

講義ノート

形の数理と流体力学*

東京農工大・一般教育 高木隆司

(1990年2月22日 受理)

§ 1 序説

形というものは、定量化が困難で、パラメーターが多いため、最近まで、研究の対称になりにくかった。ところが、微視的科学が一段落して工業化の段階に入り、興味が巨視的な現象へと向かってきた。更に、コンピューターの発達、特に画像解析などの技術の発展により、巨視的な形の研究が盛んになりつつある。

形についての過去の研究を見てみると、

ステンセンによる、面角不変の法則 (1669年)

ウェゲナーによる、大陸移動説 (1912年)

リヒテンベルク図形 (1777年)

リーゼガング環 (1986年)

BZ反応 (B.P. Belousov 1959, A.M. Zhabotinsky 1967)

ベナール対流 (1900年)

カルマン渦 (H. Benard 1906, T. Karman 1911)

テイラー渦 (1923年)

などの研究がある。

また、最近でてきた新しい概念としては、

カタストロフィー

散逸構造

フラクタル

などがある。

日本における形の研究を見ると、

寺田寅彦 : X線解説の実験 (1917), 電気火花, ガラスの割れ目,
金平糖の形成過程などのいわゆる '割れ目の物理'; '寺田物理学'

中谷宇吉郎: 電気火花, 雪の結晶形, 着氷, 凍土

平田森三 : 破壊現象

戸田盛和 : 金平糖の形成過程

等の研究がある。

最近の情勢としては、新しい物質 (アモルファス, 合金, 準結晶) や、巨視的現象の統計力学 (ベナール対流, 結晶成長, 相分離パターン, DLA), 生命科学の発達, 形状認識技術 (CT, ステレオロジー), 社会システムの解析 (交通網の設計など) 多くの分野で形が重要な役割を演じており、これを受けて、1985年6月に「形の科学会」(The Society for Science on Form, Japan) が設立された。

さて、形の数理とは何なのか? という問いに対しては、

形の記述法 (空間の性質)

形の法則性 (形の形成の仕組み)

形の規格化 (形を調べる方法: 計測, 画像処理と表現)

を総合したものだと考えられる。

一般的には、"場の分布から、形というある種の '粗視化された情報' を抽出し、それが満たす方程式を求め、その解析を行う数学的手段の総称" であると考え。

この講義の目的としては、講義を聞いている皆さんが、将来研究の中で形について数学的に取り扱う際の道具を準備することを考えている。また、この分野は、全体としてまだ体系化されていないので、やや話がとぶ部分もあるかも知れないことを断っておく。

§ 2 形の定量

§ 2. 1 場と輪郭

巨視的な‘形’は、原子や分子などの構成要素の空間分布によってつくられる。従って、

$f(x, t)$: 物質の空間分布

を与えると、形が定まるはずであるが、形という概念は直接には見えていない。

そこで、分子レベルでの分布を無視する粗視化を行う。これは、場から輪郭への一種の射影であると考えられる。

$P : f(x, t) \rightarrow F(x, t)$

f を定める方程式は、

$$df/dt = M(f, g) \quad (g: \text{外的要因})$$

という形の、‘発展方程式’ (例としては、Newton, Navier-Stokes, Schrodinger の方程式など)

それに、

$$I(f, g) = 0$$

という形のもの (ここでは‘平衡方程式’と呼んでおく) がある。

これらの式を、粗視化したものは、

$$dF/dt = M_F(F, G)$$

$$I_F(F, G) = 0$$

の様になると考えられるが、 f についての方程式が既知の場合でも、 F についての‘粗視化した方程式’がどんなものかは分かっていない。これを求めるのが形の数理の一つの目的と考えられる。ただし、この分野は、まだ発達していないので、ここではこれ以上詳しくは述べない。

§ 2. 2 トポロジー

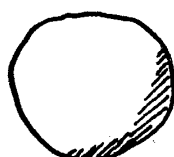
以下に位相不変量 (図形の変形に対して不変に保たれる量) をいくつか紹介することにする。これらは、形を定量化する方法である。

a. 連結数

集合を、二つの部分に分けるときに必要となる境界の数。

$n=0$ (0 連結、単連結) : 物体をどのように切っても二つに別れる。

$n=1$ (1 連結、弧状連結) : 1 か所を切るだけでは分離しない。(図)



$n=0$



$n=1$



$n=2$

図：2次元の面と連結数

c. ベッチ数

細胞のネットワークの様子（組織のつながり方が重要）を表現するのに使われたりする。

n 次元空間の立体について、ベッチ数 $p_0, p_1, \dots, p_n$ が存在する。3次元立体の表面の p_0, p_1, p_2 は直観的には、立体の角を減らして滑らかにしていったときの、頂点、辺、面の数である。

ここではその詳細には触れないで、主要な結論を列挙するにとどめる。

- ・連結した3次元立体では、 $p_0 = 1$ 。
- ・その表面が向き付け可能 (orientable、現実の立体はすべて可能) ならば、 $p_2 = 1$ 、不可能ならば (例：メビウスの帯、クラインの壺)、 $p_2 = 0$ 。
- ・球と同相な立体では $p_1 = 0$ 。 n 個の穴 (位相幾何の言葉ではハンドル) を持ち、向き付け可能な表面を持てば $p_1 = 2n$ 。

