

The Conway potential functions for pretzel links and Montesinos links

山口女子大 中川洋子 (Yoko Nakagawa)

早大理工 原 正雄 (Masao Hara)

早大理工 大山淑之 (Yoshiyuki Ohyama)

J. W. Conwayにより Alexander polynomial と密接な関係にある potential function が定義され ([2]), R. Hartleyにより 多変数の potential function の存在が示された。([3]) Hartley は又, 2-bridge link に対し 2変数 potential function の axiomatic determination を与えている。

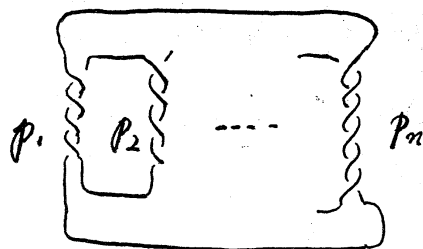
この稿においては 2-components pretzel link と Montesinos link に対し 2変数 potential function が "simple axioms" で定められることを示す。

Main Theorem

2-components pretzel links と Montesinos links の 2変数 potential function は $t_1 t_2 + t_1^{-1} t_2^{-1}$, $t_1 t_2^{-1} + t_1^{-1} t_2$, $t_1^2 + t_2^2$, $t_2^2 + t_2^{-2}$ の integral polynomial で表わされる。

§1. 諸定義

• pretzel link とは下図のような p_1 から p_n の half twists の 2-stranded braid から成る link であり $L(p_1, p_2, \dots, p_n)$ と表れる。



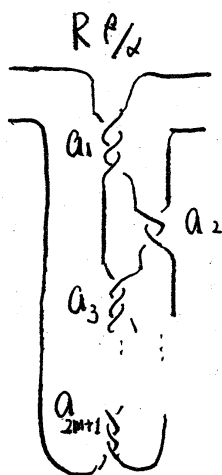
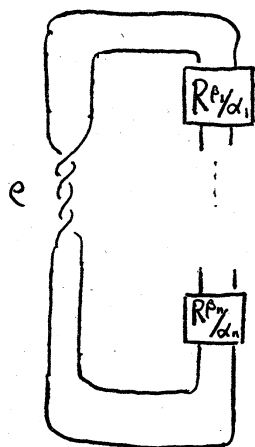
Lemma pretzel link $L(p_1, \dots, p_n)$ が 2-components link となるのは次の2つの場合である。

(I) n : even p_i : odd ($i=1, 2, \dots, n$)

(II) p_1, p_e : even ($1 \neq e$)

p_k : odd ($k \neq 1, e$, and $k=2, 3, \dots, n$)

• Montesinos link は下図のような projection を持つ link であり rational tangle $R\frac{p}{q}$ とは下図のような tangle T α, β は continued fraction により定義される。



$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{2m+1}}}}}$$

(ここで α, β は互いに素)

Montesinos link を $M(e; \frac{p_1}{\alpha_1}, \frac{p_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{p_n}{\alpha_n})$ とあらわす.

ここで $e \in \mathbb{Z}$ $\frac{p_i}{\alpha_i}$ は reduced fraction

lemma Montesinos link $M(e; \frac{p_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{p_n}{\alpha_n})$ が 2-components link となるのは 次の 2つの場合のいずれかである。

$$(I) \quad P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \dots = P(\alpha_n) = 1$$

$$\text{and } P(e + \sum_{i=1}^n p_i) = 0$$

$$(II) \quad P(\alpha_i) = 0 \quad (\text{for some } i, 1 \leq i \leq n)$$

$$\text{and } n - \sum_{i=1}^n P(\alpha_i) = 2$$

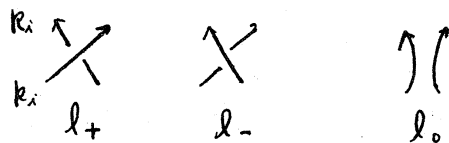
$$\therefore P(a) = 0 \quad a: \text{even} \quad \text{とする。}$$

