

配置と特殊関数

(Onsager vortex model 及び
Dyson Complex model へのひとつの注意)
欲理 青本和彦

1. 古典的な Appell 超幾何関数, Lauricella 超幾何関数, 半単純 Lie 群上の球関数などは, 適当な代数多様体上の多重初等関数積分表示を持つ. すなわち, ある代数多様体上の hyperplane sections の配置を与え, それに附随する しかるべく複素積分 を考える. その微分方程式の構造はすなわちその Gauss-Manin 接続の構造によって与えられる. もっとも簡単な例として

$$(1) \mathcal{J} = \int f_1^{\lambda_1}(x) \cdots f_m^{\lambda_m}(x) \exp(f_0(x)) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

($f_0, f_1, \dots, f_m$ はいずれも線型)

の Gauss-Manin 接続は [1] にある. この場合 $f_0, f_1, \dots, f_m$ が "一般の位置にある" という仮定をつけなければ

かなりの部分の超幾何関数を含む。
 ここでは $f_1, f_2, \dots, f_m$ が線型だが,
 f_0 が2次式の場合を考察する。すなわち

$$(2) J' = \int \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2\right) f_1^{\lambda_1} \cdots f_m^{\lambda_m} dx_1 \cdots dx_n$$

の Gauss-Manin 接続を計算する。

J の場合 被積分関数は affine 変換を許すから, J は affine 変換群の不変式を用いて表示された。 J' の場合は $(f_0=0$ のときは射影変換群をとる) 同じ理由によって 直交変換群の不変式を用いて表示されねばならない。

$$\text{今, } a_{jk} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{j\nu} \alpha_{k\nu} \quad (1 \leq j, k \leq m),$$

$$f_j = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{j\nu} x_\nu + \alpha_{j0} \quad (1 \leq j \leq m),$$

$$f_0 = 1$$

$$a_{00}=0, \quad a_{j0}=a_{0j}=\alpha_{j0}$$

とおく事により $(m+1) \times (m+1)$ の対称行列

$A = (a_{jk})_{0 \leq j, k \leq m}$ を定義する。

J' の Gauss-Manin 接続は変数 a_{jk} を用いて表示される。以下次の仮定をおく。

$$(*) \quad \begin{cases} i) f_1, \dots, f_m \text{ は } \mathbb{C}^n \\ f_1=0, f_2=0, \dots, f_m=0 \text{ は一般の位置にある,} \\ ii) \det A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} \neq 0 \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m \end{cases}$$

ここで $\det A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix}$ は $i_1 \dots i_p$ 行, $j_1 \dots j_p$ 列の
小行列式, $\det A(i_1 \dots i_p) = \det A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix}$ とおく.

$\omega = -\sum_{j=1}^n x_j dx_j + \sum_{j=1}^m \lambda_j d \log f_j$ を connection
form とする, analytic, twisted
de Rham cohomology を $H^*(X, \nabla_\omega)$ ([2] を
参照) とすれば $(X = \mathbb{C}^n - \bigcup_{j=1}^m (f_j=0))$,
Lemma 1. $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ が $\lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_p} \in \mathbb{Z}^+$

$(1 \leq \sigma \leq n) (1 \leq i_1 < \dots < i_\sigma \leq m)$ をみたせば

$$i) H^p(X, \nabla_\omega) = 0 \quad 0 \leq p \leq n-1$$

ii) $H^n(X, \nabla_\omega)$ の基底として

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \frac{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}}{f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_p}}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m \\ 0 \leq p \leq n \end{matrix}$$

がとれる. (これについては [3] を参照)

J' の積分の輪体として 線型独立なものは

$\mathbb{R}^m - \bigcup (f_j=0)$ の connected components
がとれる.

$$(3) \dots \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots i_p)} = \int \underbrace{e^{-\frac{1}{2} \sum_1^n x_j^2} f_1^{\lambda_1} \dots f_m^{\lambda_m}}_{U_\lambda} \varphi_{(i_1 \dots i_p)}$$

とおくとき $\tilde{\varphi}_{i_1 \dots i_p}$ は次の差分方程式をみたす. 計算の方法は [2] と同様.