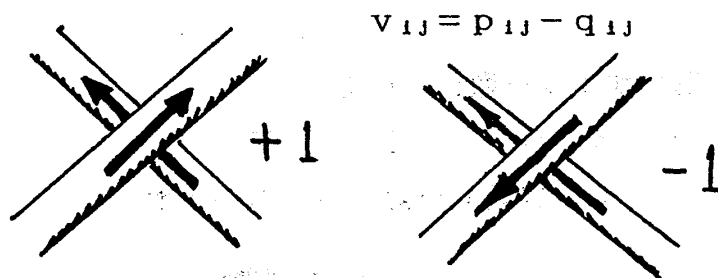
ベッチ数とオイラー標数について、次のオイラー・ポアンカレの公式がなりたつ。

$$\chi = p_2 - p_1 + p_0$$

d. からみ数・ライジング数

からみ数

トーラスと結んだ紐はいずれも $\chi = 0$ なので、これらを区別するには、紐のからみ具合を表現する量が必要となる。これがからみ数である。からみ数は、絡んだ紐をある平面へ射影したときに、下を潜る紐に対して上の紐が右に振じれていれば $+1$ 、左へ振じれていれば -1 とし、 i 番目のひもと j 番目のひもに対して、 i 番目の紐が j 番目の紐を $(+)$ で潜る回数を p_{ij} 、 $(-)$ で潜る回数を q_{ij} としたとき、からみ数は次式で与えられる。



図：からみ数の定義

曲線を $x_1(t_1), x_2(t_2)$ としたとき、次のガウスの公式が成り立つ。

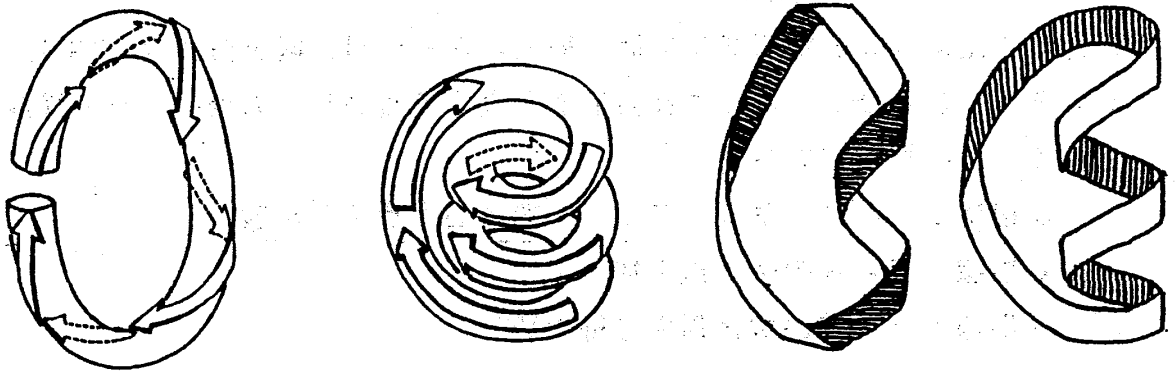
$$v_{12} = (4\pi)^{-3} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \frac{(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} \cdot \frac{dx_1}{dt_1} \times \frac{dx_2}{dt_2} dt_1 dt_2$$

ライジング(writhing)数

これは曲線の「曲がりくねり」の程度を表す数のことである。細長い弾性体のひも(トーラス)を切ってn回ねじってつないだとき、トーラスの両側に筋を付けたとすると、これら2本の筋の絡み数はnとなる。このnを「ねじれ数(twisting number)」とよぶ。このとき局所的なねじれを解消するように紐をn巻きのコイルにすることができる(図)。この巻数をライジング数と呼ぶ。ねじれ数とライジング数の和は、輪に手を加えないかぎり常に一定で、さきの両側の筋の絡み数に一致する。この様な紐の変形に関する量は、DNAの超らせん(super coil)の解析に応用されている。

閉じた曲線が $x(t)$ で与えられたとき、ライジング数 W_r に対して次の公式がある。

$$W_r = (4\pi)^{-3} \oint \oint \frac{(x_1 - x_2)}{\|x_1 - x_2\|^3} \frac{dx_1}{dt_1} \times \frac{dx_2}{dt_2} dt_1 dt_2$$



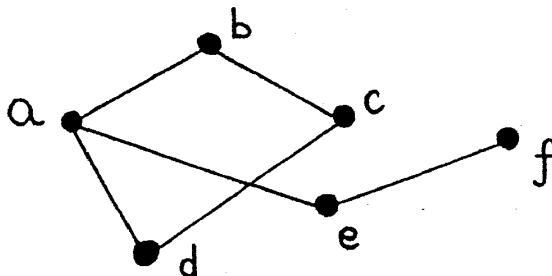
図：(a)紐に捩れを与える(b)曲がりくねりを捩れで解消(c)テープによる図示

§ 2. 3 グラフ理論

点、およびそれらを結ぶ線からなる図形をグラフと呼ぶ。点の集合を V 、線の集合を E とすると、一般にグラフは $G(V, E)$ と表される。

例： $V = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$E = \{ab, bc, cd, ad, ae, ef\}$



サイクロマティック数：

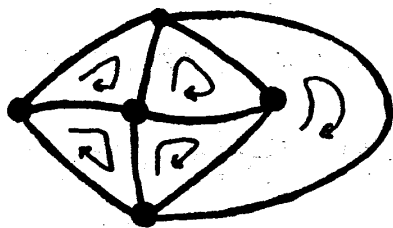
n 個の点、 m 個の線、 p 個の連結成分からなる平面グラフ(線の交差が点以外で起さないグラフ)について

$$\nu = m - n + p$$

をサイクロマティック数と呼び、グラフに含まれるサイクルの数を表す。

サイクロマティック数の例：

点5、線9、連結成分1、リング5 のとき $\nu = 9 - 5 + 1 = 5$



$\nu = 5$

n 個の点よりなる平面グラフは、最大 $3n - 6$ 個の線を持つ(証明略)。この時、 $\nu = 2n - 5$ となる。とくに社会構造を表す平面グラフの場合、その経済的効率を表すいくつかの指標がある。

