

Toeplitz 作用素について

東北大理 勘甚裕一

§1. $\mathbb{C} = \mathbb{C}$ は, Toeplitz 作用素について, その最っとも基本的な場合である, 下の空間が $\mathbb{T}$ のときと $\mathbb{R}$ のときについていくつかの結果を index theory に重点をおいて述べる.

まず, Wiener - Hopf equation と呼ばれる古典的な方程式から話しをはじめよう. $L^1(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}^+)$ をそれぞれ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty), \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ 上で定義された Lebesgue 測度に関する Lebesgue space とする. $k \in L^1(\mathbb{R})$ に対し Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上に作用する operator $\hat{W}_k$ を次で定義する;

$$\hat{W}_k f(x) = \int_0^\infty k(x-t) f(t) dt \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^+))$$

このとき $\hat{W}_k f$ は a.e. x に対し定義され $\|\hat{W}_k f\|_2 \leq \|k\|_1 \|f\|_2$ である. $\lambda \in \mathbb{C}, g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ に対し,

$$(1) \quad \lambda f + \hat{W}_k f = g$$

を Wiener - Hopf equation とする. $\mathbb{C} = \mathbb{C}$ は未知函数.

$H^2(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ は, 上半平面で正則かつ}$

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx < \infty$$

を満す函数 $F(z)$ の境界函数 } とすれば Paley-Wiener の定理から Fourier 変換は $L^2(\mathbb{R}^+)$ から $H^2(\mathbb{R})$ 上への自然な同型を与える. いま $P \in L^2(\mathbb{R})$ から $H^2(\mathbb{R})$ 上への orthogonal projection とすれば (1) は Fourier 変換 $\mathcal{F}$ によつて,

$$(2) \quad \mathcal{F}(\lambda f + \hat{W}_k f) = P[(\lambda + \hat{k})\hat{f}] = \hat{g}$$

なる形に変換される. 但し $\hat{f}, \hat{g}, \hat{k}$ は f, g, k の Fourier 変換である. このようにならば積分作用素は Projection を伴った掛算作用素に変換される. $\lambda + \hat{k}$ は continuous, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} (\lambda + \hat{k}(z)) = \lambda$ であるが, この性質は (2) における必要なり. このことから我々は Wiener-Hopf operator の一般的定義を次の様にする. $\varphi \in L^q(\mathbb{R})$ に対し,

$$W_\varphi f = P(\varphi f) \quad (f \in H^2(\mathbb{R}))$$

と symbol φ をもつ Wiener-Hopf operator とする.

次に Wiener-Hopf operator の discrete な場合を考える. $\ell^1(\mathbb{Z}), \ell^1(\mathbb{Z}^+)$ をそれぞれ $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上の p 乗絶対収束な complex-valued functions 全体とする. $k \in \ell^1(\mathbb{Z})$ に対し $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ 上の operator $\hat{T}_k$ を次で定義する;

$$(3) \quad \hat{T}_k f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k(n-m) f(m) \quad (f \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)).$$

$e_n \in \ell^2(\mathbb{Z}^+)$ を $e_n(m) = 1$ ($m=n$), $e_n(m) = 0$ ($m \neq n$) で定義すれば $\{e_m\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ における orthogonal basis である.

この basis に関する operator T_k の matrix は
$$\begin{bmatrix} k(0) & k(1) & k(2) & \cdots \\ k(-1) & k(0) & k(1) & \cdots \\ k(-2) & k(-1) & k(0) & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

この matrix の特徴は対角線にそつて定数 k であることである.

このような matrix は Toeplitz によつて最初に研究され, Toeplitz matrix と呼ばれる. 対応する $l^2(\mathbb{Z}^+)$ 上の operator を Toeplitz operator とよぶ.

Wiener - Hopf operator の時と同様, Fourier 変換を使うことによつて見やり形になる. $L^2(\mathbb{T})$ と $\mathbb{T} = \{e^{it}; 0 \leq t < 2\pi\}$ 上の Lebesgue measure $dt/2\pi$ に関する Lebesgue space とする. Fourier 変換によつて, $l^2(\mathbb{Z}^+)$ は Hardy space $H^2(\mathbb{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{T}); f \text{ は単位円板 } D \text{ 上で正則かつ } \sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty \text{ を満たす函数 } f(z) \text{ の境界函数}\}$ に同型となる. P を $L^2(\mathbb{T})$ から $H^2(\mathbb{T})$ 上への projection とする. このとき, $\varphi \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(n) e^{int}$ とすれば (3) は,

$$(4) \quad T_\varphi f = P(\varphi f) \quad (f \in H^2(\mathbb{T}))$$

なる形に変換される. このときも, φ は絶対収束する Fourier series をもつ必要はない. よつて次の定義を与える. $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対し,

$$T_\varphi f = P(\varphi f) \quad (f \in H^2(\mathbb{T}))$$

を symbol φ をもつ Toeplitz operator とする.

