

ソリトンの相互作用における 衝突後のソリトンのすそ野の形成について

大阪府立大学 田尻 昌義 (Masayoshi Tajiri)

Osaka Prefecture University

近畿大学・理工学総合研究所 新居 毅人 (Takahito Arai)

Science and Technology Research Institute,

Kindai University

概要

Kadomtsev-Petviashvili I 方程式で支配される 2 つの周期ソリトンの相互作用において、お互いに他のソリトンのすそ野の効果によって生じるソリトン上の不安定モードの発展が、衝突後に現われる新しいソリトンのすそ野形成に重要である。不安定モードの発展は新しいソリトンの世界線の過去への延長線上に、あたかもイメージソリトンが存在するがごとく、新しいソリトンのすそ野の出現へと導く。また、新しいソリトンの中心から離れたすそ野が衝突前に形成される。長距離相互作用において、メッセンジャーソリトンが 2 つの周期ソリトンの間を伝播している間、同じ周期ソリトンが何故共存できるかを示す。

1 はじめに

力の (相互作用) の 3 要素として、相互作用 (力) の階層性、相互作用の閉じ込め (遮蔽機構)、力の多様性がある [1]。ソリトンの相互作用においてはどうか。特に、遮蔽機構のようなものが、非常に特別な条件でも良いが存在するのか。このことに関連して、相互作用においてソリトンのすそ野の効果に興味を持った。ここでは、Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程式に従う周期ソリトンの相互作用を例として調べてみよう。

KP 方程式、

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x \pm 3u_{yy} = 0, \quad (1)$$

は、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式で支配される 1 次元ソリトンの横方向の攪乱に対する安定性を議論するために導かれた [2]。そして、この方程式に支配される平面ソリトン (a line-soliton) は、 $s = -1$ をもつ正の分散の場合 (KP I) は不安定で、 $s = 1$ をもつ負の分散の場合 (KP II) は安定であることが示された。KP 方程式の N ソリトン解は Zakharov と Shabat [3]、Satsuma [4] によって得られ、KP II 方程式で記述される平面ソリトン間の相互作用にソリトン共鳴が存在することが Miles

[5] によって示された。KP I 方程式では平面ソリトン間ではこのようなソリトン共鳴は存在しない。しかしながら、KP I 方程式は平面ソリトンが不安定であることに関連して、平面ソリトン解の他に代数ソリトン (an algebraic-soliton) 解、周期ソリトン (a periodic-soliton) 解をもつ [5-8]。周期ソリトンの安定性は Zhdanov [10]、Tajiri, Murakami, Kimura [11] によって調べられ、長波長の攪乱に対して不安定であることが示された。周期ソリトン間の相互作用での特徴的なことは、KP II 方程式での平面ソリトン間の共鳴とは質的に異なる共鳴現象（周期ソリトン共鳴）が存在することであり、この周期ソリトン共鳴は解の発散とは無関係であることである [11-19]。この周期ソリトンの相互作用の多様性は、横方向の攪乱に対して不安定であるという事実に基づいている。

一方、周期ソリトンのすそ野 (a tail field) は指数関数的に減衰しており、無限小ではあっても無限に伸びている。我々は、周期ソリトン間の相互作用において、このすそ野の働きに興味がある。そこで、この論文の目的は、2 周期ソリトン解を使って 2 つの周期ソリトンの相互作用でのすそ野の効果について考察を行い、

- 1) 衝突後のソリトンのすそ野が、衝突前にもかかわらず、イメージソリトンが存在するがごとく形成されること、
- 2) ある種の遮蔽機構が存在すること、
- 3) 長距離相互作用において、メッセンジャーソリトンが 2 つの周期ソリトンの間に存在する時、同じソリトンが共存できる理由、

を報告することである。

2 周期ソリトンのすそ野

KP I 方程式で支配される波数 $(\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)$ をもつ周期ソリトン解は、次式で与えられることはよく知られている。

$$u = 2 \frac{\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{D} \right) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{D}} \cosh \xi \cos \eta + \frac{2\alpha\beta}{\sqrt{D}} \sinh \xi \sin \eta}{\left(\cosh \xi + \frac{1}{\sqrt{D}} \cos \eta \right)^2}, \quad (2)$$