α 指標： $\alpha = \text{サイクロマティック数} / \text{最大サイクル数}$

β 指標： $\beta = \text{線の数} / \text{点の数}$

γ 指標： $\gamma = \text{線の数} / \text{最大の線の数}$

さらに、詳しい定量化法としてシンベル指数とよばれるものがある。

シンベル指数： $S(i) = \sum d(i, j)$

ここで $d(i, j) = (i, j \text{ 間の最短path数}(i, j \text{ 間の距離}))$

§ 2. 4 スペクトル

形を表す関数をスペクトルによって解析することを考える。

a パワー・スペクトル

$(-T/2, T/2)$ で定義された完全正規直交系で $F(t)$ を

$$F(t) = \sum a_r \psi_r, \quad a_r = \int F \psi_r dt$$

と表す。このとき、

$$I_r = |a_r|^2$$

をエネルギー・スペクトルと呼ぶ。

$F(t)$ が無限領域で定義されているときは、 $\sum$ を $\int$ に替えればよい。単位時間当りのスペクトル

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \{I(f)/T\}$$

をパワースペクトルと呼ぶ。

b 自己相関関数

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \int F(t+\tau) F(t) dt$$

を自己相関関数という。またこれを $C(0)$ で割った関数

$$R(\tau) = C(\tau)/C(0)$$

は、自己相関係数という。自己相関関数とパワースペクトルの間には、ウィーナー・ヒンチンの公式と呼ばれる式が成り立つ。

$$C(\tau) = \int P(f) \exp(2\pi i f \tau) df$$

$$P(f) = \int C(\tau) \exp(-2\pi i f \tau) d\tau$$

この式は実験のデーターを処理する際にもよく使われる。

パワースペクトルと自己相関関数のいくつかの例

・ ホワイトノイズ:

$$I(f) = a^2$$

$$C(\tau) = a^2 \delta(\tau)$$

・ ポアソン矩形パルス (たかさ a 、平均 f_0):

$$I(f) = 2a^2 f_0 / (f_0^2 + 4\pi^2 f^2)$$

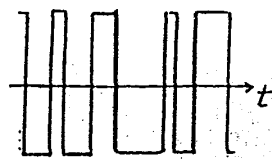
$$C(\tau) = a^2 \exp(-f_0 |\tau|)$$

・ ランダムステップ関数:

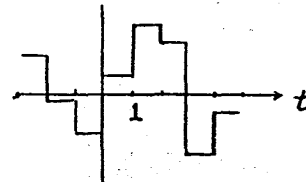
$$I(f) = a^2 (\sin(\pi f))^2 / 2$$

$$C(\tau) = a^2 (1 - |\tau|), \quad |\tau| < 1$$

$$= 0, \quad |\tau| > 1$$



(a)ポアソン矩形パルス、



(b)ランダムステップ関数

c 接線関数のスペクトル

2Dの曲線を表す関数として、 t を曲線沿った長さとするときに接線の角度 $\theta(t)$ を考えて、これを接線関数と呼ぶことにする。

たとえば、

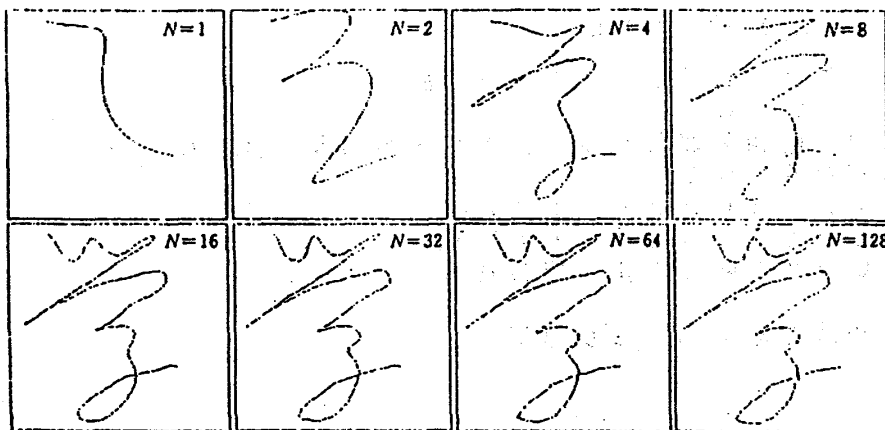
直線 : $\theta(t) = \text{Const.}$

円 : $\theta(t) = t/a$

対数螺旋: $\theta(t) = (\log t)/a$

のようになる。

接線関数のフーリエスペクトルについては、図のようなおもしろい例がある。まず、右下の曲線に付いて接線関数を求め、この接線関数の高い振動数の成分を切り捨てることによって、曲線を滑らかにする方法が得られる。



実質部分と空洞部分が入り交じった図形を考えると、境界の接線関数に対して

$$\theta_{\text{total}} = \int |d\theta|$$

$$\theta_{\text{net}} = \int d\theta$$

$$\rho = \theta_{\text{net}} / \theta_{\text{total}}$$

によって、結節分離度と呼ばれる量 ρ を定義することができる。これによって実質部分がどの程度'くっついて'いるかを判断できる。

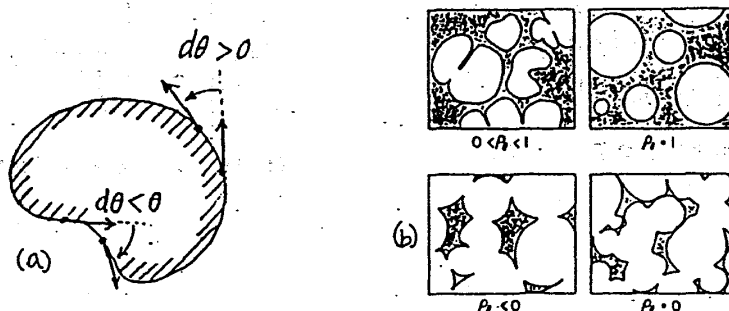


図2.4.3 (a) $d\theta$ の符号、(b) ρ の値と、実質部分の連結性¹²⁾

d 曲面関数のスペクトル

極座標 (r, θ, ϕ) で立体を表すために、曲面を $r = F(\theta, \phi)$ と書こう。この関数を球面調和関数で展開することが原理的には可能で、形を解析する上で有効な手段になっている。

