

L^∞ の恒等作用素近似

新潟大 理 泉池 敬司 (Keiji Iezuchi)

1953年 Korovkin [7] は次の有名な結果を証明した。

Korovkin の定理. $C([0,1])$ 上の有界線形作用素列 $\{T_n\}_n$ に対し,

$$1) \quad T_n \geq 0,$$

$$2) \quad T_n x^j \rightarrow x^j \quad \text{for } j = 0, 1, 2,$$

が成立するならば, $T_n f \rightarrow f \quad \forall f \in C([0,1])$ である。

Wulbert [11] は条件 1) を

$$1') \quad \|T_n\| \leq 1$$

に換えても成立することを示した。それ以来, 今日まで

Korovkin 型の定理は広く研究され, 1994年にその途中結果が Altomare - Campiti [1] の本にまとめられている。(国内における最近の結果を参考文献に入れた。)

ここでは X を compact Hausdorff space とする。 $S \subset C(X)$ に対し (sequential type) Korovkin の定理が成立するとは

$$\square \quad \|T_n\| \leq 1, \quad T_n f \rightarrow f \quad \forall f \in S \quad \text{ならば}$$

$$T_n g \rightarrow g \quad \forall g \in C(X) \quad \square$$

となる時にいうことにする。上の定義において、作用素列を net に置換えて定義されたものは、高橋氏 [10] 等により研究されており、net type Korovkin の定理が成立するための必要十分条件として

(*) 「 $\forall x \in X$ に對して、 $\int_X f d\mu = f(x) \quad \forall f \in S$ となるのは $\mu = \delta_x$ 」
が知られている。また

net type が成立 $\Rightarrow$ sequential type が成立
である。特に S が separable の時は逆が成立することが示されているが [5]、一般には逆は成立せず、ここでは (sequential type) Korovkin の定理がどのような S に對して成立するのかを議論したい。特に S が $C(X)$ の C^* -subalgebra の時を考えてみる。この時は S は (*) をみたさないから、net type の Korovkin の定理が成立しない。

[1] S が closed ideal の時。

この時

$$S = \{f \in C(X); f = 0 \text{ on } \Gamma\}$$

と表わせる。ここで $\Gamma \subsetneq X$ closed で $\Gamma \neq \emptyset$ とする。

Scheffold [9] は $L^\infty([0,1]) \cong C(X)$, $\Gamma = \{x_0\}$ の時、 S に對して

Korovkin の定理が成立することを示した。これを一般にす

ると次の定理になる。

定理 1[6]。closed ideal S に対して Korovkin の定理が成立する必要十分条件は Γ が quasi- G_S 集合を含まないことである。

ここで $E \subset X$ が quasi- G_S 集合であるとは、

$$\exists \sqcup_m \text{ open } \downarrow \text{ s.t. } E = \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{U_m}$$

と表わせる時にいう。この定理で満足できない点は、 Γ が quasi- G_S 集合を含まない時は Γ は非常に小さい集合であり、 S が非常に大きい、つまり $C(X)$ に近くなり、この S に対して Korovkin の定理が成立することが分かって、驚きを感じない所にある。

[2] S が C^* -subalgebra の時。

$\mathbb{T} = \{z \mid |z|=1\}$ とする。単位円板上の有界解析関数とその境界関数を同一視してその集合を H^∞ とする。 C を $\mathbb{T}$ 上の連続関数の空間とすると、Sarason により、 $H^\infty + C$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ の (essential) sup-norm closed subalgebra となる。

$$QC \equiv (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}$$

と定義する。 QC は $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の C^* -subalgebra になる。

$$C \subseteq QC = [(H^\infty + C) \cap H^\infty] + C \subseteq H^\infty + C$$

となり、関数論的立場から QC を考察するとなり空間 C に

近いことが想定される。又実解析立場で QC を表わすと、

$$QC = L^\infty(\mathbb{T}) \cap VMO$$

となり、これから QC はある意味で C に近いことが分かる。

$L^\infty \cong C(X)$ と考えた時、 C に対して Korovkin の定理が成立しないことを注意しておく。

定理 2 [4]. QC に対して Korovkin の定理が成立する。

注1) Korovkin の定理が成立する本格的に小さな C^* -sub algebra の例として始めこのものである。

注2) $\forall x \in X$ に対して $\exists y \in X$ st. $x \neq y, f(x) = f(y) \quad \forall f \in QC$.

注3) 証明においては、今までに得られていた $H^\infty(\mathbb{T})$ の結果が使われている [2, 3].