ここで、

$$\xi = \alpha x + \gamma y - \Omega t + \sigma, \quad \eta = \beta x + \delta y - \omega t + \theta,$$

また、

$$\Omega = \Omega(\alpha, \gamma, \beta, \delta) = \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 - \frac{3}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\gamma^2 - \alpha\delta^2 + 2\beta\gamma\delta), \quad (3)$$

$$\omega = \omega(\alpha, \gamma, \beta, \delta) = 3\alpha^2\beta - \beta^3 - \frac{3}{\alpha^2 + \beta^2}(2\alpha\gamma\delta - \beta\gamma^2 + \beta\delta^2), \quad (4)$$

$$D = D(\alpha, \gamma, \beta, \delta) = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 + \beta^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2)^2}. \quad (5)$$

である。今、この周期ソリトン解 (2) に対して、 $e^\xi \ll 1$ とすることにより周期ソリトンの中心より十分に後方の領域、 $e^\xi \gg 1$ とすることにより周期ソリトンの中心より十分に前方の領域を記述することができる、それぞれの領域での周期ソリトンのすそ野部分は、

i) 周期ソリトンの中心より十分に後方部分のすそ野

$$\begin{aligned} u &= \frac{4}{\sqrt{D}} \{(\alpha^2 - \beta^2) \cos \eta - 2\alpha\beta \sin \eta\} e^\xi \\ &\quad + \frac{8}{D} \{ \alpha^2(D-1) - (\alpha^2 - \beta^2) \cos 2\eta + 2\alpha\beta \sin 2\eta \} e^{2\xi} + O(e^{3\xi}), \\ &\equiv \left[\frac{4}{\sqrt{D}}(\xi, \eta) \right]_t + O(e^{3\xi}). \end{aligned} \quad (6)$$

ii) 周期ソリトンの中心より十分に前方部分のすそ野

$$\begin{aligned} u &= \frac{4}{\sqrt{D}} \{(\alpha^2 - \beta^2) \cos \eta + 2\alpha\beta \sin \eta\} e^{-\xi} \\ &\quad + \frac{8}{D} \{ \alpha^2(D-1) - (\alpha^2 - \beta^2) \cos 2\eta - 2\alpha\beta \sin 2\eta \} e^{-2\xi} + O(e^{-3\xi}), \\ &\equiv \left[\frac{4}{\sqrt{D}}(-\xi, \eta) \right]_t + O(e^{-3\xi}). \end{aligned} \quad (7)$$

と書き表されることがわかる。

3 2つの周期ソリトン間の相互作用

2つの周期ソリトン間の相互作用は2周期ソリトン解を用いて議論することができ、KP I 方程式の2周期ソリトン解は Satsuma の解より以下のように導ける。

$$u = 2 (\ln f)_{xx}, \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{2\xi_1} + e^{2\xi_2} + N_1^2 N_2^2 e^{2(\xi_1 + \xi_2)} + \frac{2}{\sqrt{D_1}} e^{\xi_1} \left\{ \cos \eta_1 + N_1 N_2 e^{2\xi_2} \cos(\eta_1 + \phi_1 + \phi_2) \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{D_2}} e^{\xi_2} \left\{ \cos \eta_2 + N_1 N_2 e^{2\xi_1} \cos(\eta_2 + \phi_1 - \phi_2) \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2}} e^{\xi_1 + \xi_2} \left\{ N_1 \cos(\eta_1 + \eta_2 + \phi_1) + N_2 \cos(\eta_1 - \eta_2 + \phi_2) \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

