

確率的長方形バリアーでの領域分断を伴う Weber 問題

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理科学専攻 北條 仁志 (Hitoshi Hohjo)
Dept. of Mathematics and Information Sciences, Graduate School of Science
Osaka Prefecture University

1 はじめに

本稿では, $\mathbb{R}^2$ 上の長方形領域において領域の境界に接した長方形バリアーが確率的に出現する Weber 問題を扱う. バリアーを伴う配置問題の研究は 1981 年 Katz and Cooper [9] にさかのぼる. 彼らは, 与えられた n 個の需要点に対して確定的な円形バリアーが一つ存在する Weber 問題を提案し, バリアーの存在下での 2 点間の最短経路を使って最小化問題を定式化した. Butt and Cavalier[4] は凸多角形バリアーを持つ配置問題を可視の概念を導入することで解決した. また, Klamroth[10] はシャドー領域を用いて実行可能領域をいくつかのセルに分割し, 各セルごとに部分問題を解くことでバリアー付き Weber 問題をバリアー無しの Weber 問題へと帰着させた. これらの先行研究では, バリアーが確定的に与えられた条件下での Weber 問題を扱っていた. その後, 2010 年に Canbolat and Wesolowsky[5] は一定の長さをもつ線分バリアーが確率的に出現する仮定の下での l_1 -ノルムによる一施設配置問題を提案した. 彼らは, 線分バリアーが座標平面上のある直線上に確率的に出現するモデルを考え, 需要点から施設までの重み付き距離の和の期待値を最小にする施設の配置を求める問題として定式化を行った. Amiri-Aref ら [1] は帯上に多角形バリアーが確率的に出現する問題を提案したが, 本質的には Canbolat and Wesolowsky のモデルと相違ない. Canbolat and Wesolowsky や Amiri-Aref らのモデルでは, バリアーが確率的に出現する領域には需要点が存在しないという仮定をしており, 需要点の数は初めに与えられたまま変化することがない. そのため, 既存のバリアー付き Weber 問題では, 施設がバリアー内に存在する場合の重み付き距離関数を定義する必要性がなかった. 荒神・北條 [17] はバリアーの概念を拡張解釈し, 長方形領域上においてその領域の境界に接して 1 つの長方形バリアーが確率的に出現する制約条件下での Weber 問題を提案した. 彼らのモデルでは, バリアーの出現の仕方により需要点がバリアー内に存在する場合も考慮されている. しかし, 長方形バリアーは互いに交わらないという仮定がされていたため, 領域が 2 つ以上に分割されることはなかった.

本稿では, 荒神・北條モデル [17] をさらに一般化し, 長方形バリアーが確率的に出現する制約条件下での Weber 問題を提案する. 2 つ以上のバリアーが同時に発生することにより通行不可能となった需要点が存在する場合も配慮して問題を定式化する. バリアーの出現により領域が 2 つ以上に分割されることがある. その現象を分断と呼び, 需要点の個数が少ない領域を分断された領域と呼ぶことにする. 我々は, 確率的に出現するバリアーを考慮するために, 施設がバリアー内に存在する場合の重み付き距離関数を再定義する. さらに需要点がバリアー内に存在するならば, その点を需要点とみなさないという仮定により, 需要点の数が変化することを考慮して目的関数の定式化を行う. また, 分断された領域を避けるような最適配置についても言及する.

2 モデル

本稿では, 長方形領域 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \bar{x}, 0 \leq y \leq \bar{y}\}$ において長方形バリアーが領域の境界に接して確率的に出現する制約条件下での一施設配置問題を扱う. x を配置する施設の位置とする. n

