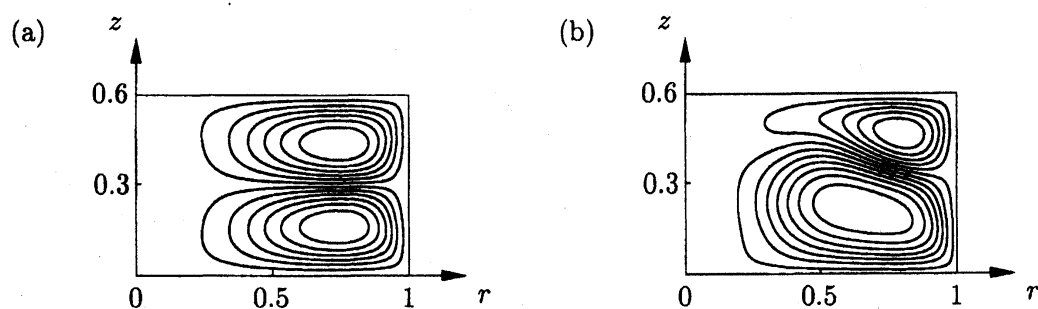


図 5: 流れ場. アスペクト比 $\Gamma = 0.6$, 半径比 $\eta = 0.5$. (a) $Re = 959$, (b) $Re = 1200$.

5.2.2 アスペクト比が大きい場合

アスペクト比が比較的大きい場合についても上下対称定常解を求め、その安定性を調べた。図 6(a) は $\Gamma = 0.69$ の場合の定常解の分岐ダイアグラムである。 $\Gamma = 0.69$ の場合 (図 6(a)) は、レイノルズ数 Re が増加すると点 S において亜臨界ピッチフォーク分岐、点 T で超臨界ピッチフォーク分岐が生じ、点 U ではホップ分岐が起こる。点 S と点 T に対応するレイノルズ数は線形安定性解析からそれぞれ $Re_S = 1070.4$ および $Re_T = 1204.1$ であり、点 U に対応するレイノルズ数は $Re_U = 1213.7$ と求められた。また、転回点 Q と R に対応するレイノルズ数は $Re_Q = Re_R = 1059.1$ となった。

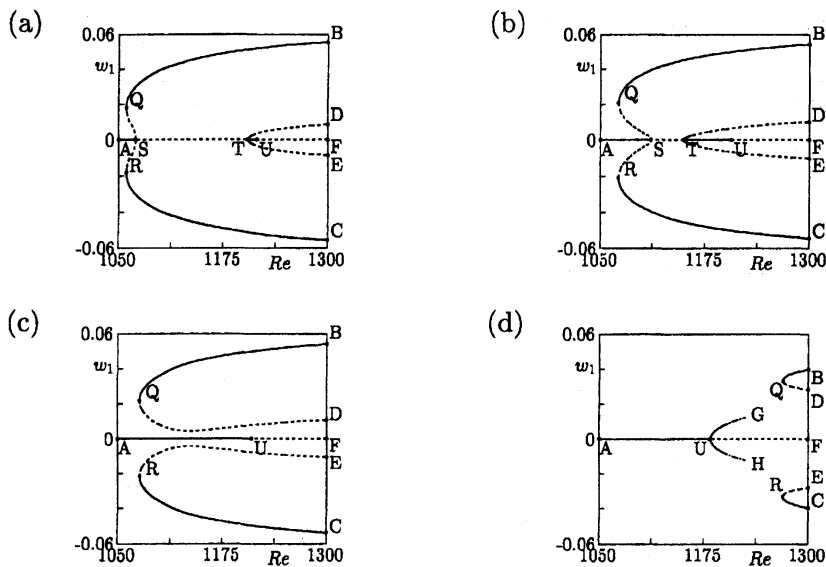


図 6: 分岐ダイアグラム. 半径比 $\eta = 0.5$. 実線: 安定な定常解および安定な非定常解. 破線: 不安定な定常解. 一点鎖線: 本結果からの予測. (a) アスペクト比 $\Gamma = 0.69$, (b) $\Gamma = 0.693$, (c) $\Gamma = 0.694$, (d) $\Gamma = 0.72$.

図 6(b) は $\Gamma = 0.693$ の場合の定常解の分岐ダイアグラムである。この図からわかるように解の分岐構造は $\Gamma = 0.69$ の場合と同様であるが、 Γ が増加すると亜臨界ピッチフォーク分岐点 S と超臨界ピッチフォーク分岐点 T が近づいていく。 $\Gamma = 0.694$ の場合 (図 6(c)) は $\Gamma = 0.69 - 0.693$ の場合と異なり、点 S と T の 2 つのピッチフォーク分岐点が合体して、曲線 BQD と曲線 CRE で表されるサドル・ノード分岐が現れる。点 U ではホップ分岐が生じる。線形安定性解析から、転回点 Q と R に対応するレイノルズ数は $Re_Q = Re_R = 1074.8$ であり、ホップ分岐が生じる点 U に対応するレイノルズ数は $Re_U = 1207.5$ と求められた。したがって、この場合は $\Gamma = 0.6 - 0.693$ の場合と異なり、ホップ分岐が上下対称な定常流からの第一番目の分岐となる。 $\Gamma = 0.7$ と 0.71 についても定常解の分岐構造その安定性を調べた結果、 $\Gamma = 0.694$ の場合と同様な解の分岐を起こすことがわかった。 $\Gamma = 0.69 - 0.71$ において、線形安定性解析からホップ分岐が起こることが示唆されるが、数値シミュレーションで周期解を得ることはできなかった。