Proposition 1. $0 \leq p \leq n$ に対して

$$(4) \dots T_j \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots i_p)} = \int U_\lambda f_j \varphi_{(i_1 \dots i_p)}$$

とおくとき

$$T_{i_0} \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots i_p)} = + \sum_{\sigma=1}^p \frac{\det A(\hat{i_1} \hat{i_2} \dots \hat{i_p})}{\det A(i_1 \dots i_p)} (-1)^{\sigma-1}.$$

$$\left\{ \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots \hat{i_\sigma} \dots i_p)} - \alpha_{i_\sigma, 0} \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots i_p)} \right\} + \alpha_{i_0, 0} \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots i_p)} +$$

$$+ \sum_{k \notin (i_1, \dots, i_p)} \frac{\lambda_k \det A(\hat{i_1} \dots \hat{i_p} i_0)}{\det A(i_1 \dots i_p)} \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots i_p k)}, i_0 \notin I$$

($I = (i_1, \dots, i_p)$ とおいた) ;

$$T_{i_\mu} \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots i_p)} = \tilde{\varphi}_{(i_1 \dots \hat{i_\mu} \dots i_p)}, 1 \leq \mu \leq p$$

これは 最大過剰な線型差分系である.

これを逆に解くと

Prop 1' $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$, $0 \leq p \leq n$ に対して,

$$(5) \dots (\lambda_{i_1} - 1) T_{i_1}^{-1} \tilde{\varphi}(i_1, i_2, \dots, i_n) = - \left\{ \sum_{k \notin I} \lambda_k \frac{\det A \begin{pmatrix} k & i_1 & \dots & i_n \\ 0 & k & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}}{\det A(k, i_1, \dots, i_n)} + \frac{\det A \begin{pmatrix} 0 & i_1 & \dots & i_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}}{\det A(i_1, \dots, i_n)} \right\}.$$

$$\cdot \tilde{\varphi}(i_1, \dots, i_n) - \sum_{v=1}^n (-1)^v \frac{\det A \begin{pmatrix} k & i_2 & \dots & i_n \\ k & i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}}{\det A \begin{pmatrix} k & i_1 & \dots & i_n \\ 0 & i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}} \tilde{\varphi}(k, i_1, \dots, \widehat{i_v}, \dots, i_n)$$

$$+ \sum_{\mu=1}^n \frac{\det A \begin{pmatrix} i_2 & \dots & i_n \\ i_1 & \dots & i_n \end{pmatrix}}{\det A(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\mu-1} \tilde{\varphi}(i_1, \dots, \widehat{i_\mu}, \dots, i_n);$$

$$(T_{i_0}^{-1} \tilde{\varphi}(i_1, \dots, i_n) = \frac{1}{[i_0, i_1, \dots, i_n]} \sum_{v=0}^n (-1)^v [i_0, \dots, \widehat{i_v}, \dots, i_n] \tilde{\varphi}(i_1, \dots, \widehat{i_v}, \dots, i_n),$$

$$(\lambda_{i_1} - 1) T_{i_1}^{-1} \tilde{\varphi}(i_1, \dots, i_p) = \sum_{v=1}^p \frac{\det A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & \widehat{i_v} & \dots & i_p \\ i_2 & \dots & \dots & \dots & i_p \end{pmatrix}}{\det A(i_1, \dots, i_p)} (-1)^{v+1} \tilde{\varphi}(i_1, \dots, \widehat{i_v}, \dots, i_p) +$$

$$+ \sum_{\substack{k \geq p+1 \\ k \notin I}} \lambda_k \frac{\det A \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p & k \end{pmatrix}}{\det A(i_1, i_2, \dots, i_p)} (-1)^{p+\mu-1} \tilde{\varphi}(k, i_1, \dots, i_p),$$

$$T_{i_0}^{-1} \tilde{\varphi}(i_1, \dots, i_p) = \tilde{\varphi}(i_0, i_1, \dots, i_p);$$

Prop 2. J' のみたる 最大過剰決定系 は

次で与えられる :

$$(6) \quad d\tilde{\varphi}_k = \sum_{j=1}^m d\alpha_{j0} \cdot \lambda_j \tilde{\varphi}(j) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq j, k \leq m \\ j \neq k}} d\alpha_{jk} \cdot \lambda_j \lambda_k \tilde{\varphi}(j, k)$$

(これだけでは閉じていないが, (5) と合わせれば
閉じている!)

2. Dyson の $\langle \text{complex system} \rangle$ の 密度
(unitary ensemble)

関数は次の多重積分によって与えられる ([4] 参照):

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2\right) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^\beta \cdot \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} |x_i - x_j|^\beta dx_1 \cdots dx_n$$

これは積分形としては (2) のカテゴリーに属する.