個の需要点が領域 Ω 上の $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ に存在し, 需要点 $\mathbf{x}_i$ の重みを w_i とする. 測度は l_1 -ノルムを用いる. m 箇所のバリアー基準点 $m_j, j = 1, 2, \dots, m$ が領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に存在し, 長方形バリアー $B_{jk}, k = 1, 2, \dots, l$ が基準点 m_j から確率的に出現する. ここで, バリアー B_{jk} の少なくとも一辺は領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上にあり, $\{m_j\} \subset B_{j1} \subset \dots \subset B_{jl} \subset \Omega, j = 1, \dots, m$ であるとする. もし発生したバリアー B_{jk} 内に需要点 $\mathbf{x}_i$ が含まれるならば, $\mathbf{x}_i$ は需要点とみなさない. 長方形領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ とバリアー B_{jk} の内部 $\text{int}B_{jk}$ は通行不可能である. Y_{jk} をバリアー B_{jk} が出現する場合には 1, 出現しない場合には 0 の値をとるバイナリ変数とし, バリアーが発生する 1 つの状況をシナリオと呼ぶことにする. 例えば, $m = 3, l = 2$ のとき, シナリオ $(Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{22}, Y_{31}, Y_{32}) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ はバリアー B_{11} が 1 つのみ発生している状況を表し, シナリオ $(1, 0, 0, 1, 1, 0)$ は 3 つのバリアー B_{11}, B_{22}, B_{31} が同時に発生している状況を表す. 便宜上, すべての j に対して $\sum_{k=1}^l Y_{jk} = 1$ を仮定する. バリアーがシナリオ $(Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1l}, Y_{21}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ に従って発生するときの出現確率を $p(Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1l}, Y_{21}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ とする.

本モデルにおける配置実行可能領域 $\mathcal{F}$ は, 与えられたしきい値 c 以上の確率で出現するすべてのバリアー B_{jk} の和集合 $\bar{B}$ を領域 Ω から除く領域とする. 我々の問題は, 実行可能領域において確率的に出現するバリアーを考慮した重み付き距離の総和の期待値を最小にする施設配置を決定することである.

3 数学的定式化

シナリオ $(Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1l}, Y_{21}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ に従ってバリアーが発生したとき, 全領域 Ω からそれらのバリアーを除いた領域が 1 つの領域からなる場合には, その領域上での 2 点間の距離は Katz and Cooper[9] によって定義されたバリアー距離を用いることで計算できる. しかしながら, 我々の問題における配置実行可能領域 $\mathcal{F}$ は確率 c 以上で出現するすべてのバリアー B_{jk} の和集合 $\bar{B}$ を領域 Ω から除いた領域であるので, バリアーの外部および境界上だけではなく確率が c 未満で出現するバリアー内での距離関数を定義する必要がある. あるバリアー B_{jk} が 1 つだけ出現するシナリオ $(0, \dots, 0, Y_{jk} = 1, 0, \dots, 0)$ においてバリアー上の点と他の点との間の距離は荒神, 北條 [17] が提案した距離関数を採用することにする.

今, 図 1 のようにあるバリアー B_{jk} が長方形領域 Ω 内に出現したとき, 長方形領域 Ω からバリアー B_{jk} を除いた領域 $\Omega \setminus B_{jk}$ を 3 分割し, バリアー B_{jk} から時計回りにセル $C_{jk}^1, C_{jk}^2, C_{jk}^3$ と名付ける. また, Cell C_{jk}^1 の境界 ∂C_{jk}^1 とバリアー B_{jk} の共通部分 $\partial C_{jk}^1 \cap B_{jk}$ の線分 (長方形領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ に垂直な Cell C_{jk}^1 側のバリアー B_{jk} の一辺) の端点のうち, 長方形領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ に属していない点を $\mathbf{a}_{jk}$ とする. 同様にして, Cell C_{jk}^3 の境界 ∂C_{jk}^3 とバリアー B_{jk} の共通部分 $\partial C_{jk}^3 \cap B_{jk}$ の線分 (長方形領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ に垂直な Cell C_{jk}^3 側のバリアー B_{jk} の一辺) の端点のうち, 長方形領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ に属していない点を $\mathbf{b}_{jk}$ とする. そのとき, 点 $\mathbf{x}$ と需要点間のバリアー B_{jk} に対する重み付き総距離 $f(\mathbf{x}; Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ は以下のように定義される [17].

$$f(\mathbf{x}; 0, \dots, 0, Y_{jk} = 1, 0, \dots, 0) = \begin{cases} \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^1} w_i \{d_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}_{jk}) + d_1(\mathbf{a}_{jk}, \mathbf{x}_i)\} + \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^2} w_i d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \\ \quad + \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^3} w_i \{d_1(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{jk}) + d_1(\mathbf{b}_{jk}, \mathbf{x}_i)\}, & \mathbf{x} \in B_{jk} \\ \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^1 \cup C_{jk}^2} w_i d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^3} w_i \{d_1(\mathbf{x}, \mathbf{b}_{jk}) + d_1(\mathbf{b}_{jk}, \mathbf{x}_i)\}, & \mathbf{x} \in C_{jk}^1 \\ \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^1 \cup C_{jk}^2 \cup C_{jk}^3} w_i d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), & \mathbf{x} \in C_{jk}^2 \\ \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^1} w_i \{d_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}_{jk}) + d_1(\mathbf{a}_{jk}, \mathbf{x}_i)\} + \sum_{i|\mathbf{x}_i \in C_{jk}^2 \cup C_{jk}^3} w_i d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i), & \mathbf{x} \in C_{jk}^3 \end{cases} \quad (1)$$