同様に $\Gamma = 0.72$ について計算を行ったところ、図 6(d) で示されるような分岐図を得た。 $\Gamma = 0.72$ においては、 $\Gamma = 0.71$ の場合と異なり、ホップ分岐が点 Q と R で示されるサ

ドルノード分岐より低いレイノルズ数で生じる．すなわち $Re_U < Re_{Q(R)}$ となる．この場合においては，数値シミュレーションにより周期解が得られた．図 6(d) に示される曲線 GUH はホップ分岐のブランチである．線形安定性解析から，ホップ分岐が生じる点 U に対応するレイノルズ数は $Re_U = 1171.5$ と求められ，転回点 Q, R に対応するレイノルズ数は $Re_Q = Re_R = 1268.8$ となった．

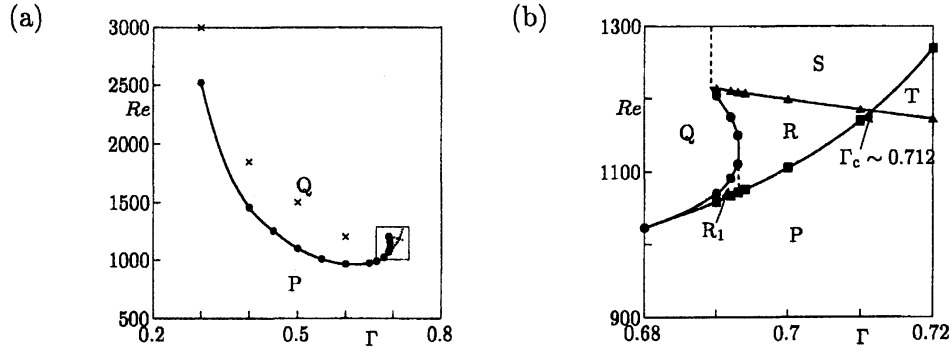


図 7: 遷移ダイアグラム. (b): (a) 中の四角部分の拡大図. $\times$: Randriamampianina *et al.*⁷⁾ の数値シミュレーションによる結果, $\bullet$: 本研究の線形安定性解析による結果 (ピッチフォーク分岐点), $\blacksquare$: 本研究の線形安定性解析による結果 (転回点), $\blacktriangle$: 本研究の線形安定性解析による結果 (ホップ分岐点).

5.3 遷移図

各アスペクト比 Γ についてピッチフォーク分岐点 (Re_P , Re_S , Re_T), 転回点 (Re_Q , Re_R) およびホップ分岐点 (Re_U) を求め，それらを図 7(a) に遷移図としてまとめた．図 7(a) では，結果の比較を行うために，Randriamampianina *et al.*⁷⁾ が数値シミュレーションによって求めた Re_P を $\times$ で示した．図 7(b) は図 7(a) の四角部分を拡大したものである．図 7(a) と 7(b) において， $\bullet$ ， $\blacksquare$ ， $\blacktriangle$ はそれぞれ，超臨界および亜臨界ピッチフォーク分岐点，転回点，ホップ分岐点を示している．図 7(a) から今回求められた結果は Randriamampianina *et al.*⁷⁾ の結果と比較して， Re_P の値は異なるが，アスペクト比 Γ が増加すると Re_P の値が小さくなるという意味で定性的には一致していることがわかる．また，各臨界値を表 1 に示す．

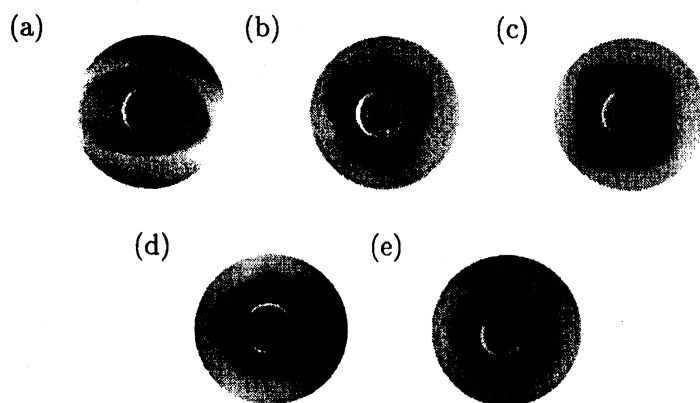
図 7(a) と 7(b) において，P 領域で流れは上下対称な定常流である．Q 領域では，流れは上下非対称な定常流である． R_1 領域では亜臨界ピッチフォーク分岐で示されるようなヒステリシスが起こる．R および R_1 領域では複数パターンの定常流が存在する．S 領域では，上下非対称な定常流および軸対称周期流が現れる．T は軸対称周期流のみが起こる領域であり，図 7(b) 中に示される臨界アスペクト比 $\Gamma_c \sim 0.712$ 以上で現れることがわかる．

5.4 水平断面の可視化実験

水平断面内の可視化実験により得られた代表的な流れパターンを図 8 に示す．図 8(a) は， $\Gamma = 0.3$ ， $Re = 151600$ の場合であり，楕円形 (mode 2) の流れパターンが確認できる．図中

表 1. 臨界レイノルズ数 $Re_P, Re_S, Re_T, Re_{Q(R)}, Re_U$. 線形安定性解析.