$$P(a) = 1 \quad a: \text{odd}$$

• Conway potential function

2-components link の Conway potential function ∇ は 以下の axioms で定義できる。

$$(1) \quad \nabla_{l_+} = \nabla_{l_-} + (t_i - t_i^{-1}) \nabla_{l_0}$$



ここで k_i とは link の同じ component である二点を示す

$$(2) \quad \nabla_{l_{++}} + \nabla_{l_{--}} = \begin{cases} (t_i t_j + t_i^{-1} t_j^{-1}) \nabla_{l_{00}} & (2-1) \\ (t_i t_j^{-1} + t_i^{-1} t_j) \nabla_{l_{00}} & (2-2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} k_i \\ \nearrow \\ \text{---} \\ \nwarrow \\ k_j \\ l_{++} \end{array} &
 \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{---} \\ \nwarrow \\ l_{--} \end{array} &
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ l_{00} \end{array}
 \end{array} \quad (2-1)$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \nwarrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ l_{++} \end{array} &
 \begin{array}{c} \nwarrow \\ \text{---} \\ \nearrow \\ l_{--} \end{array} &
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ l_{00} \end{array}
 \end{array} \quad (2-2)$$

(3) split link に対して $\nabla = 0$

(4) simple positive clasp に対して $\nabla = 1$ 

(2), (3), (4) を "simple axioms" と呼ぶことにする.

§2 2-components pretzel links の potential functions

2-components pretzel link に対して 2 変数 potential function が "simple axioms" で決定できることは §3 にゆだね. 実際の計算結果のみを示す.

3 以上の components の多変数 Alexander polynomial は即ち計算されているので ([4]), この計算結果により pretzel link の多変数 Alexander polynomial はすべて決定できたことになる.

$X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Omega_k = \{X_k \subset X \mid X_k \text{ の elements の数が } k\}$ とおく. 又 Y を X の subset とし $\Omega_k(Y) = \{X_k \in \Omega_k \mid X_k \subset X - Y\}$ とおく.

Theorem 2-components pretzel link の potential function $\nabla L(p_1, \dots, p_n)$ は 以下 の よう に な る.

(Case 1) n : even p_i : odd ($i=1, \dots, n$)

$$\nabla_L(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=0}^n \left[\sum_{X_k \in \Omega_k} \prod_{h \in X - X_k} A\left(\frac{p_h+1}{2}\right) \cdot (-1)^k \prod_{j \in X_k} A\left(\frac{p_j-1}{2}\right) \right] B\left(\frac{n-2k}{2}\right),$$

$$\sim \sim \tau \quad \prod_{\phi} A(n') = 1$$

$$A(n') = \frac{(x_1 x_2^{-1})^{n'} - (x_1^{-1} x_2)^{n'}}{x_1 x_2^{-1} - x_1^{-1} x_2}$$

$$B(n') = \frac{(x_1 x_2)^{n'} - (x_1^{-1} x_2^{-1})^{n'}}{x_1 x_2 - x_1^{-1} x_2^{-1}}$$

(Case 2) p_1, p_ℓ : even p_i ($i=1, \ell, i=2, 3, \dots, n$); odd

$$\nabla_L(p_1, \dots, p_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \left[\sum_{X_k \in \Omega_k(1, \ell)} \prod_{h \in X - X_k, h \neq 1, \ell} C\left(\frac{p_h+1}{2}\right) \right. \\ \left. \times (-1)^k \prod_{j \in X_k} C\left(\frac{p_j-1}{2}\right) \right] \nabla_L(p_1, p_\ell, [n-2k-2])$$