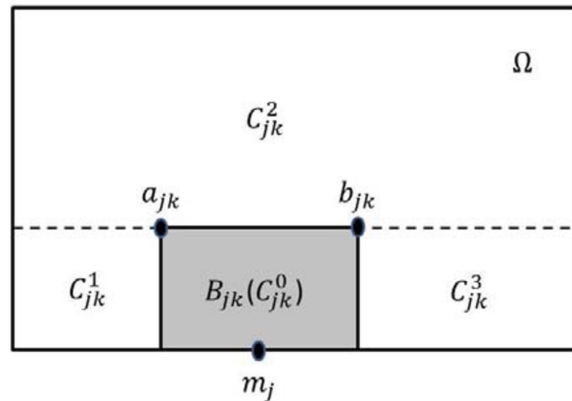


図 1: バリアー, 頂点, セル

ここで, $d_1(\cdot, \cdot)$ は l_1 -ノルムによる 2 点間の距離を表す. 本モデルでは分断の概念を伴うため, 上記の関数をさらに拡張することによりその状況にも対応する新たな距離関数を定義する. シナリオ $(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ において $Y_{jk} = 1$ であるバリアー B_{jk} の和集合を $\bar{B}(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$, 分断された領域を $\bar{\Omega}$ とし,

$$c_i = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}_i \in \bar{B}(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml}) \\ \alpha w_i, & \mathbf{x}_i \in \bar{\Omega} \\ w_i, & o.w. \end{cases}$$

とする. つまり, $\mathbf{x}_i$ が各シナリオにおいてバリアー内にあるときにはその需要点の重みを 0 とみなし, $\mathbf{x}_i$ が分断された領域内にあるときはその重み w_i を α 倍して扱う. $f(\mathbf{x}; Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ をバリアーの状況 $(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ を考慮した下での点 $\mathbf{x}$ と需要点間の重み付き総距離として再定義する. このとき, $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \bar{B}(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ に対して

$$f(\mathbf{x}; Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml}) = \sum_{i | \mathbf{x}_i \in \Omega \setminus \bar{\Omega}} c_i d_{\bar{B}(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \sum_{i | \mathbf{x}_i \in \bar{\Omega}} c_i d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$$

で与えられる. ここで, $d_{\bar{B}(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})}(\cdot, \cdot)$ はバリアー $\bar{B}(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ に対応するバリアー距離を表す. $\mathbf{x} \in \bar{B}(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml})$ の場合は $\mathbf{x}$ を含む各バリアー B_{jk} ごとに (1) 式と同様の計算を用いる.

このとき, 我々の問題は以下のように定式化できる:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml}} f(\mathbf{x}; Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml}) p(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml}) \rightarrow \min \\ s.t. \mathbf{x} \in \mathcal{F}.$$

そこで

$$\mathcal{F} = \Omega \setminus \bigcup_{B_{jk} \in \bar{B}} \{ \text{int} B_{jk} \cup (\partial \Omega \cap B_{jk}) \} \\ \bar{B} = \{ B_{jk} \mid \sum_{Y_{jk}=1} p(Y_{11}, \dots, Y_{jk}, \dots, Y_{ml}) \geq c, c \in \mathbf{R} \}.$$

4 アルゴリズム

本問題での大域的最適解を求めるアルゴリズムを次に記す. 改良 Weiszfeld アルゴリズムと l_1 -ノルムによる関数の凸性を考慮したアルゴリズムを与える.

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\mu \cdot \nabla f(\mathbf{x})}{s(\mathbf{x})},$$

$$s(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n c_{jk}^i / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|, & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i \neq j}^n c_{jk}^i / \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|, & \mathbf{x} = \mathbf{x}_j, j = 1, \dots, n \end{cases}$$

とし, $0 < \mu \leq 1$ とする.