また、

$$\begin{aligned} \xi_j &= \alpha_j x + \gamma_j y - \Omega_j t + \sigma_j, & \eta_j &= \beta_j x + \delta_j y - \omega_j t + \theta_j, \\ \Omega_j &= \Omega(\alpha_j, \gamma_j, \beta_j, \delta_j), & \omega_j &= \omega(\alpha_j, \gamma_j, \beta_j, \delta_j), \\ D_j &= D(\alpha_j, \gamma_j, \beta_j, \delta_j) \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

$$N_1 e^{i\phi_1} = \frac{\{(\alpha_1 + i\beta_1) - (\alpha_2 + i\beta_2)\}^2 + \left\{ \frac{\gamma_1 + i\delta_1}{\alpha_1 + i\beta_1} - \frac{\gamma_2 + i\delta_2}{\alpha_2 + i\beta_2} \right\}^2}{\{(\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2)\}^2 + \left\{ \frac{\gamma_1 + i\delta_1}{\alpha_1 + i\beta_1} - \frac{\gamma_2 + i\delta_2}{\alpha_2 + i\beta_2} \right\}^2}, \quad (10)$$

$$N_2 e^{i\phi_2} = \frac{\{(\alpha_1 + i\beta_1) - (\alpha_2 - i\beta_2)\}^2 + \left\{ \frac{\gamma_1 + i\delta_1}{\alpha_1 + i\beta_1} - \frac{\gamma_2 - i\delta_2}{\alpha_2 - i\beta_2} \right\}^2}{\{(\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 - i\beta_2)\}^2 + \left\{ \frac{\gamma_1 + i\delta_1}{\alpha_1 + i\beta_1} - \frac{\gamma_2 - i\delta_2}{\alpha_2 - i\beta_2} \right\}^2}, \quad (11)$$

である。式 (9) より、2つの周期ソリトンの衝突前後での位相のずれは $\log |N_1 N_2|$ であることがわかる。それ故に、波数の組み合わせにより相互作用は attractive な場合と repulsive な場合に分類される。例えば $\alpha_1 > 0$ かつ $\alpha_2 > 0$ では、 $N_1 N_2 > 1$ の場合は attractive に、 $N_1 N_2 < 1$ の場合が repulsive になる。さらにその極限として、1つは2つのソリトンが衝突の後に新しい1つのソリトンとなり伝播を続ける共鳴相互作用 (a resonant interaction) ($\alpha_1 > 0$ かつ $\alpha_2 > 0$ の場合、条件は $N_1 N_2 \rightarrow \infty$ より得られる)、もう1つは2つのソリトンが無限に離れた状態でメッセンジャーソリトン (a messenger soliton) を介して相互作用をする長距離相互作用 (a long-range interaction) ($\alpha_1 > 0$ かつ $\alpha_2 > 0$ の場合、条件は $N_1 N_2 \rightarrow 0$ より得られる) の2つの特徴的な相互作用の存在がよく知られている。