曲面を球面調和関数で表す1つの興味ある例を紹介しよう。図のようにして液体中の界面に振動を起こさせて観察すると、外から励起する振動数によっては正多面体の対称性を持つ振動が観察される。これらは、正4面体を除いて、普通に球面調和関数で展開すると多数の項の和になってしまう。そこで軸を適当な角度に傾けて定義した座標で球面調和関数を書き表し、和をとると、比較的簡単な形で表示できる。

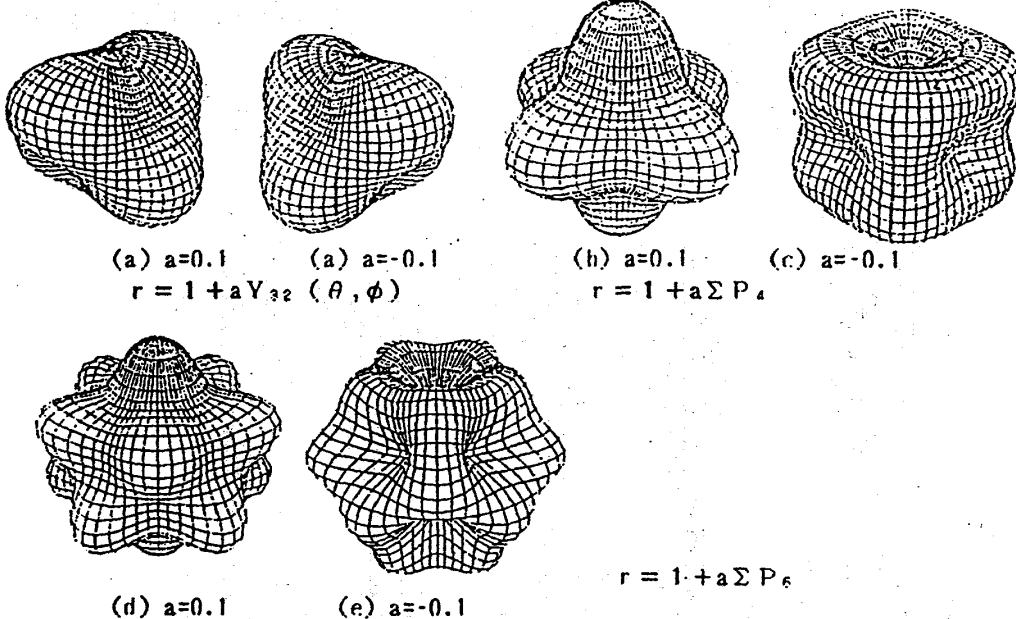
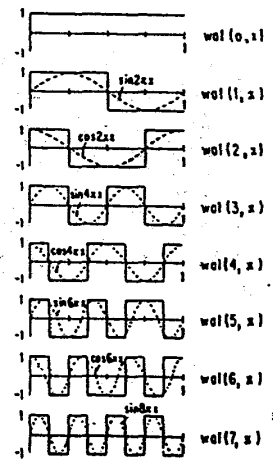


図2.4.4 球面調和関数による正多面体の対称性を持つ曲面の表現。

(a)正4面体、(b)正6面体、(c)正8面体、(d)正12面体、(e)正20面体

e. ウォルシュ関数

$f(x)$ を図のような関数の系 $wal(i, x)$ で展開したときの係数を a_i とすると、 $(a_i)^2$ は、ウォルシュスペクトルと呼ばれる。 $wal(i, x)$ は、 i 個の節を持つ関数になっている。



f. ウェイブレット解析

ウェイブレット関数 $w(x)$ を次の性質を満たすような関数とする。

・ $|d^q w / dx^q| < C_m (1 + |x|)^{-m}$, ($0 \leq q \leq r$; m, x 任意)

・ $Y_{j,k} = 2^{j/2} (2^j x - k)$ は、正規直交系をつくる。

$Y(x)$ としては、ガウス関数を2回微分したものなどが用いられる。ウェイブレット関数は、乱流の計測で得られた信号を解析するのに利用されている。

§ 2. 5 エントロピー

N 個の分子が箱の中にあるとき、それらのうち N_1 個が左、 N_2 個が右半分にある状態のエントロピーは、

$$W = N! / N_1! N_2!$$

$$S = k \log W$$

となる。一方、ランダムウォークで、 N 歩目に j にいる確率も、同様に

$$P_N(j) = W / 2^N \quad (j = N_2 - N_1)$$

となる。

同様にして、 $S = k \log W$ によって、パターンのエントロピーを定義する。

図の樹形の場合、距離 d だけ斜めに延び、距離 l だけ垂直に延びるというルールで描いた。 d, l は確率的に決める。ルールが固有のエントロピーを持つと考え、各ルールについて W を求めて S を計算した ($k = 1$ としている)。

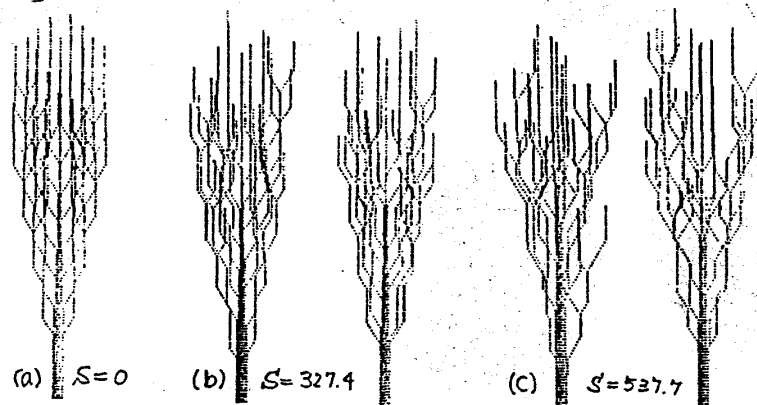


図2.5.1 樹形とエントロピー⁽⁴⁾ (a) $d=6, l=12$ 、(b) $4 \leq d \leq 8, 10 \leq l \leq 14$ (整数値のみの等確率)、(c) $0 \leq d \leq 12, 5 \leq l \leq 19$ (整数値のみの等確率)