アルゴリズム

入力. 目的関数 $f(\mathbf{x}), \nabla f(\mathbf{x})$,

パラメータ $\bar{x}, \bar{y}, n, m, l$,

$\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, w_i (i = 1, \dots, n)$,

$\alpha_{jk}, a_{jk}(x), a_{jk}(y), b_{jk}(x), b_{jk}(y) (j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, l)$,

しきい値 c ,

十分小さな正の値 ε

- Step1. すべての $a_{jk}(x), b_{jk}(x), 0, \bar{x}$ に対して, 小さい順に並べ替えを行い順序統計量 $X_{(1)}, \dots, X_{(p)}, \dots, X_{(2ml+2)}$ を形成する. 同様にして, すべての $a_{jk}(y), b_{jk}(y), 0, \bar{y}$ に対して, 小さい順に並べ替えを行い順序統計量 $Y_{(1)}, \dots, Y_{(q)}, \dots, Y_{(2ml+2)}$ を形成する.
- Step2. 第 p 順序統計量 $X_{(p)}$ と第 $(p+1)$ 順序統計量 $X_{(p+1)}$ でつくられる区間を $[X_{(p)}, X_{(p+1)}]$, 第 q 順序統計量 $Y_{(q)}$ と第 $(q+1)$ 順序統計量 $Y_{(q+1)}$ でつくられる区間を $[Y_{(q)}, Y_{(q+1)}]$ とし, $p = 1, q = 1$ とする. また $M = \infty$ とする.
- Step3. $\frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p)}, Y_{(q)}) > 0, \frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p)}, Y_{(q+1)}) > 0, \frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p+1)}, Y_{(q)}) > 0, \frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p+1)}, Y_{(q+1)}) > 0$ ならば, Step4 へ. $\frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p)}, Y_{(q)}) < 0, \frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p)}, Y_{(q+1)}) < 0, \frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p+1)}, Y_{(q)}) < 0, \frac{\partial}{\partial x} f(X_{(p+1)}, Y_{(q+1)}) < 0$ ならば, Step5 へ. そうでなければ, Step6 へ.
- Step4. $\frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p)}, Y_{(q)}) > 0, \frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p)}, Y_{(q+1)}) > 0$ ならば, $\mathbf{x}^{(k+1)} = (X_{(p)}, Y_{(q)})$ とし, Step10 へ. $\frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p)}, Y_{(q)}) < 0, \frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p)}, Y_{(q+1)}) < 0$ ならば, $\mathbf{x}^{(k+1)} = (X_{(p)}, Y_{(q+1)})$ とし, Step10 へ. そうでなければ, Step6 へ.
- Step5. $\frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p+1)}, Y_{(q)}) > 0, \frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p+1)}, Y_{(q+1)}) > 0$ ならば, $\mathbf{x}^{(k+1)} = (X_{(p+1)}, Y_{(q)})$ とし, Step10 へ. $\frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p+1)}, Y_{(q)}) < 0, \frac{\partial}{\partial y} f(X_{(p+1)}, Y_{(q+1)}) < 0$ ならば, $\mathbf{x}^{(k+1)} = (X_{(p+1)}, Y_{(q+1)})$ とし, Step10 へ. そうでなければ, Step6 へ.

- Step6. 初期点 $\mathbf{x}^{(0)} = (\frac{X_{(p)}+X_{(p+1)}}{2}, \frac{Y_{(q)}+Y_{(q+1)}}{2}) \in [X_{(p)}, X_{(p+1)}] \times [Y_{(q)}, Y_{(q+1)}]$ とする.
 $\mu = 1$ とする.
- Step7. $\mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{x}^{(k)})$ を計算する.
- Step8. $\mathbf{x}^{(k+1)} \in [X_{(p)}, X_{(p+1)}] \times [Y_{(q)}, Y_{(q+1)}]$ ならば, Step9 へ. そうでなければ, $\mu = \frac{\mu}{2}, k = k + 1$ として Step7 へ戻る.
- Step9. $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \varepsilon$ ならば, Step10. そうでなければ, $k = k + 1$ として Step7 へ戻る.
- Step10. $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < M$ ならば, $M = f(\mathbf{x}^{(k+1)})$, $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{(k+1)}$ とする.
- Step11. $p = 2ml + 1$ ならば, $p = 1$ として Step12 へ. そうでなければ, $p = p + 1$ として Step6 へ戻る.
- Step12. $q = 2ml + 1$ ならば, 大域的最適解を $\mathbf{x}^*$ として終了. そうでなければ, $q = q + 1$ として Step6 へ戻る.

このアルゴリズムを用いて, 実行可能領域上での大域的最適解を求める.