我々はこれを $x_1, \dots, x_p, \beta$ の関数とみて

$F_n(x_1, \dots, x_p; \beta)$ とおく. $x_1, \dots, x_p$ については最大過

剰決定系 (holonomic 系), β については差分系を

みだす事は一般的によく知られている事だが,

以下 この方程式系を陽に求める事にする.

接続型式を $\omega = -\sum_{j=1}^n x_j dx_j + \beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{d(x_i - x_j)}{x_i - x_j}$ とおく.

Lemma 1 に 対応して, (*) をみないか 同様の考察より,

Lemma 2. β が generic ($\beta > 0, \beta \notin \mathbb{Z}$) のとき,

$$(i) \quad H^p(X, \mathcal{D}_\omega) \cong 0 \quad p < n$$

$$(ii) \quad H^n(X, \mathcal{D}_\omega) \text{ は}$$

$d \log f_{s_1} \wedge \cdots \wedge d \log f_{s_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{n-k}}$
 (ここで $\log f_{s_i}$ は $\log(x_i - x_j)$ の形のもの) で
 張られる. これは 又 基底として

$$\frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n}{(x_{i_1} - x_{j_1}) \cdots (x_{i_p} - x_{j_p})},$$

$i_1 > j_1, \dots, i_s > j_s, p+1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n$ を 取る
 事が出来る. 従って次元は $(p+1)(p+2) \cdots n$
 である. 上記 微分型式 を $\mathcal{P}(k_{p+1}, \dots, k_n)$

と記す ($0 \leq k_v \leq v-1$):

$v \in (i_1, \dots, i_s)$ のとき k_v を 対応する j_v とおき

$v \notin (i_1, \dots, i_s)$ のとき $k_v = 0$ とおく.

積分 $\tilde{\varphi}(k_{p+1}, \dots, k_n)$ は, $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{p+1}$ と
 順々に 積分 を 行なってゆくのであるから, 各段
 階の積分の構造を知る事により 明らかに
 される. まず x_n についての積分は Pochhammer
 型であり, その結果は 簡単な方程式をみたす.

さらにその解を積分する, ... と繰り返す.

Lemma 3. (Pochhammer 型 積分の公式) ([5])

(8)
$$\frac{dY}{dw} = Y \left[\sum_{i=1}^m \frac{U_i}{w - \alpha_i} + A w + B \right]; Y, U_i \text{ は } \beta \times s$$

 の matrix ; において U_i は Schlesinger 方程式をみたすとする (A, B を const) :

(9)
$$\begin{cases} dU_i = - \sum_{j \neq i} [U_i, U_j] \frac{d(\alpha_i - \alpha_j)}{\alpha_i - \alpha_j} \\ U_i A = A U_i, \quad U_i B = B U_i, \quad AB = BA \end{cases}$$

 この時 積分

(10)
$$\tilde{\varphi} = \int Y \cdot \psi dw, \quad \psi \text{ rational 1-form}$$

$$\psi \in \Omega^1(\mathbb{C} - \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\})$$

は一般化した Pochhammer 方程式をみたす:

$$\varphi(w) = \frac{dw}{w - \alpha_i}, \quad \varphi \neq dw \text{ とおこう}$$

(11)
$$\begin{cases} d\tilde{\varphi}(w) = \sum_{j \neq i} \frac{U_j d(\alpha_i - \alpha_j)}{\alpha_i - \alpha_j} (\tilde{\varphi}(w) - \tilde{\varphi}(j)) + \\ \quad + A \tilde{\varphi} d\alpha_i + \{A\alpha_i + B\} \tilde{\varphi}(w) d\alpha_i, \\ d\tilde{\varphi} = - \sum_{i=1}^m U_i \tilde{\varphi}(w) d\alpha_i \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}(k_{p+1}, \dots, k_n)$ のみたす $\wedge^3$ Goursat-Manin 接続
 $(0 \leq k_v \leq v-1)$ を

$$(2) \quad d\tilde{\varphi}(\dots) = \tilde{\varphi}(\dots) \left[\sum_{1 \leq i < j \leq p} U_{ij}^{(p)} d\log(\alpha_i - \alpha_j) + \sum_{i=1}^p (A_i^{(p)} \alpha_i + B_i^{(p)}) d\alpha_i \right]$$