Rosenbloom [7] によれば $[0, \infty)$ 上の Laguerre 函数の CON

system に関する Wiener-Hopf operator の matrix は Toeplitz matrix になる. また Devinatz [4] は上半平面から単位円板 D 上への等角写像 $k(z) = (z-i)/(z+i)$ は Wiener-Hopf operator と, 対応する Toeplitz operator との間の unitary equivalence を与えることを示した. よって多くの問題に関して 2.2 の理論は同じものとなる.

次の節で symbol φ を連続関数の空間 $C(I)$ にとった場合の $H^2(I)$ 上の Toeplitz operator について考察する. とくに T_φ が invertible や Fredholm operator となる symbol φ の条件, さらに Fredholm operator となるときその index を考える. §3 では $H^2(\mathbb{R})$ 上の Wiener-Hopf operator について, その symbol を almost periodic functions にとった場合, さらに一般に symbol を finite regular Borel measure の Fourier-Stieltjes 変換にとった場合を述べる. §2 は R.G. Douglas [5], §3 は R.G. Douglas - J.L. Taylor [6] に依る. Toeplitz operator に関する最近までの結果のほとんどと, 詳細な文献が [5] に見られる.

§2. まず以下の議論に必要な定義や記号を与える. $\mathcal{H}$ を separable infinite dimension Hilbert space とし, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ 上のすべての bounded linear operators のなす C^* -algebra とし, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$ 上の compact operators 全体のなす algebra とす

る. このとき, $\mathcal{LC}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ における unique closed two sided ideal である. $i \in$ inclusion map, $\pi \in$ natural homomorphism とすると

$$(0) \rightarrow \mathcal{LC}(\mathcal{H}) \xrightarrow{i} \mathcal{L}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{LC}(\mathcal{H}) \rightarrow (0)$$

は exact.

Def. 1. $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ が Fredholm operator とは $\pi(T)$ が invertible であること. $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の Fredholm operators 全体を表すものとする.

Atkinson の定理によれば $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ である必要十分条件は T の range が closed かつ $\dim \ker T, \dim \ker T^* = \dim \operatorname{coker} T < \infty$.

Def. 2. $T \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ のとき T の analytic index $\operatorname{ind}_a(T) \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ind}_a(T) = \dim \ker T - \dim \ker T^*$ と定義する.

ind_a は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ から $\mathbb{Z}$ への continuous homomorphism であり compact perturbation のもとで不変である.

ここからは函数は $\mathbb{C}^n$ -valued とし §1 より一般な形 $\mathbb{Z}$ Toeplitz operator を定義し考察する.

$L^2_{\mathbb{C}^n}(T)$ は T 上 $\mathbb{C}^n$ -valued norm square-integrable measurable functions の作る Hilbert space, $H^2_{\mathbb{C}^n}(T)$ と対応する Hardy space とする. 即ち, $L^2_{\mathbb{C}^n}(T) = L^2(T) \otimes \mathbb{C}^n$, $H^2_{\mathbb{C}^n}(T) = H^2(T) \otimes \mathbb{C}^n$.

$L^{\infty}_{M_n}(T)$ は T 上 $M_n = M_n(\mathbb{C}) = \{n \times n \text{ 複素 matrices}\}$ valued な bounded measurable functions 全体とする. このとき symbol

$\phi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$ に対し Toeplitz operator T_ϕ を $T_\phi f = P(\phi f)$ ($f \in H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})$) で定義する. 但し P は $L_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})$ から $H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})$ への orthogonal projection である. map $\xi(\phi) = T_\phi$ は $L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$ から $\mathcal{L}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T}))$ への contractive ($\|\xi(\phi)\| \leq \|\phi\|$) から $*$ -linear である. しかし multiplicative, i.e. $T_\phi T_\psi = T_{\phi\psi}$, ではない. このことが Toeplitz operator の研究を困難なものになるとともに興味あるものとして見る. ところがこの節の目的にとりて有用な次の lemmas が成り立つ.