5 数値例

この節では, 長方形領域 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 15.0, 0 \leq y \leq 10.0\}$ 上にシナリオ $(Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{31})$ に従ってバリアー B_{jk} が確率 $p(Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{31})$ で出現する Weber 問題を考える. 需要点 $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 20$ の座標, バリアー $B_{jk}, j = 1, 2, 3, k = 1, 2$ の領域およびバリアー発生確率 $p(Y_{11}, Y_{12}, Y_{21}, Y_{31})$ を以下に与える.

需要点

需要点	座標	重み	需要点	座標	重み
$\mathbf{x}_1$	(1.7, 3.0)	$w_1 = 3$	$\mathbf{x}_2$	(6.1, 9.5)	$w_2 = 1$
$\mathbf{x}_3$	(6.1, 3.4)	$w_3 = 1$	$\mathbf{x}_4$	(6.5, 5.5)	$w_4 = 1$
$\mathbf{x}_5$	(11.8, 8.2)	$w_5 = 2$	$\mathbf{x}_6$	(4.2, 3.7)	$w_6 = 1$
$\mathbf{x}_7$	(5.3, 3.5)	$w_7 = 4$	$\mathbf{x}_8$	(15.0, 9.2)	$w_8 = 1$
$\mathbf{x}_9$	(14.3, 3.5)	$w_9 = 2$	$\mathbf{x}_{10}$	(1.7, 1.1)	$w_{10} = 4$
$\mathbf{x}_{11}$	(12.2, 4.9)	$w_{11} = 4$	$\mathbf{x}_{12}$	(5.1, 2.8)	$w_{12} = 1$
$\mathbf{x}_{13}$	(10.1, 1.2)	$w_{13} = 1$	$\mathbf{x}_{14}$	(0.6, 1.3)	$w_{14} = 2$
$\mathbf{x}_{15}$	(3.3, 4.0)	$w_{15} = 1$	$\mathbf{x}_{16}$	(1.8, 9.3)	$w_{16} = 1$
$\mathbf{x}_{17}$	(14.7, 5.3)	$w_{17} = 1$	$\mathbf{x}_{18}$	(11.1, 3.5)	$w_{18} = 2$
$\mathbf{x}_{19}$	(9.8, 7.3)	$w_{19} = 2$	$\mathbf{x}_{20}$	(4.8, 3.5)	$w_{20} = 4$

バリアー

$$B_{11} = \{(x, y) \mid 4.0 \leq x \leq 6.0, 0 \leq y \leq 2.0\}, \quad B_{12} = \{(x, y) \mid 3.5 \leq x \leq 7.0, 0 \leq y \leq 4.0\}, \\ B_{21} = \{(x, y) \mid 9.0 \leq x \leq 11.0, 7.0 \leq y \leq 10.0\}, \quad B_{31} = \{(x, y) \mid 0.0 \leq x \leq 4.0, 3.5 \leq y \leq 6.0\}$$

出現確率

$$p(1, 0, 0, 0) = 0.4, \quad p(0, 1, 0, 0) = 0.1, \quad p(0, 0, 1, 0) = 0.2, \quad p(0, 0, 0, 1) = 0.1, \\ p(1, 0, 1, 0) = 0.1, \quad p(0, 1, 1, 0) = 0.07, \quad p(0, 1, 1, 1) = 0.03, \quad \text{他の確率は } 0$$

この例では, $B_{12} \cap B_{31} \neq \phi$ であり, シナリオによっては領域 Ω の分断が発生する. $\alpha = 0.5, -50$ と $c = 0.15, 0.01$ における数値結果は以下のとおりである.

(i) $\alpha = 0.5, c = 0.15$ のとき

分断された領域上にある需要点を通常の重みの半分で換算した場合であり, 配置可能領域は $\mathcal{F} = \Omega \setminus (B_{11} \cup B_{21})$ である. このとき, 最適解は $x^* = (5.3, 3.5)$ となる. この場合にはしきい値 c が比較的大きいため, バリアー B_{12} 内での施設の配置を許す. この解はバリアーがない Weber 問題の最適解と一致しており, 配置問題においてバリアーの影響がないことを表している.

(ii) $\alpha = 0.5, c = 0.01$ のとき

配置可能領域は $\mathcal{F} = \Omega \setminus (B_{12} \cup B_{21} \cup B_{31})$ である. このとき, 最適解は $x^* = (5.3, 4.0)$ となる. これは (i) の解がバリアー B_{12} の内部にあるため, $(5.3, 3.5)$ に配置することができず, バリアー B_{12} の境界上で最適解が得られたことを述べている.