($U_{ij}^{(p)}, A_i^{(p)}, B_i^{(p)}$ は いずれも $(p+1) \cdots n \times (p+1) \cdots n$ の Matrix) とおくととき, Lemma 3 を 繰り返し
用いて

Lemma 4. (漸化式)

$$(3) \quad \begin{cases} U_{ij}^{(p)} = U_{ij}^{(p)} = \xi_{ij} \otimes (\beta + U_{j,p+1}^{(p+1)}) + \xi'_{ij} \otimes (\beta + U_{i,p+1}^{(p+1)}) + 1_p \otimes U_{ij}^{(p+1)}, \\ A_j^{(p)} = e_j \otimes A_{p+1}^{(p+1)} + 1_p \otimes A_j^{(p+1)} - e_j \otimes 1_{p+1} \otimes \cdots \otimes 1_n, \\ B_j^{(p)} = -\beta e_{j0} - e_{j0} \otimes U_{j,p+1}^{(p+1)} + e_{j0} \otimes A_j^{(p+1)} - e_{j0} \otimes 1_{p+1} \otimes \cdots \\ + e_j \otimes B_{j,p+1}^{(p+1)} + 1_p \otimes B_j^{(p+1)}, \end{cases}$$

ここ $\xi_{ij}, \xi'_{ij}, e_j, e_{j0}, e_{0j}$ は $(p+1) \times (p+1)$ の 行列
を表わす:

$$\begin{array}{ccccc} \xi_{ij} & \xi'_{ij} & e_j & e_{j0} & e_{0j} \\ i & i & i & i & i \\ j & j & j & j & j \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

すなわち $(\tilde{\varphi}(k_{p+1}, \dots, k_n)$ についての
Gamb-Marin 接続は $(n-p)$ 個のベクトル空間

のテンソル積 $\mathbb{C}^{p+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n$ に作用する
事になる。

差分方程式系 については (4) の方程式
かたがた成立する，実際 (4) において
 f_{i_1}, f_{i_p}, f_k が線型従属 ならば $\det A_{k, i_1, \dots, i_p}^{i_0, i_1, \dots, i_p} = 0$
 となるので $\hat{\varphi}(i_1, \dots, i_p, k)$ を含む項は無視出来る。
 特に Lemma 2 において $p=0$ とおく。このとき
多次対称群に不変な $H^N(X, \nabla_\omega)$ の
元全体は、1次元でそれは $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$
で張られる。 その事から 積分

$$(7') \quad \int \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2\right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|^\beta dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

は β の関数として Γ -因子のみを持つ
 事が知られる。これは Dyson conjecture として
 知られている。Dyson は 正確な形を予想
 しているが、これは 本には証明出来なかった ([4] 参照)

3. Onsager vortex model の巨大標集団
 の密度関数の形は

$$(14) \quad \int_{\mathbb{C}^{N+1}} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq N+1 \\ i, j \neq p+1}} (z_i - z_j)^\beta (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^\beta \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} |z_i|^2\right) \cdot dz_{p+1} \dots dz_N d\bar{z}_{p+1} \dots d\bar{z}_N$$

([6]参照); $m=2N$;

この場合は (*) の i) も ii) も 満たさないので
一層複雑である. しかし

$$\begin{aligned}
 (15) \quad \tilde{F}_N(z_1 \cdots z_p, \bar{z}_1 \cdots \bar{z}_p) &= \\
 &= \int \prod_{1 \leq k \leq p} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_k)^\beta (\bar{z}_i - \bar{z}_k)^\beta (z_i - z_j)^\beta (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^\beta \cdot \\
 &\quad \cdot (z_{p+1} \cdots z_N, \bar{z}_{p+1} \cdots \bar{z}_N)^\gamma \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=p+1}^N |z_j|^2 \right] dz_{p+1} \cdots dz_N d\bar{z}_{p+1} \cdots d\bar{z}_N
 \end{aligned}$$

を考察するときは ~~2.2~~ と同じように 積分を
帰納的に実行する事が出来る.