Γ	Re_P	Re_S	Re_T	$Re_{Q(R)}$	Re_U
0.3	2524.9	-	-	-	-
0.4	1484.5	-	-	-	-
0.45	1251.8	-	-	-	-
0.5	1100.8	-	-	-	-
0.55	1008.7	-	-	-	-
0.6	966.1	-	-	-	-
0.65	974.4	-	-	-	-
0.68	1022.6	-	-	-	-
0.69	-	1070.4	1204.1	1059.1	1213.7
0.692	-	1091.0	1174.1	1066.5	1210.6
0.693	-	1110.8	1149.6	1071.3	1209.0
0.694	-	-	-	1074.8	1207.5
0.7	-	-	-	1106.0	1198.4
0.71	-	-	-	1168.9	1184.2
0.72	-	-	-	1268.8	1171.5

図 8: 可視化写真 (水平断面). $\Gamma = 0.3$. (a) mode 2 ($Re=151600$), (b) mode 3 ($Re=76600$), (c) mode 4 ($Re=49900$), (d) mode 5 ($Re=39100$), (e) mode 6 ($Re=31600$).

の白色部分は可視化に用いた線香の煙であり、楕円形を形成する黒色部分には線香の煙はほとんど存在しない。すなわち、楕円形領域の内部と外部では、物質の交換はほとんど行われていない。黒色の楕円形部分は 2 円板の回転速度とほぼ同じ回転速度を有している。また、図 8 (b) – (e) に示すように、楕円形パターン以外にも、三角形 (mode 3), 四角形 (mode 4), 五角形 (mode 5) および 六角形 (mode 6) の流れパターンが確認できる。

広範囲のアスペクト比およびレイノルズ数について、各流れパターンの発生領域を調べた。図 9 にその領域図を示す。図中で灰色の領域は明確な流れパターンが確認できた領域であり、隣接するモード間の白色の領域は、明確な流れパターンが確認できなかった領域である。また、この図より、アスペクト比が大きくレイノルズ数が高い領域では低次のモードが現れ、アスペクト比が小さくレイノルズ数が低い領域では高次のモードが現れることがわかる。

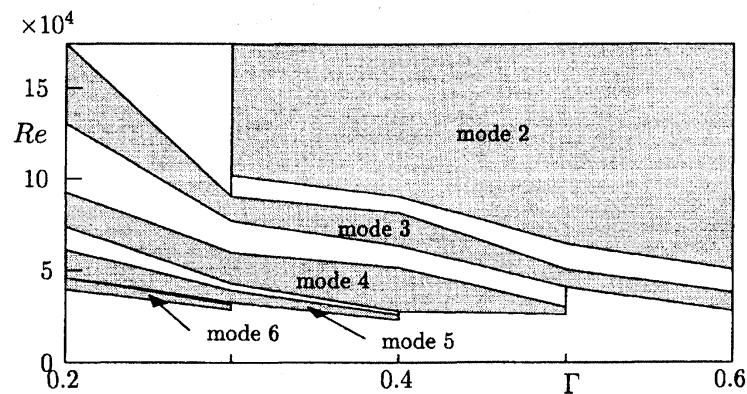


図 9: 流れのパターン領域図.

参考文献

- 1) E. Lennemann, "Aerodynamic aspects of disk files," IBM J. Res. Develop. 480-488 (1974).
- 2) S. D. Abrahamson, J. K. Eaton and D. J. Koga, "The flow between shrouded corotating disks," *Phys. Fluids A1*, 241-251 (1989).
- 3) C. A. Shuler, W. R. Usry, B. Weber, J. A. C. Humphrey and R. Greif, "On the flow in the unobstructed space between shrouded corotating disks," *Phys. Fluids A2*, 1760-1770 (1990).
- 4) J. A. C. Humphrey and D. Gor, "Experimental observations of an unsteady detached shear layer in enclosed corotating disk flow," *Phys. Fluids. A5*, 2438-2442 (1993).
- 5) 舟木 治郎, 滝澤 敬次, 平田 勝哉, 矢野 秀雄, "回転軸を共有する二円板間に生じる流れのモード," 日本機械学会論文集 B61, 2924-2929 (1995).
- 6) J. Herrero and F. Giralt, "Influence of the geometry on the structure of the flow between a pair of corotating disks," *Phys. Fluids 11*, 88-96 (1999).
- 7) A. Randriamampianina, R. Schiestel and M. Wilson, "Spatio-temporal behaviour in an enclosed corotating disk pair," *J. Fluid Mech.* 434, 39-64 (2001).