$$\sim \sim \tau \quad \prod_{\phi} C(n') = 1$$

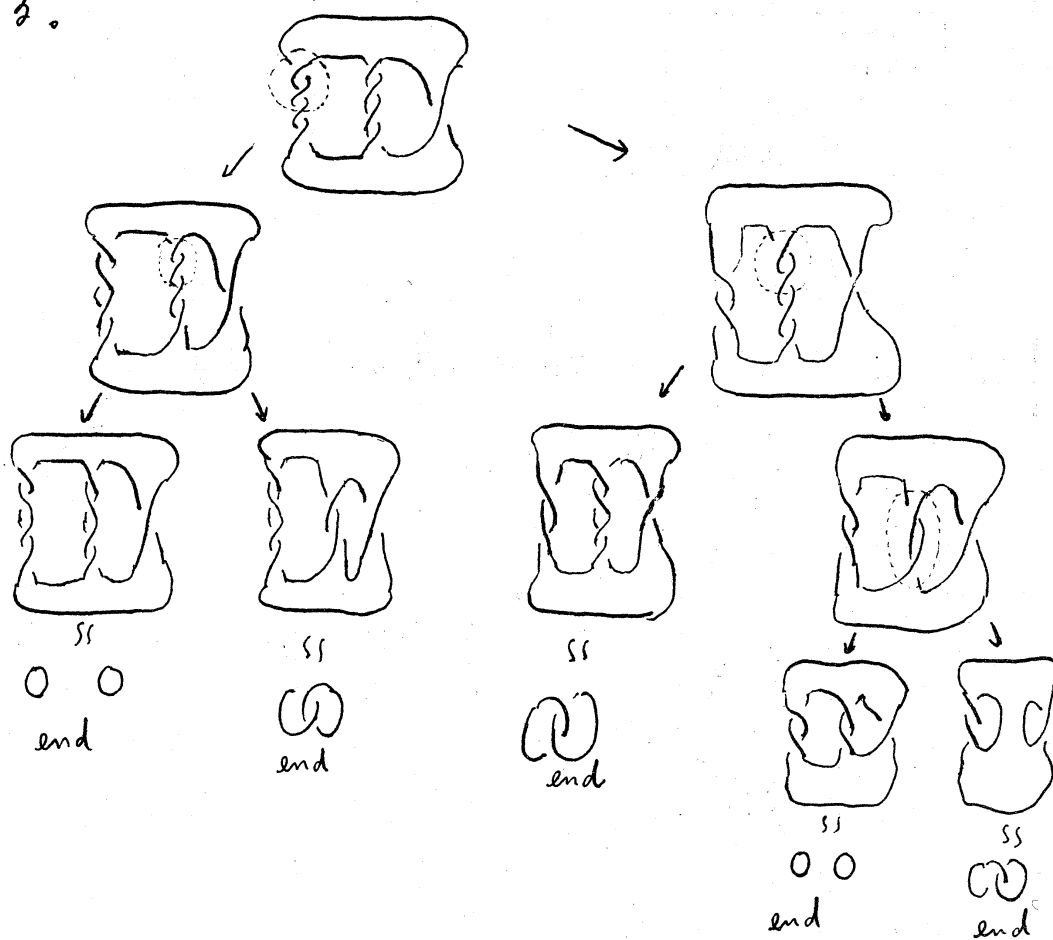
$$C\left(\frac{p_i \pm 1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{x_1^{p_i \pm 1} - x_1^{-(p_i \pm 1)}}{x_1^2 - x_1^{-2}} & (1 < i < \ell) \\ \frac{x_2^{p_i \pm 1} - x_2^{-(p_i \pm 1)}}{x_2^2 - x_2^{-2}} & (\ell < i \leq n) \end{cases}$$

$$\nabla_L(p_1, p_\ell, [n']) = \begin{cases} A\left(\frac{p_1}{2}\right) A\left(\frac{p_\ell}{2}\right) \left\{ \frac{n'+2}{2} (x_1 x_2^{-1} + x_1^{-1} x_2) \right. \\ \left. - \frac{n'}{2} (x_1 x_2 + x_1^{-1} x_2^{-1}) \right\} - A\left(\frac{p_1-2}{2}\right) A\left(\frac{p_\ell}{2}\right) \\ - A\left(\frac{p_1}{2}\right) A\left(\frac{p_\ell-2}{2}\right) & (n': \text{even}) \\ A\left(\frac{p_1}{2}\right) B\left(\frac{p_\ell}{2}\right) \left\{ \frac{n'+1}{2} (x_1 x_2 + x_1^{-1} x_2^{-1}) \right. \\ \left. - \frac{n'+1}{2} (x_1 x_2^{-1} + x_1^{-1} x_2) \right\} - A\left(\frac{p_1-2}{2}\right) B\left(\frac{p_\ell}{2}\right) \\ - A\left(\frac{p_1}{2}\right) B\left(\frac{p_\ell-2}{2}\right) & (n': \text{odd}) \end{cases}$$

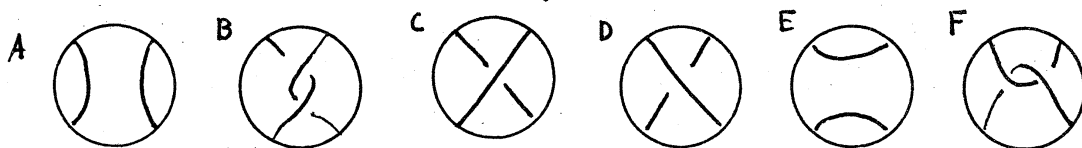
§3 Montesinos link の potential function について

link (tangle) に対して potential function の replacement (axiom (2)) をほどこして得られる tree を tree of replacement と呼ぶ。