Lemma 2.1. $\phi \in H_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$, $\psi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T}) \Rightarrow T_\psi T_\phi = T_{\psi\phi}, T_\phi^* T_\psi = T_{\phi^* \psi}$

Lemma 2.2. $\phi \in C_{M_n}(\mathbb{T})$, $\psi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$

$$\Rightarrow T_\psi T_\phi - T_{\psi\phi}, T_\phi T_\psi - T_{\phi\psi} \in \mathcal{LC}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})).$$

$\mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T}))$ を $\{T_\phi : \phi \in C_{M_n}(\mathbb{T})\}$ で生成された closed subalgebra とする. このとき, $\mathcal{T}(C_{M_n}(\mathbb{T}))$ は C^* -algebra でありその commutator ideal は $\mathcal{LC}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T}))$ に一致する. 上の lemmas より mapping ξ は自然に $*$ -homomorphism $C_{M_n}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{T}/\mathcal{LC}$, $\phi \mapsto [T_\phi]$ を引き起こす. 次の proposition を使って目的の定理を得る.

Proposition 2.3. $\phi \in L_{M_n}^\infty(\mathbb{T})$ とする. このとき,

$$T_\phi \in \mathcal{LC}(H_{\mathbb{C}^n}^2(\mathbb{T})) \iff \phi \equiv 0.$$

Theorem 2.4. $\mathcal{T}(C_n(\mathbb{T}))$ から $C_n(\mathbb{T})$ 上への $*$ -Homomorphism f が 2 次を満すものが存在する.

(i) cross-section ξ $\xi \neq 0$,

$$(ii) (0) \rightarrow \mathcal{LC}(H_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})) \xrightarrow{i} \mathcal{T}(C_n(\mathbb{T})) \xrightarrow{f} C_n(\mathbb{T}) \rightarrow (0)$$

は exact sequence.

定理からすぐわかることは, すべての $T \in \mathcal{T}$ は $T_\phi + K$,

$\phi \in C_n(\mathbb{T})$, $K \in \mathcal{LC}$ の形に書けること.

Corollary 2.5. $\phi \in C_n(\mathbb{T})$ とする. このとき,

$$T_\phi \in \mathcal{T}(H_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{T})) \iff \det \phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}.$$

次に T_ϕ の analytic index が ϕ とどのような関係するかを見よう. Fredholm operator T に対し $(\mathbb{T}$ から $GL(n, \mathbb{C})$ への continuous map $f(T)$ が対応する. そして T の analytic index は $f(T)$ の homotopy class によるのみ関係する. とこ $[\mathbb{T}, GL(n, \mathbb{C})] \cong \mathbb{Z}$ であり, この isomorphism は $\phi \mapsto \text{ind}_\pm(\phi)$ によってあたえられる. ただし $\text{ind}_\pm(\phi)$ は $\det \phi$ の原点に関する winding number である. また analytic index は $[\mathbb{T}, GL(n, \mathbb{C})]$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism $\phi \mapsto \text{ind}_a(T_\phi)$ を定義する. いま $\psi(e^{it}) = (a_{k\ell}(t))$, $a_{11}(t) = e^{it}$, $a_{k\ell}(t) = \delta_{k\ell}$ ($k \geq 2, \ell \geq 1$) に対し $\text{ind}_a(T_\psi) = -1$, $\text{ind}_\pm(\psi) = 1$ となる. 以上から,

Theorem 2.6. $\phi \in C_n(\mathbb{T})$, $\det \phi \neq 0$ on $\mathbb{T}$ とする.

このとき, $T_\phi \in \mathcal{K}(H^2_{\mathbb{C}^n}(\mathbb{T}))$, $\text{ind}_a(T_\phi) = -\text{ind}_t(\phi)$.

$n=1$ のとき, $\ker T_\phi = (0)$ または $\ker T_\phi^* = (0)$ であることが知られてゐる. よつて, $n=1$ の場合に invertibility に関する条件を得ることが出来る.

Corollary 2.7. $\phi \in C(\mathbb{T})$ とする. このとき,

$$T_\phi : \text{invertible in } \mathcal{K}(H^2(\mathbb{T})) \iff \phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}, \text{ind}_t(\phi) = 0.$$

$n \geq 2$ のとき, 即ち matrix の場合にはこの命題はなりたたない. しかし, $\{\phi \in C_n(\mathbb{T}) : T_\phi \text{ invertible}\}$ は $\{\phi \in C_n(\mathbb{T}) : \det \phi \neq 0 \text{ on } \mathbb{T}, \text{ind}_t(\phi) = 0\}$ であることが知られてゐる.