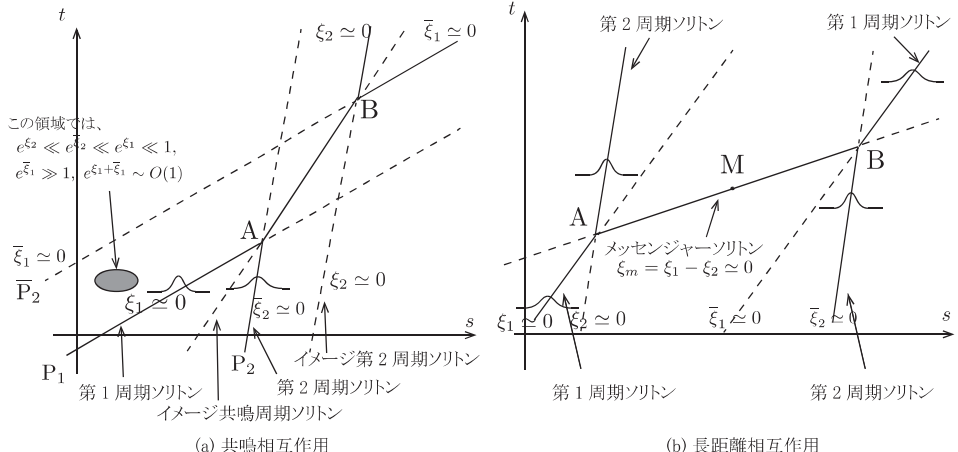


図 1: 2つの周期ソリトン間の相互作用 (a) 共鳴相互作用 (b) 長距離相互作用

4 すそ野によって引き起こされる周期ソリトン上の不安定モードとその時間発展

2つの周期ソリトンが相互作用をする中で、一方の周期ソリトン上他方の周期ソリトンのすそ野による不安定モードの考察をおこなう。以降、我々は2つの周期ソリトンが平行に伝播する場合について考える。

2つの周期ソリトンの相互作用が準共鳴 ($N_1 \gg 1$, $N_2 \sim O(1)$ とする) となる場合において、式 (8)、(9) に対し条件 $e^{\xi_2} \ll e^{\bar{\xi}_2} \ll 1$, $e^{\bar{\xi}_1} \gg 1$, $e^{\xi_1} \sim O(1)$ を課すことは、2つの周期ソリトンが十分離れた状態での衝突前の第1周期ソリトン上を考えることを意味する。この条件のもと f を以下のように書き表す、

$$f = f_1 + \tilde{f}, \quad (12)$$

ここで、

$$f_1 = 1 + \frac{2}{\sqrt{D_1}} e^{\xi_1} \cos \eta_1 + e^{2\xi_1}, \quad (13)$$

$$\tilde{f} = \left[[1] + e^{\sigma_2 - \bar{\sigma}_2} \left\{ [2] + [3] e^{\bar{\xi}_2} \right\} \right] e^{\bar{\xi}_2} + e^{2(\xi_1 + \bar{\xi}_2)} + e^{2\xi_2}, \quad (14)$$

また、

$$\begin{aligned} [1] &= \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2}} \frac{1}{N_2} e^{\xi_1} \cos(\eta_1 + \eta_2 + \phi_1) + \frac{2}{\sqrt{D_2}} e^{2\xi_1} \cos(\eta_2 + \phi_1 - \phi_2), \\ [2] &= \frac{2}{\sqrt{D_2}} \cos \eta_2 + \frac{2N_2}{\sqrt{D_1 D_2}} e^{\xi_1} \cos(\eta_1 - \eta_2 + \phi_2), \\ [3] &= \frac{2}{\sqrt{D_1}} e^{\xi_1} \cos(\eta_1 + \phi_1 + \phi_2). \end{aligned}$$

ここで、 $e^{\sigma_2 - \bar{\sigma}_2} = e^{\sigma_1 - \bar{\sigma}_1} = 1/(N_1 N_2)$ 、また $\bar{\xi}_1 = \xi_1 + \ln(N_1 N_2)$ 、 $\bar{\xi}_2 = \xi_2 + \ln(N_1 N_2)$ である。今、式 (12) を式 (8) に代入して、 $\tilde{f}^2$ のオーダー以下の項を無視した式に、式 (13) および (14) を代入すると、