(iii) $\alpha = -50, c = 0.01$ のとき

α が負の数をとる場合は, 分断された領域から離れた点に最適配置を求めたい問題に対して有効な結果であり, α の値が小さくなるほど分断された領域を避けていることを意味する. この場合の配置可能領域は $\mathcal{F} = \Omega \setminus (B_{12} \cup B_{21} \cup B_{31})$ であり, 最適解は $x^* = (11.1, 4.9)$ となる.

6 まとめ

本稿では, 荒神・北條モデル [17] において出現するバリアーが 1 つのみであるという仮定を一般化し, 長方形バリアーが領域の境界部分から確率的に出現する制約条件の下での Weber 問題を提案した. 本モデルでは, 各バリアー基準点 m_j からそれぞれ l 個のバリアー $B_{mk}, k = 1, 2, \dots, l$ が出現するとして定式化した. 数値例で示したようにいくつかのバリアーの出現確率が 0 であると仮定することによりモデルを一般化できる. 単なるバリアー距離をもとにした最適配置だけでなく, パラメータ α に負の値を代入することで分断された領域を避けた最適配置のあり方も提案している.

参考文献

- [1] Amiri-Aref, M., N. Javadian, R. Tavakkoli-Moghaddam & A. Baboli (2013) A new mathematical model for the Weber location problem with a probabilistic polyhedral barrier, International Journal of Production Research **51**(20), 6110-6128.
- [2] Aneja, Y. P., M. Parlar (1994) Algorithms for Weber facility location in the presence of forbidden regions and/or barriers to travel, Transportation Science **28**, 70-76.

- [3] Bischoff,M., T.Fleischmann, K.Klamroth (2008) The multi-facility location-allocation problem with polyhedral barriers, *Computers & Operations Research*, **36**, 1376-1392.
- [4] Butt,S.E., T.M.Cavalier (1996) An efficient algorithm for facility loction in the presence of forbidden regions, *European Journal of Operational Research* **90**, 56-70.
- [5] Canbolat,M.S., G.O.Wesolosky (2010) The rectilinear distance Weber problem in the presence of a probabilistic line barrier, *European Journal of Operational Research* **202**, 114-121.
- [6] Canbolat,M.S., G.O.Wesolosky (2012) On the use of the varignon frame for single facility Weber problems in the presence of convex barriers, *European Journal of Operational Research* **217**, 241-247.
- [7] Drezner,Z., H.W.Hamacher (2004) *Facility location: application and theory*, Springer.
- [8] Kakhki,H.T., G.O.Wesolowsky (2003) Location among regions with varying norms, *Annals of Operations Research* **122**, 87-102.
- [9] Katz,I,N., L.Cooper (1981) Formulation and the case of Euclidean distance with one forbidden circle, *European Journal of Operational Research* **6**, 166-173.
- [10] Klamroth,K. (2001) A reduction result for location problems with polyhedral barriers, *European Journal of Operational Research* **130**, 486-497.
- [11] Larson,R.C., V.O.K.Li (1981) Finding minimum rectilinear distance paths in the presence of barriers, *Networks* **11**, 285-304.
- [12] Larson,R.C., G.Sadiq (1983) Facility locations with the Manhattan metric in the presence of barriers to travel, *Operations Research* **31**, 652-669.
- [13] McGarvey,R.G., T.M.Cavalier (2003) A global optimal approach to facility location in the presence of forbidden regions, *Computers & Industrial Engineering* **45**, 1-15.
- [14] Ostresh Jr,L.M. (1978) On the convergence of a class of iterative methods for solving the Weber location problem. *Operations Research* **26**, 597-609.
- [15] Shiripour,S. I.Mahdavi, .Amiri-Aref, M.Mohammadnia-Otaghsara & N.Mahdavi-Amiri (2012) Multi-facility location problems in the presence of a probabilistic line barrier: A mixed integer quadratic programming model, *International Journal of Production Research* **50**(15), 3988-4008.
- [16] Weiszfeld,E. (1937) Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum, *Tohoku Mathematical Journal (first series)* **43**, 355-386 (in French).
- [17] 荒神隆史, 北條仁志 (2013) 確率的に出現するバリアーを考慮した配置問題, *京都大学数理解析研究所講究録* **1864**, 31-38.