§3. この節では $H^2(\mathbb{R})$ 上の symbol を almost periodic functions にも Wiener-Hopf operator と, $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上に作用する, symbol を measure の Fourier-Stieltjes 変換にも Wiener-Hopf operator にも適用する.

$AP(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の almost periodic functions からなる algebra とし, $\mathcal{K}(AP)$ は $\{W_\phi : \phi \in AP(\mathbb{R})\}$ によって生成された C^* -algebra, $\mathcal{C}(AP)$ はその commutator ideal とする. このとき $AP(\mathbb{R})$ に symbol を Wiener-Hopf operator に関し Theorem 2.4 と

同様な次の結果がある。

Theorem 3.1. $\mathcal{T}(AP)$ から $AP(\mathbb{R})$ 上への $*$ -homomorphism γ $\mathbb{Z}^n$ 次を満すものがある；

(i) cross-section Σ $\Sigma \subset \mathbb{T}$,

$$0 \rightarrow (0) \rightarrow \mathcal{C}(AP) \xrightarrow{i} \mathcal{T}(AP) \xrightarrow{\gamma} AP(\mathbb{R}) \rightarrow (0)$$

は exact sequence .

この定理と Bohr [1] による次の結果を使うと W_ϕ の invertibility に関する条件を得ることが出来る。

Proposition 3.2. $\phi \in AP(\mathbb{R})$ により invertible function とする。このとき, $\exists \alpha \in \mathbb{R} \exists \psi \in AP(\mathbb{R}) : \phi(t) = e^{i\alpha t} \exp \psi(t)$

$$\text{すなわち, } \text{ind}_t(\phi) \equiv \alpha = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \{ \arg \phi(T) - \arg \phi(-T) \} .$$

Theorem 3.3. $\phi \in AP(\mathbb{R})$ とする。このとき,

$$W_\phi : \text{invertible in } \mathcal{T}(AP) \iff \phi : \text{invertible in } AP, \text{ind}_t(\phi) = 0 .$$

と $\mathbb{Z}^n \mathcal{C}(AP) \cap \mathcal{L}C(H^2(\mathbb{R})) = (0)$ $\mathbb{Z}^n$ であるの $\mathbb{Z}^n$ 上の exact sequence より Fredholm 性に関する条件を導くことは出来ない。更に topological index $\text{ind}_t(\phi)$ は real number となるの $\mathbb{Z}^n$ analytic index との間には明らかな関係は無い。このことは Fredholm operator の概念を適当なものにしなければならぬ。

ことを意味する. Breuer [2], [3] は Fredholm operator のうまな概念を von Neumann algebra の線に従って導入し, index theory を展開してゐる.

上の議論は Wiener-Hopf operator $\hat{W}_k f(x) = \lambda f(x) + \int_0^\infty k(x-t)f(t)dt$ において $k(t)dt$ を discrete measure に取った場合に相当する.

我々は以下 $k(t)dt$ とし一般の finite regular Borel measure を取った場合を述べる. $M(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の finite regular Borel measures 全体を記す. $M(\mathbb{R})$ は convolution を積とし単位元をもつ可換な Banach algebra となる. ここでは $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の kernel を $M(\mathbb{R})$ にとり Wiener-Hopf operator を調べる. 即ち $\mu \in M(\mathbb{R})$ に対し $L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の Wiener-Hopf operator を次で定義する.

$$\hat{W}_\mu f(x) = \int_0^\infty f(t) d\mu(x-t) \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^+))$$

我々は $\hat{W}_\mu$ に対し Fredholm 性や invertibility に関する条件を得, index theory を述べる. しかし algebra $M(\mathbb{R})$ の複雑な構造のため $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上では十分な結果は得られな. 即ち $\hat{W}_\mu$ が invertible operator であつても μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible とはな5なる measure μ が存在する. もし μ が $M(\mathbb{R})$ で invertible であることを仮定すれば一応満足のもの index theory が成立する. $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上の operator としての $\hat{W}_\mu$ に関しはすべてあうまなく. まずこのことから述べる. それには次の Banach algebra