$$\begin{aligned} u &= 2 \frac{f_{1xx} f_1 - f_{1x}^2}{f_1^2} \\ &+ \left\{ \left[f_1, \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2}} \frac{1}{N_2} (\xi_1, \eta_1 + \eta_2 + \phi_1) \right]_d + \left[f_1, \frac{2}{\sqrt{D_2}} (2\xi_1, \eta_2 + \phi_1 - \phi_2) \right]_d^* \right. \\ &\quad \left. + \left[f_1, \frac{2}{\sqrt{D_2}} (\sigma_2 - \bar{\sigma}_2, \eta_2) \right]_d + \left[f_1, \frac{2N_2}{\sqrt{D_1 D_2}} (\xi_1 + \sigma_2 - \bar{\sigma}_2, \eta_1 - \eta_2 + \phi_2) \right]_d \right\} e^{\bar{\xi}_2} \\ &+ \left[f_1, \frac{2}{\sqrt{D_1}} (\xi_1 + \sigma_2 - \bar{\sigma}_2, \eta_1 + \phi_1 + \phi_2) \right]_d^{(*)} e^{2\bar{\xi}_2} + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} &\left[f_1, \frac{2}{\sqrt{D}} (a\xi_1 + \sigma, b\eta_1 + c\eta_2 + \phi) \right]_d e^{d\bar{\xi}_2} \\ &= \left[\left(-4 \frac{f_{1xx} f_1 - f_{1x}^2}{f_1^3} + 2 \frac{f_{1xx}}{f_1^2} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{D}} \cos(b\eta_1 + c\eta_2 + \phi) \right) \right. \\ &\quad - 4 \frac{f_{1x}}{f_1^2} \frac{2}{\sqrt{D}} \{ (a\alpha_1 + d\alpha_2) \cos(b\eta_1 + c\eta_2 + \phi) - (b\beta_1 + c\beta_2) \sin(b\eta_1 + c\eta_2 + \phi) \} \\ &\quad + \frac{2}{f_1} \frac{2}{\sqrt{D}} \{ \{ (a\alpha_1 + d\alpha_2)^2 - (b\beta_1 + c\beta_2)^2 \} \cos(b\eta_1 + c\eta_2 + \phi) \\ &\quad \left. - 2(a\alpha_1 + d\alpha_2)(b\beta_1 + c\beta_2) \sin(b\eta_1 + c\eta_2 + \phi) \} \right] e^{a\xi_1 + d\bar{\xi}_2 + \sigma}. \end{aligned} \quad (16)$$

である。 $\bar{\xi}_2$ は

$$\bar{\xi}_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\xi_1 - \sigma_1) + \bar{\sigma}_2 + \sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2} \left\{ \frac{\Omega_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \gamma_1^2}} - \frac{\Omega_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2}} \right\} t, \quad (17)$$

とすることができるので、式 (15) は

$$u = 2 \frac{f_{1xx}f_1 - f_{1x}^2}{f_1^2} + \left\{ \dots \right\} e^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\xi_1 - \sigma_1) + \bar{\sigma}_2} \cdot e^{\Delta t} + \left[\dots \right]_d^{(*)} e^{2\left\{ \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(\xi_1 - \sigma_1) + \bar{\sigma}_2 \right\}} \cdot e^{2\Delta t} + \dots, \quad (18)$$

と書き表すことができる。ここで、

$$\Delta = \sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2} \left(\frac{\Omega_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \gamma_1^2}} - \frac{\Omega_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \gamma_2^2}} \right), \quad (19)$$

である。この Δ は第1周期ソリトン上の不安定モードの成長率を表す。なお、ここで $\gamma_2/\alpha_2 = \gamma_1/\alpha_1$ の関係を用いた。

式 (15) の第3項 ($\{\dots\}$ 内の2番目の項) は、第1周期ソリトンが第2周期ソリトンのすそ野部分を追い越すときの、第1周期ソリトン上のすそ野部分の大きさを示している。この成長率は第2周期ソリトンの波数の実数部分と第1と第2の周期ソリトンの速度差によって表され、式 (19) と一致する。このように、実質的に第1周期ソリトン上の成長モードでないものを擬成長モード (a pseudo-growing mode) と名付け、 $[\dots]_d^*$ と上付き * をつけて表す。また、式 (15) の第4項、第5項および第6項には $e^{\sigma_2 - \bar{\sigma}_2}$ が含まれるので、 $N_1 N_2 \gg 1$ のときこれらの項は式 (15) の第2項、第3項に比べて十分小さくなる。さらに、 $N_1 N_2 \rightarrow \infty$ のとき (共鳴条件を完全に満足するとき)、式 (15) の第4項、第5項および第6項に対応する不安定モードはなくなることに注意する。

第2周期ソリトン、共鳴周期ソリトン、そして共鳴周期ソリトンより分離した2つの新しい周期ソリトン上の不安定モードおよびその成長率も同様の議論によって計算することができる。また、共鳴周期ソリトン上では成長モードと減衰モードが共存し、共鳴後の新しい2つの周期ソリトン上では減衰モードに変わることがわかる [20]。