ところで、分子の集合については、巨視的な量を決めたときに、エントロピーが与えられたが、樹形の場合、巨視的な量は何かがよくわからないという点で分子の集合と異なっている。

点配置のエントロピーの例としては、アモルファスの2Dモデルがある。

アモルファスの2次元モデル(コリンズ格子)

正3角形と正方形からなる2Dの格子を考える。1点の周りには、図のような配置が可能である。更に、1点の周りに正方形ばかり4つが集まる配置は考えないことにする。

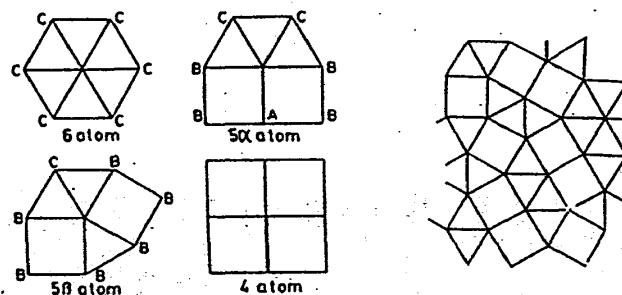


図3.1.6 コリンズ格子。(a)1点の周りの配置、(b)格子の1例。

$$N = N_6 + N_{5a} + N_{5b}$$

この時の、エントロピーを考える。

隣に何がくるか考えない場合には、

$$W = N! / (N_6! N_{5a}! N_{5b}!)$$

となる。更に、隣にあるものとの関係を考慮に入れる。

$$n_6 = N_6 / N, \quad n_{5a} = N_{5a} / N, \quad n_{5b} = N_{5b} / N$$

とする。たとえば、5 a - a t o m の A - s i t e には、5 a - a t o m しか入れない。

そのため、W は、 $n_{5a}^{(N_{5a}/2)}$ 倍だけ小さくなる。同様に、他の s i t e についても考えると

$$W = N! / N_{5a}! N_{5b}! N_6! \\ * n_{5a}^{N_{5a}/2} * (n_{5a} + n_{5b})^{(4N_{5a} + 6N_{5b})/2}$$

$$S = k_B \log W$$

となる。これは、シミュレーションによる結果にある程度合っている。ただし、このエントロピーの計算で、巨視的な量は n_{5a} と n_{5b} である。

エントロピーに関係した量として「秩序」がある。

* 秩序の定量化

白黒の玉を並べたとき、同じ色の玉が平均 x 個ずつ並ぶようにしたい。この x を 1 D 配列の秩序パラメーターと考える。



図2.5.3 1次元配列の秩序パラメーター x (~ 6)。

N 個の玉の間に仕切りを入れて、平均 x 個ずつになるように分けると考えると、

$$W = (1 + N/x)! / N! (N/x)!$$

$S = \log W$ として、具体的に計算すると、

$$S(x) = N \{ (1 + 1/x) \log (1 + 1/x) \\ + (1/x) \log (x) \}$$

$x \gg 1$ とすると

$$S(x) = N (1 + \log x) / x$$

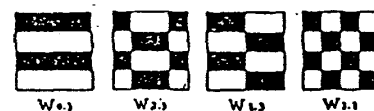
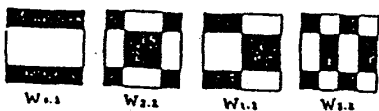
となる。従って、大ざっぱに入ってえんとお p y は、秩序の程度に反比例する。

* 対称性のエントロピー

対称性の高さを定量化した例がある。2次元パターンを2次元ウォルシュ関数で展開する

$$W_{mn}(x, y) = \text{wal}(m, x) \text{wal}(n, y)$$

$$f(x, y) = \sum a_{m,n} W_{mn}(x, y)$$



更に、上下、左右について、対称な成分と、反対称な成分を取り出す

$$p_{m,n} = (a_{m,n})^2 / K$$

$$K = \{ \sum \sum (a_{m,n})^2 \} - (a_{0,0})^2$$

$$P_1 = \sum (m = \text{even}, n = \text{odd}) p_{m,n}$$

$$P_2 = \sum (m = \text{even}, n = \text{even}) p_{m,n}$$

$$P_3 = \sum (m = \text{odd}, n = \text{odd}) p_{m,n}$$

$$P_4 = \sum (m = \text{odd}, n = \text{even}) p_{m,n}$$

この時、対称性のエントロピー（シンメトロピー） S_N が、

$$S_N = - \sum P_k \log_2 P_k$$

で定義される。 S_N が0だと、1種類の対称性しか含まない。 $S_N > 0$ の場合は、いくつかの対称性を重ねたものになり、それだけパターンは複雑になる。

§ 2. 6 フラクタル (<= fracture: 破片)

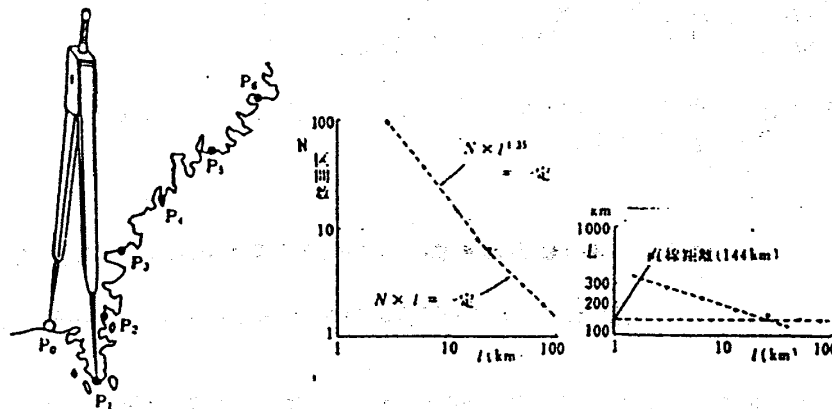


図2.6.1 三陸海岸の長さの測定

三陸海岸の海岸線の長さを物差しの長さを替えながら測ると、グラフのようになる。一般に、物差しの長さを r 、当てる回数を N 、フラクタルを次元 D とすると、

$$N = C / r^D$$

という関係が成り立つ。これから、三陸海岸の次元を求めると1.3程度になる。フラクタル次元の他の定義として、スケール r の要素をランダムに置いたとき、要素が図形の一部と重なる確率を P_r とすると