$M(\mathbb{R})$ の maximal ideal space の first Čech cohomology group に関する J. L. Taylor [8] の結果が本質的である。

Proposition 3.4. $\mu \in M(\mathbb{R})$ に対し $n \in \mathbb{Z}$ invertible とする。
 このとき, $\exists m \in \mathbb{Z} \exists c \in \mathbb{R} \exists \nu \in M(\mathbb{R}) : \mu = f^n * \delta_c * \nu$.
 但し $df(x) = -d\delta_0(x) + 2\chi_{[0,\infty)}e^{-x}dx$ z の Fourier 変換は
 $\hat{f}(t) = (1+it)/(1-it)$. $\therefore \mathbb{Z}$ $\text{ind}_t(\mu) = (m, c)$ とおく。

$L^p(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq p < \infty$ 上の operator $\hat{W}_\mu$ が Fredholm ならば range $\hat{W}_\mu$ が closed
 $\mathbb{Z}$ $\dim \ker \hat{W}_\mu, \dim \text{coker} \hat{W}_\mu < \infty$ なること。さらに analytic index
 $\text{ind}_a(\hat{W}_\mu)$ とは $\dim \ker \hat{W}_\mu - \dim \text{coker} \hat{W}_\mu$ のこととする。この
 とき, また $L^1(\mathbb{R}^+)$ 上の Wiener-Hopf operator $\hat{W}_\mu$ に関して次の定理が
 成り立つ。

Theorem 3.5. $\mu \in M(\mathbb{R})$ とする。このとき $\hat{W}_\mu$ が Fredholm である
 必要十分条件は μ が $M(\mathbb{R})$ $\mathbb{Z}$ invertible かつある integer n に対し
 $\mathbb{Z} \text{ind}_t(\mu) = (n, 0)$ となること。このとき, $\text{ind}_a(\hat{W}_\mu) = -n$ 。

一般に $1 \leq p < \infty$ の時, μ が $M(\mathbb{R})$ $\mathbb{Z}$ invertible を仮定すれば
 次のような結果となる。

Theorem 3.6. $p \in 1 \leq p < \infty$ とする。 $\mu \in M(\mathbb{R})$, invertible とす
 る。このとき $\hat{W}_\mu$ が $L^p(\mathbb{R}^+)$ 上の Fredholm operator である必要条
 件はある integer n に対し $\mathbb{Z} \text{ind}_t(\mu) = (n, 0)$ となること

である。このとき, $\text{ind}_a(\hat{W}_\mu) = -n$.

最後に $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上の operator $\hat{W}_\mu$ は invertible であるが $M(\mathbb{R})$ 上は invertible であり measure μ の存在を示し本稿を終る。 $M(\mathbb{R})$ における 2 次のような measure μ が存在する。

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{D}(t)| < \|D\|_{sp}.$$

更に $\text{supp}(D)$ は compact と出来る。そこで $\lambda \in D$ の spectrum から $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{D}(t)| < \lambda$ と出来るように選ぶ。このとき, $\mu = \lambda \delta_0 - D$ とおけば μ は non-invertible かつ $\hat{W}_\mu$ は $L^2(\mathbb{R}^+)$ 上 invertible となる。何故なら Laplace 変換により $\hat{\mu}, \frac{1}{\hat{\mu}}$ は上半平面に正則有界に拡張出来るからである。

参考文献

- [1] H. Bohr, Über fastperiodische ebene Bewegungen, Comment. Math. Helv. 4 (1934) 51-64.
- [2] M. Breuer, Fredholm-theories in von Neumann algebras I, Math. Ann. 178 (1968) 243-254.
- [3] ———, ——— II, Math. Ann. 180 (1969) 313-325.
- [4] A. Devinatz, On Wiener-Hopf operators, Functional Analysis (Proc. Conf. Irvine, Calif., 1966) 81-118.
- [5] R.G. Douglas, Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators,

- CBMS Regional Conference, University of Georgia, Athens, Ga., 1972.
- [6] R.G. Douglas and J.L. Taylor, Wiener-Hopf operators with measure kernel, *Boc Conf. on Operator Theory*. Hungary, 1970.
- [7] M. Rosenbloom, A concrete spectral theory for self-adjoint Toeplitz operators, *Amer. J. Math.* 87 (1965) 709-718.
- [8] J. L. Taylor, The cohomology of the spectrum of a measure algebra, *Acta Math.* 126 (1971) 195-225.