又、tree の degree 1 の頂点の link を その tree の end という。下図は pretzel link $L(4, 4, 1)$ の tree of replacement である。

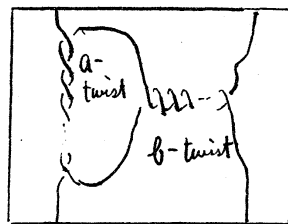


Proposition rational tangle T の tree of replacement τ end が A, B, C, D, E, F のいずれかの tangle になるものが存在する。



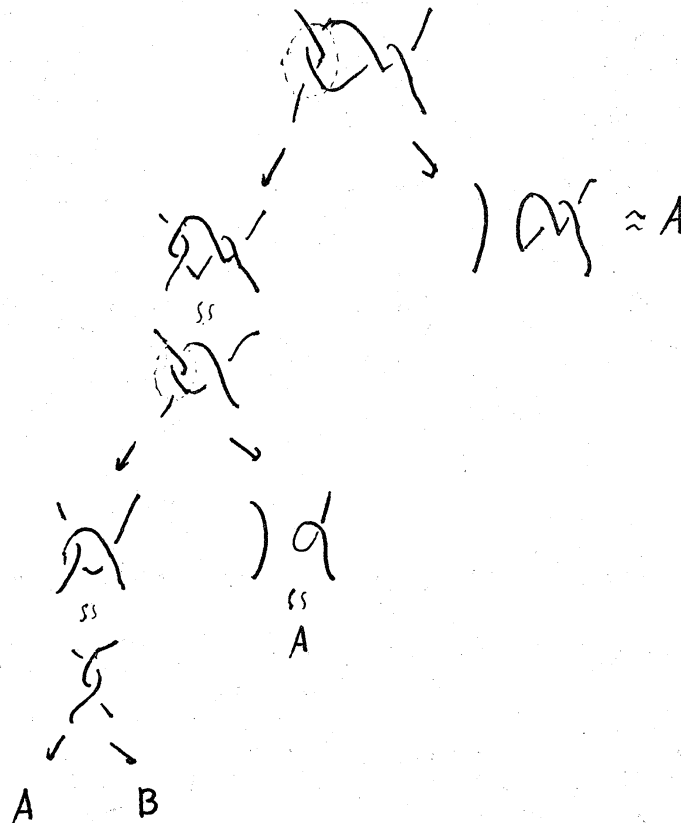
Proposition は以下の lemma をくり返し使うことにより証明される。

lemma $T_{a,b}$ を下図のような tangle とする。 $T_{a,b}$ の tree of replacement で end が proposition の A から F のいずれかになるものが存在する。



$T_{a,b}$

証明のかわりに $T_{2,2}$ の tree of replacement を示す。



Corollary 2-bridge link は end が simple clasp 又は split link であるような tree of replacement を持つ。

Theorem 2-components Montesinos link は end が simple clasp 又は split link であるような tree of replacement を持つ。

証明).

各 rational tangle に対し proposition を用いることにより, A から F になる. A から D の tangle はすべて 1ヶ所に集めることにより simple clasp, split link 又は 2-bridge link を得る.

Corollary により 2-bridge link は求める tree of replacement を持つ. □

Theorem により 2-components Montesinos link の potential function は $t_1 t_2 + t_1^{-1} t_2^{-1}$, $t_1 t_2^{-1} + t_1^{-1} t_2$, $t_1^2 + t_1^{-2}$, $t_2^2 + t_2^{-2}$ の多項式になることが容易にわかる。

Reference

- [1] Gr. Burde & H. Zieschang; Knots. de Gruyter Studies in Mathematics 5, Walter de Gruyter, Berlin New York 1985
- [2] J. H. Conway; An enumeration of knots and links. Computational problems in abstract algebra, Proc. Conf. Oxford 1967 (ed. J. Leech) 329-358. Pergamon Press, New York.
- [3] R. Hartley; The Conway potential function for links Comment. Math. Helv. 58 (1983) 365-378

- [4] Y. Nakagawa ; On the Alexander polynomials of pretzel links
 $L(p_1, p_2, \dots, p_m)$. Kobe J. Math., 3 (1986) 167-177
- [5] Y. Nakanishi; Fox's congruence classes and Conway's potential
 functions of knots and links. to appear.
- [6] D. Rolfsen ; Knots and links. Publish or Perish, Inc.
 Berkeley 1976
- [7] G. Torres : On the Alexander polynomials. Ann. of Math.
 57 (1953), 57-89