5 共鳴相互作用する場合の周期ソリトンのすそ野に関する考察

周期ソリトンのすそ野部分を調べ、周期ソリトン上にある成長モード (不安定モード) との関連について考える。まずは、第1周期ソリトンの後方領域を考える。今、式 (8)、(9) に対して、 $e^{\xi_2} \ll e^{\bar{\xi}_2} \ll e^{\xi_1} \ll 1$, $e^{\bar{\xi}_1} \gg 1$, $e^{\xi_1 + \bar{\xi}_1} \sim O(1)$ の条件を課す。これは、第1周期ソリトンと第2周期ソリトンが衝突する十分前での、図1の P_1A と $\bar{P}_2B$ の間の領域を考えていることを意味する。この条件のもと f を以下のように書き表す、

$$f = f_1 + \tilde{f}, \quad (20)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 1 + \frac{2}{\sqrt{D_1}} e^{\xi_1} \cos \eta_1 + e^{2\xi_1}, \\
 \tilde{f} &= \frac{2}{\sqrt{D_1 D_2} N_2} e^{\xi_1 + \bar{\xi}_2} \cos(\eta_1 + \eta_2 + \phi_1) + \frac{2}{\sqrt{D_2}} e^{2\xi_1 + \bar{\xi}_2} \cos(\eta_2 + \phi_1 - \phi_2) \\
 &\quad + \frac{2}{\sqrt{D_2}} e^{\xi_2} \cos \eta_2 + \frac{2N_2}{\sqrt{D_1 D_2}} e^{\xi_1 + \xi_2} \cos(\eta_1 - \eta_2 + \phi_2) + \frac{2}{\sqrt{D_1}} e^{\xi_1 + \bar{\xi}_2 + \xi_2} \cos(\eta_1 + \phi_1 + \phi_2) \\
 &\quad + e^{2\xi_2} + e^{2(\xi_1 + \bar{\xi}_2)}.
 \end{aligned} \tag{21}$$

である。式 (20) を式 (8) に代入して $O(\tilde{f}^3)$ を無視することにより、

$$\begin{aligned}
 u &= 2 \frac{f_{1xx} f_1 - f_{1x}^2}{f_1^2} + \left\{ -4 \frac{f_{1xx} f_1 - f_{1x}^2}{f_1^3} + 2 \frac{f_{1xx}}{f_1^2} \right\} \tilde{f} - 4 \frac{f_{1x}}{f_1^2} \tilde{f}_x + 2 \frac{1}{f_1} \tilde{f}_{xx} \\
 &\quad + \left\{ 6 \frac{f_{1xx} f_1 - f_{1x}^2}{f_1^4} - 4 \frac{f_{1xx}}{f_1^3} \right\} \tilde{f}^2 - 2 \frac{1}{f_1^2} (\tilde{f} \tilde{f}_{xx} + \tilde{f}_x^2) + 8 \frac{f_{1x}}{f_1^3} \tilde{f} \tilde{f}_x + O(\tilde{f}^3).
 \end{aligned} \tag{23}$$

が得られる。この式 (23) に式 (21) および式 (22) を代入することにより、

$$\begin{aligned}
 u &= \left[\frac{4}{\sqrt{D_1}} (\xi_1, \eta_1) \right]_t + \left[\frac{4}{\sqrt{D_1 D_2} N_2} (\xi_1 + \bar{\xi}_2, \eta_1 + \eta_2 + \phi_1) \right]_t \\
 &\quad + \left[\frac{4}{\sqrt{D_2}} (2\xi_1 + \bar{\xi}_2, \eta_2 + \phi_1 - \phi_2) \right]_t^* + \left[\frac{4}{\sqrt{D_2}} (\xi_2, \eta_2) \right]_t \\
 &\quad + \left[\frac{4N_2}{\sqrt{D_1 D_2}} (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 - \eta_2 + \phi_2) \right]_t^* + \left[\frac{4}{\sqrt{D_1}} (\bar{\xi}_1 + 2\xi_2, \eta_1 + \phi_1 + \phi_2) \right]_t^* + \cdots,
 \end{aligned} \tag{24}$$