注4) 一般の $L^\infty \cong C(X)$ に対して、いかに QC 空間を定義し、これが Korovkin の定理が成立するようにできるか？特に $L^\infty \cong C(\beta N)$ の時は？

[3] 一様近似。

$L^\infty \cong C(X)$ 上の作用素列 $\{T_n\}_n$ が $\|T_n\| \leq 1, T_n \rightarrow I$ strongly の時、 $T_n \rightarrow I$ uniformly となることが証明できた。しかしこの結果は Lotz [8] により既に証明されていた。

Lotz の定理. $C(X)$ が Grothendieck space とし、 $\|T_n\| \leq 1$ とする。 $T_n \rightarrow I$ ならば $T_n \xrightarrow{u} I$ である。

この Banach 空間 Y が Grothendieck space であるとい
うのは

$$\left[Y \ni y_n \rightarrow y_0 \in Y^* \text{ w}^* \Rightarrow y_n \rightarrow y_0 \text{ weakly} \right]$$

の時にいう。 X が Stonian ($\overline{\text{open}}$ は open) な S X は F -space
($U, V \text{ open } F\alpha, U \cap V = \emptyset \Rightarrow \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$) であり, この時
 $C(X)$ は Grothendieck space になることが知られている。

Banach 空間 Y が Lotz の定理が成立するとは

$$\left[T_n \text{ on } Y, \|T_n\| \leq 1, T_n \xrightarrow{s} I \Rightarrow T_n \xrightarrow{u} I \right]$$

の時にいうことにする。 [2, 3] の結果と extension property
を用いると

系. $QC \subset B \subset L^\infty(\mathbb{T})$ なる closed subalgebra B に $\mathbb{T} \neq \mathbb{1}$ して
Lotz の定理が成立する。 $QA = QC \cap H^\infty(\mathbb{T})$, $H^\infty(\mathbb{T})$ も Lotz の定
理が成立する。

問 1. QC は Grothendieck space か?

問 2. 一般の H^∞ 空間に $\mathbb{T} \neq \mathbb{1}$ して, Lotz の定理が成立するか?

参 考 文 献

- [1] F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, W. de Gruyter, 1994.
- [2] K. Izuchi, QC -level sets and quotients of Douglas algebras, J. Funct. Anal. 65 (1986), 293-308.

- [3] K. Izuchi, Countably generated Douglas algebras,
Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987), 177-192.
- [4] K. Izuchi, A sequential type Korovkin theorem on L^∞
for $\mathcal{QC}$ -test functions, Proc. Amer. Math. Soc., To appear.
- [5] K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential BKW-operators
and function algebras, J. Approx. Th. 85 (1996), 185-200.
- [6]. ———, Sequential Korovkin type theorems and weighted
composition operators, Acta Sci. Math. 62 (1996), 161-174.
- [7] P. P. Korovkin, On convergence of linear positive
operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad.
Nauk SSSR 90 (1953), 961-964.
- [8] H. P. Lotz, Uniform convergence of operators on L^∞ and
similar spaces, Math. Z. 190 (1985), 207-220.
- [9] E. Scheffold, Über die punktweise Konvergenz von
Operatoren in $C(X)$, Rev. Acad. Ci. Zaragoza 28 (1993), 5-12.
- [10] S.-E. Takahasi, (T, E) -Korovkin closures in normed spaces
and BKW-operators, J. Approx. Th. 82 (1995), 340-351.
- [11] D. E. Wulbert, Convergence of operators and Korovkin's
theorem, J. Approx. Th. 1 (1968), 381-390.

追加

1. T. Ishii and K. Izuchi, BKW-operators for Chebyshev systems, preprint.
2. K. Izuchi, Y. Matsugu and H. Takagi, BKW-operators on the polydisc and ball algebras, Far East J. Math. Sci. 3 (1995), 9-22.
3. K. Izuchi and S.-E. Takahasi, BKW-operators on the interval and the sequence spaces, J. Approx. Th. 87 (1996), 159-169.
4. ———, BKW-operators on the interval $[0, 1]$, Rend. Circ. Mat. Palermo, to appear.
5. R. Sato and S.-E. Takahasi, A discrete Korovkin theorem and BKW-operators, J. Approx. Th. 84 (1996), 351-366.
6. S.-E. Takahasi, Böhmman-Korovkin-Wulbert operators from a function into a commutative C^* -algebra for special test functions, Tôhoku Math. J. 48 (1996), 139-148.