Lemma 5. 8×8 行列 $Y(w, \bar{w})$ は 次の方程式
を満たすとする:

$$dY = Y \left\{ \sum_{j=0}^m \frac{U_j dw}{w - \alpha_j} + \sum_{j=0}^m \frac{U_j^* d\bar{w}}{\bar{w} - \bar{\alpha}_j} + (A^* w d\bar{w} + A \bar{w} dw) \right\}$$

($\alpha_0 = 0, \alpha_j \neq 0$)

且 U_j, U_j^*, A, A^* は integrability conditions:

$$[U_j, U_k^*] = 0, [A, U_j^*] = 0, [A^*, U_k] = 0$$

$$0 = [A, U_0^*] + [U_0, A^*] + A^* - A$$

を満たしているとする. この時

積分

$$\tilde{\varphi}(j, k) = \int Y \cdot \frac{dw \wedge d\bar{w}}{(w - \alpha_j)(\bar{w} - \bar{\alpha}_k)} \quad 0 \leq j, k \leq m$$

$$\tilde{\varphi} = \int Y \, dw \wedge d\bar{w}$$

は次の微分方程式系をみたす：
($\alpha_1, \dots, \alpha_m, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m$ について)

$$\begin{aligned} d\tilde{\varphi} &= \sum_{j=1}^m d\log \alpha_j \cdot U_j A^* \Gamma^1 \left\{ \sum U_k^* \tilde{\varphi}_{j, k}^* + A^* \tilde{\varphi} \right\} + \\ &+ \sum_{j=1}^m d\log \bar{\alpha}_j \cdot U_j^* A^1 \left\{ \sum U_k \tilde{\varphi}_{j, k}^* + A \tilde{\varphi} \right\}, \end{aligned}$$

$$d\tilde{\varphi}_{j, k}^* = \sum_{l \neq j, 0 \leq l \leq m} d\log(\alpha_l - \alpha_j) \cdot U_l (-\tilde{\varphi}_{l, k}^* + \tilde{\varphi}_{j, k}^*) +$$

$$+ A \, d\alpha_j \, \bar{\alpha}_k \, \tilde{\varphi}_{j, k}^* - d\log \alpha_j \cdot A(A^* \Gamma^1 (U_k^* \tilde{\varphi}_{j, k}^* + A^* \tilde{\varphi})) +$$

$$+ \sum_{l \neq k, 0 \leq l \leq m} d\log(\bar{\alpha}_l - \bar{\alpha}_k) \cdot U_l^* (-\tilde{\varphi}_{j, l}^* + \tilde{\varphi}_{j, k}^*) +$$

$$+ A^* d\bar{\alpha}_k \cdot \alpha_j \, \tilde{\varphi}_{j, k}^* - d\log \bar{\alpha}_k \cdot A^* A^1 (U_j \tilde{\varphi}_{j, k}^* + A \tilde{\varphi});$$

この Lemma を繰り返して用ゐれば (15) の満たす微分方程式が得られるが、複雑なので省略する。

4. (結論) i) $\beta = 1, 2, 4$ のとき Dyson の

complex system は 1次元 ~~理想~~ Bose ガス 模型とも関連してよくわかっている。それらは $N \rightarrow \infty$ のとき Fredholm 行列式を用いて表わされており、最近の Bato-Miura-Jimbo 理論の枠組の中に入っているらしい。 β が一般の時 或いは Onsager vortex 模型のときに類似の現象があるかないかはよくわからない ([~~勿~~ 参照])

ii) J, J' のような積分を 不変式の拡張として 捉える事は 興味があるかもしれない。

J において $f_0, f_1, \dots, f_m$ が 2次式の場合はどうであろうか？ この場合は 少くも

Feynmann 図形に 附随する 複素積分を含んでおり、応用はさらに 広がるであろう。

([~~勿~~ 参照])

[1] K. Aomoto, Sci. Papers, Collec. of Gene. Ed., Univ. of Tokyo, Vol 27 (1977), 49-61

[2] —, J. of Fac. Sci., Univ. of Tokyo, 22(1975), 271-297

[3] —, ibid (1980), to appear

[4] F.J. Dyson, Commun. Math. Phys. 47(1976), 171-183

- [5] K. Aomoto, J. de Math., pures et appliquées,
Tom 52(1973), 1 ~ 11.
- [6] T.S. Lundgren and Y.B. Poincaré, J. of Stati.
Phys. Vol 17(1977),
- [7] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori and M. Sato,
Density matrix of impenetrable Bose gas
and the fifth Painlevé transcendent,
(1979) preprint
- [8] M. Kashiwara, T. Kawai and H.P. Stapp,
Commun. Math. Phys. 66 (1979), 95-130.