となる。式 (24) の第 1 項は式 (6) で示した第 1 周期ソリトンの後方部分のすそ野を示す。式 (24) の第 2 項は、準共鳴ソリトンの世界線の延長上にあたかも共鳴ソリトンが存在するようなすそ野を示す。つまり、2 つの周期ソリトンが衝突をして共鳴周期ソリトンを形成するよりもずっと以前より、第 1 周期ソリトンの後方に共鳴周期ソリトンのすそ野が形成されていることがわかる。以後、2 つの周期ソリトンが衝突した後に形成される新しいソリトンが、衝突前にその世界線の延長線上に存在するかのごとく形成されるすそ野をイメージソリトン (an image soliton) によるすそ野とよぶ。なお、式 (24) の第 2 項はイメージ共鳴周期ソリトンのすそ野であり、興味深いことは、衝突前の周期ソリトン上の不安定モードから衝突後に形成される新しい周期ソリトンのすそ野が形成されることである。同様に、式 (24) の第 4 項は、イメージ第 2 周期ソリトンのすそ野であり、式 (15) の第 4 項の不安定モードより放出されるものと考えられる。式 (24) の第 3 項は、第 1 周期ソリトンを通り抜けてその後方へ広がる第 2 周期ソリトンのすそ野であり、式 (15) の第 3 項の不安定モードに関連するものと考えられる。なお、この項の D_2 の値は波数が $(\alpha_2 + i\beta_2, \gamma_2 + i\delta_2)$ である周期ソリトンの相互作用の係数であり、波数の実数部分が $(2\alpha_1 + \alpha_2, 2\gamma_1 + \gamma_2)$ での相互作用の係数とは異なる。以後、このようなすそ野を準すそ野 (quasi-tail field) とよび、 $[\cdots]_t^*$ と上付き * をつけて表す。この第 3 項のように相手方ソリトンを通り抜けて広がるすそ野に対して、一般的にすそ野 $\left[\frac{4}{\sqrt{D}} (\xi, \eta) \right]_t$ が $\xi_s \simeq 0$ である周期ソリトンを通過して前方に伸びるときはそのすそ野は $\left[\frac{4}{\sqrt{D}} (\xi - 2\xi_s, \eta) \right]_t^*$ となり、後方に伸びるときは $\left[\frac{4}{\sqrt{D}} (\xi + 2\xi_s, \eta) \right]_t^*$ となることが示される。この第 2 周期ソリトンの準すそ野は

$[\frac{4}{\sqrt{\beta_2}}(2\xi_1 + \bar{\xi}_2, \dots)]_t^*$ であるため、伝播速度は第2周期ソリトンのそれとは異なり、共鳴ソリトンや衝突後に形成される第1周期ソリトンよりも速いものとなる。そのために、この準すそ野はいつでも存在し続けるのではなく、やがて共鳴周期ソリトンまたは衝突後に形成されるソリトンに吸収される。また、2つの周期ソリトンが完全に共鳴条件 ($N_1 N_2 \rightarrow \infty$) を満足している場合、前節で説明したように、式 (15) の第4項に対応する不安定モードは励起されないで、イメージ第2周期ソリトンのすそ野は形成されない。すなわち、共鳴条件を完全に満足する場合は、第1周期ソリトンの後方に ($\alpha_2 + i\beta_2, \gamma_2 + i\delta_2$) の波数をもつすそ野は存在しないことになる。

なお、第1周期ソリトンの後方だけではなく、他の領域においても同様に計算、整理することにより、全てのすそ野の形成および伝播を詳細に議論することができる [20]。ここで、衝突後の新しい2つの周期ソリトン上での減衰モードは、衝突前の周期ソリトンのすそ野を吸収することに関連することに注意しておく。