$$P_r = N / C r^D = C / r^{D-D}$$

となる。また、面積と周囲長の関係

$$P = C \cdot A^{D/2}$$

からも D を求めることもできる。

例えば、カントール集合（図）の場合は、

$$D = (\log N_1 / \log l_1) - (\log N_2 / \log l_2)$$

$$= \log 2 / \log 3 = 0.6309, \dots$$

となる。

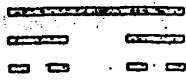


図2.6.2
カントールダスト

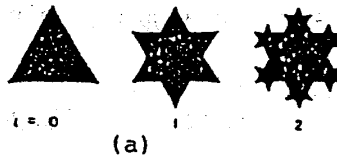


図2.6.3 コッホ曲線。

同様に、コッホ曲線の場合は、

$$D = \log 4 / \log 3 = 1.2618 \dots$$

になる。

時系列 data についても、フラクタル次元を
考えることができる。 $x(t)$ が、

$$|x(t+T) - x(t)| = O(T^H)$$

をみたすとき (White noise だと、 $H = 0$
連続関数だと、 $H = 1$)

H 次のヘルダー連続という。

この時、 $x(t)$ のグラフは、 $D = 2 - H$ というフラクタル
次元を持つことが示される。

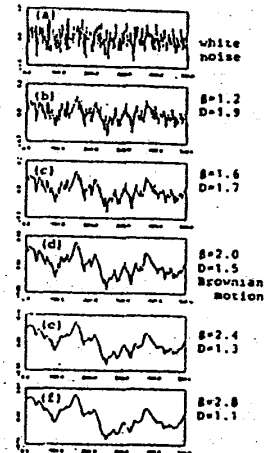


図2.6.4 乱雑信号

フラクタルに関しては、基礎的な方程式や法則からの導出が未解決であるという問題があるが、

図形 data の定量的記述

画像処理の手法 (異なる texture の分離)

CG の手法

等の利用価値がある。

渦度場の解析のように、連続的に変わる量に対してもフラクタルの解析をする方法が考えられている(マルチフラクタル)。2D乱流場へのマルチフラクタルの応用例を紹介しよう。

$\rho(x)$: '濃度' の場

に対して、 p_i を、サイズ l 、体積 v_i の細胞内で積分した値を、全領域の積分で割ったものとする。すなわち、

$$p_i = \frac{\int_{v_i} \rho(x) dx}{\int_v \rho(x) dx} \quad \sum p_i = 1$$

と定義する。更に、任意の q にたいして、 $Z(q)$ を

$$Z(q) = \sum p_i^q$$

と定義する。これは、分配関数に対応したものと考えられる。

$q = 0, 1$ については、

$$Z(1) = 1 \quad : \quad \text{規格化を表す。}$$

$$Z(0) = (\rho > 0 \text{ となる要素の数})$$

ここで、

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \log Z(q) / ((q-1) \log l)$$

によって一般化次元を定義する。 $q = 0$ の場合には、これは、 $\rho > 0$ の部分の次元を表す。

また、常に $\rho > 0$ ならば、

$$D_{q \rightarrow 0} = d \quad : \quad \text{空間次元}$$

である。

$q = 1$ の場合には、

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln Z(q)}{(q-1) \ln l} &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln \sum p_i^q}{(q-1) \ln l} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dq} \ln \sum e^{q \ln p_i}}{\ln l} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sum \ln p_i e^{q \ln p_i}}{\sum p_i^q \ln l} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln l} \end{aligned}$$

これは、情報エントロピーに対応する。

$\rho(x)$ が白黒パターンの場合、その全サイズを L 、フラクタル次元を D 、細胞のサイズを l とすると、

黒が占める細胞数は、 $N = (L/l)^D$ 、 $p_i = 1/N$ であることを用いると、

$$Z(q) = \sum 1^q = N 1^q \propto l^{Dq-D}$$

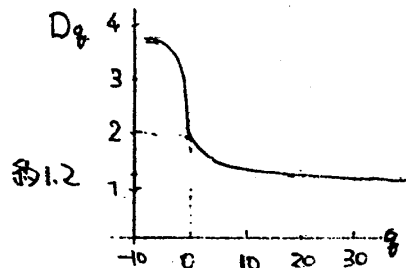
$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \log(A l^{Dq-D}) / (q-1) \log l$$

$$= D(q-1) \log l + \log A / (q-1) \log l$$

$$\rightarrow D$$

となり、一般化次元は q によらず、フラクタル次元に一致する。濃淡パターン一般の場合には、 q が大きくなると、濃いところだけを拾い出して見ていることになる。

2Dの乱流場の数値シミュレーションの結果に応用した例によると、乱流場の D_q は、グラフのようになっている。

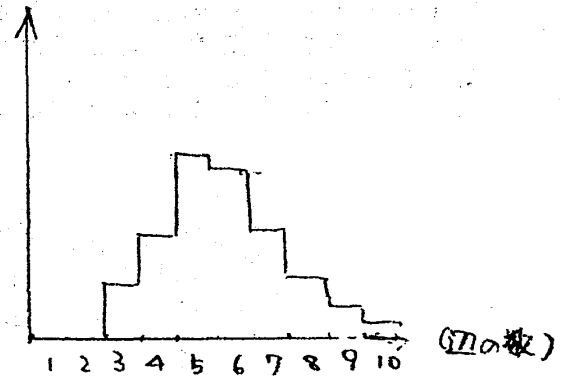


§ 2. 7 空間の性質と幾何統計

2次元空間に点の分布が与えられたとき、それらの点の間の垂直二等分線によって空間を分割することができる。この空間

分割をボロノイ分割という。

ランダムに分布した点（ポアソン分布という）に対してボロノイ分割を行うときにできる多角形の分布はグラフのようになり、辺の数の平均はだいたい6である。



実際に分布している点の間には相互作用が働くのである（たとえば鳥の巣の縄張りのように）全くのランダムな分布というのは起こりにくい。そこで、相互作用の効果を考えるために、次のようなモデルが考えられている。（調節モデル）