さらに、2つのソリトン間の相互作用が図 1(b) のような長距離相互作用の場合についても同様の計算ができる。特に注意したいことは、第1周期ソリトンから第2周期ソリトンに向かって放出されるメッセンジャーソリトンが第2周期ソリトンと完全共鳴することである。このことにより、第2周期ソリトンのすそ野の効果によるメッセンジャーソリトン上で成長する波数が (β_2, δ_2) の不安定モードはなく、メッセンジャーソリトンの後方への波数 ($\alpha_2 + i\beta_2, \gamma + i\delta_2$) のすそ野の放出はない。つまり、新しい第2周期ソリトンの前方に波数 ($\alpha_2 + i\beta_2, \gamma_2 + i\delta_2$) の伝播方向に増加する振幅を持ったすそ野はない。これは、メッセンジャーソリトンがある意味のすそ野を遮蔽していることを意味しており、またそれ故に、メッセンジャーソリトンが2つの周期ソリトンの間に存在する時には同じソリトンが共存できるのであると考えられる。

6 まとめ

本研究では、相手周期ソリトンのすそ野による攪乱は、周期ソリトン上に不安定モードを引き起こし、このモードの発展は衝突後に形成される新しいソリトンの世界線の延長上にあたかもソリトンが存在するかのようなイメージソリトンのすそ野の湧き出しへと導く。つまり、衝突後に新しくできるソリトンのすそ野は、衝突する随分以前より用意されていることがわかった。また、完全に共鳴条件を満足する場合には、周期ソリトンの後方へは相手方ソリトンの波数を持つすそ野は存在しない。このある種の遮蔽機構により、メッセンジャーソリトンが2つの周期ソリトンの間に存在する時には同じソリトンが共存できるものであると考えられる。なお、今回の研究では不安定であるソリトンに対してこれらの議論を行ったが、安定である KdV 方程式で支配されるソリトンに関しても同様の議論をすることができる。

参考文献

- [1] 菅野 礼司, 「複雑系科学の哲学概論」, 本の泉社 (2013)

- [2] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili, Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- [3] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Funct. Anal. Appl. **8** (1974) 226.
- [4] J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn. **40** (1976) 286.
- [5] J. W. Miles, J. Fluid Mech. **79** (1977) 157,
J. W. Miles, J. Fluid Mech. **79** (1977) 171.
- [6] S. V. Manakov, V. E. Zakharov, L. A. Bordag, A. R. Its and V. B. Matveev, Phys. Lett. A **63** (1977) 205.
- [7] R. S. Johnson and S. Thompson, Phys. Lett. A **66** (1978) 279.
- [8] A. A. Zaitsev, Sov. Phys. Dokl. **28** (1983) 720.
- [9] M. Tajiri and Y. Murakami, J. Phys. Soc. Jpn. **58** (1989) 3029.
- [10] S. K. Zhdanov, Sov. Phys. Dokl. **30** (1985) 769.
- [11] M. Tajiri, Y. Murakami and K. Kimura, Bull. Univ. Osaka Pref. A **43** (1994) 55.
- [12] M. Tajiri and Y. Murakami, Phys. Lett. A **143** (1990) 217.
- [13] Y. Murakami and M. Tajiri, Wave Motion **14** (1991) 169.
- [14] M. Tajiri, Y. Fujimura and Y. Murakami, J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 783.
- [15] Y. Murakami and M. Tajiri, J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1992) 791.
- [16] D. E. Pelinovsky and Y. A. Stepanyants, JETP **77** (1993) 602.
- [17] D. E. Pelinovskii and Y. A. Stepanyants, JETP Lett. **57** (1993) 24.
- [18] K. A. Gorshkov, D. E. Pelinovskii and Y. A. Stepanyants, JETP **77** (1993) 237.
- [19] M. Tajiri and T. Arai, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 335209.
- [20] M. Tajiri and T. Arai, (submitted to J. Phys. Soc. Jpn.)