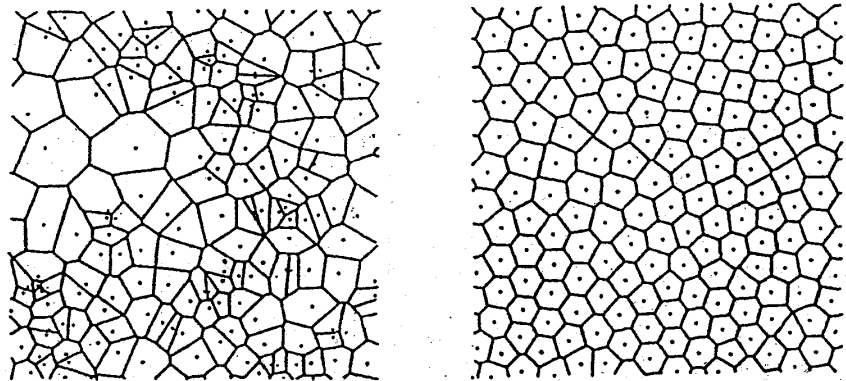


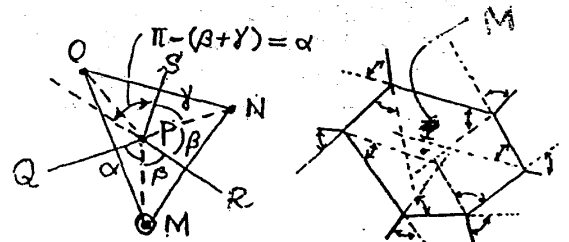
図3.1.1 ボロノイ分割の例。(a)乱雑な点配置、(b)調節モデルによる再配置。（文献 1）より）

左側の図のように点とボロノイ分割による多角形があるとする。この時、各点を多角形の重心の方向へ少し移動させるという手続きを収束するまで繰り返す。このようにして、相互作用の効果を計算することができるが、こうして得られた右側の図はベナール対流のパターンによく似ていることに注意しよう。

与えられた多角形による空間分割がボロノイ分割かどうかを調べるには、次のようにすればよい。

左側の図のように、多角形の一つの頂点P 辺PR を延長する。他の辺PS との角は、 $\angle QPM (= \alpha)$ と等しいことが証明できる。そこで、右側の図のように、多角形の角頂点から辺の延長をつくる、それと外側の辺との角度と等しい角度をつくって、各頂点から内側に向かって線を延ばす。もしこの多角形がボロノイ分割によって得られたものであれば各頂点からの線は一点で交わるはずである。

自然界にみられる形では、生物の細胞の形や樹木の勢力範囲などがボロノイ分割に近い形をしている。



3Dでボロノイ分割を行うと多面体が得られる。球をぎっしり詰めたときにできる配置（六方最密充填、面心立方格子）に対するボロノイ多面体は、それぞれ図のような12面体になる。また、同体積の泡が集まって界面の面積が最小になるようにする形はケルビンの14面体と呼ばれる形である。

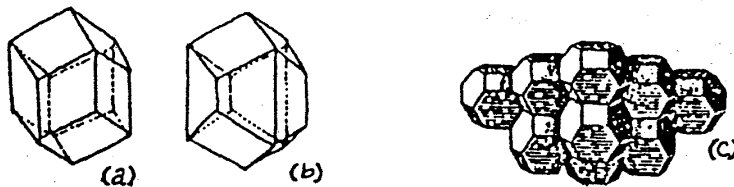
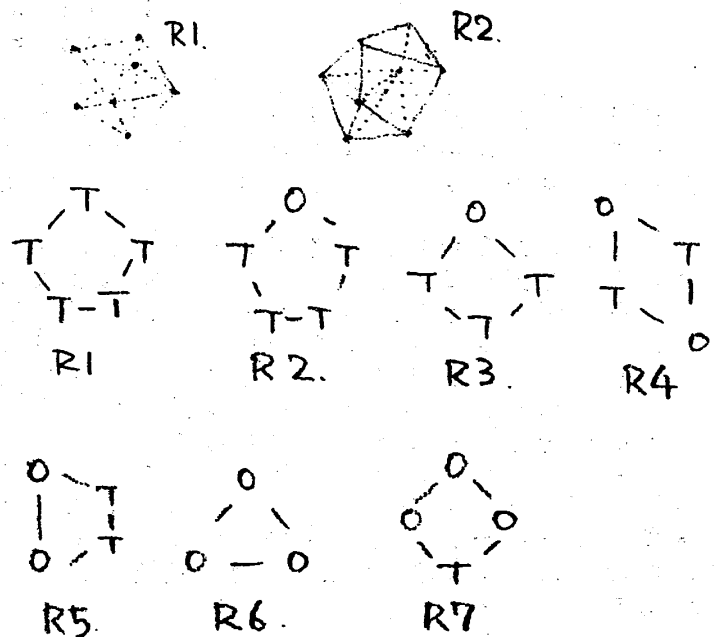


図3.1.4 (a)菱形十二面体、(b)十二面体、(c)ケルビンの十四面体

不規則な点配置に対する多面体の面の数の分布は、平均として15.54となり最密充填の面数とは一致しない。また、液体の分子配置については、10から16面体にわたって分布している。

ボロノイ分割に関連した話としては、ドローネ網がある。ボロノイ分割において、線をはさんで向かい合う点同士を線で結ぶことによってネットワークが得られる。これはある意味で最近接同士を結んでできるネットワークと考えられ、点同士が近接しているかどうかの判断に使うことができる。なおボロノイ分割は、もともと結晶学で考えられた概念（ウィグナー＝ザイツセル）である。

アモルファスも、空間分割に関連している。3次元のアモルファスのモデルとして、空間を正8面体と正4面体によって敷き詰めることが考えられている。ある軸の回りにこれら2種類の立体をいろいろな配置をした場合、角度の歪みは図のようになる。これらの配置の歪みを小さくすることによって、アモルファスをシミュレートする試みがある。



歪を $\Delta(i)$ と表すと、

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= 7.5^\circ, \quad \Delta(2) = 31.5^\circ, \quad \Delta(3) = -39^\circ, \\ \Delta(4) &= \Delta(5) = 0, \quad \Delta(6) = -31.5^\circ, \quad \Delta(7) = 39^\circ. \end{aligned}$$

一意的で規則的な配置ではあるが、周期的ではないという性質を持つものを準結晶という。1次元の配列によって理解するために、たとえば

S --> L
L --> L S

と置き換えるという手続きを繰り返して得られる配列は、そのような性質を持つ。Sから出発すると、この置き換えによって、

S, L, L S, L S L, L S L L S, . . . , L S L L S L L S L L S L L S L L S L, . . .

という配列が得られる。この1次元の配列は、2次元の正方格子上の周期的な点配列を、図のような直線に投影した場合に生じることがわかる。

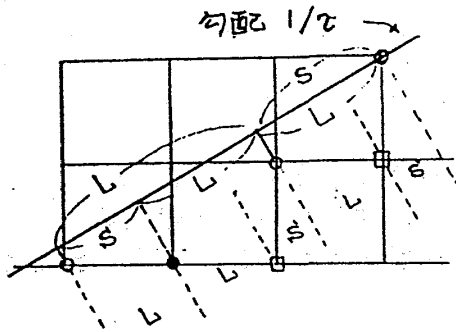
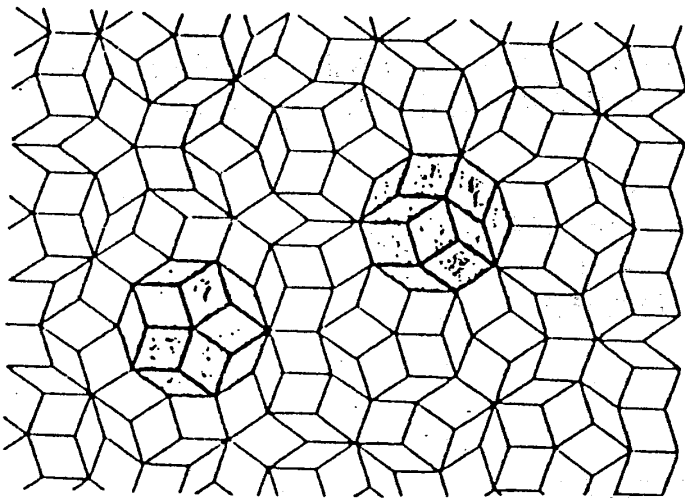


図3.1.7 2次元正方格子からの射影

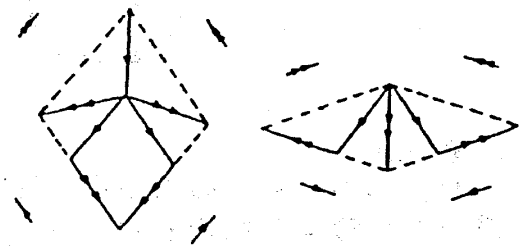
$\tau \approx 1.618$ (黄金分割比)

2D空間に於ける準結晶では、ペンローズパターンが有名である。この場合にも、3Dの周期的な配置を射影したものになっていることが示されている。3D空間の準結晶も、1984年にAl-Mn合金系で見つかっている。これももっと高次の空間での規則的配置の射影になっていると考えられるが、4Dからの射影であるという説と、6Dからの射影と考える説がある様だ。



ペンローズパターン の図

下の基本タイルを、矢印を合わせてつないでいくと、ペンローズパターンが得られる



第3章 成長形の解析

一般に、熱的非平衡状態でできる形が成長形であり、熱的平衡状態で現れる安定な形が平衡形である。例えば 雪の結晶は成長形である。成長形には、結晶成長、粘性突起(viscous finger)、DLA等がある。それらの共通点に注目しながら順に説明する。

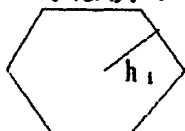
§3.1 結晶成長

参考書 黒田登志雄：結晶成長のモルフォロジー，固体物理 16(1981) 63-74

大川章哉：結晶成長，裳華房

J. S. Langer：Rev Mod Phys 52(1980) 1-28

平衡形については次のウルフの定理が成り立つ。



飽和溶液を考え、

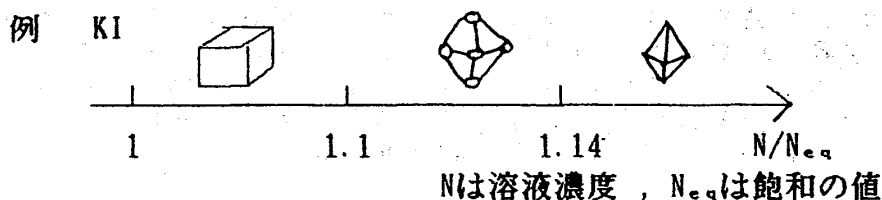
界面張力係数(向きによる)を γ_i とすると

$\gamma_i/h_i = \text{一定}$ が成り立つ。(説明略)

結晶成長のタイプを考えると、晶相、晶癖、形態安定性を区別しなければならない。

晶相

現れる立体の種類を表す。



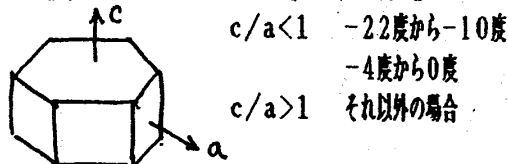
晶癖

水蒸気圧、温度による結晶面の成長速度の違いによって現れる形の区別を表す。たとえば雪の場合、晶相としては皆六角柱だが、縦横の成長の比が違うのである。

これは小林ダイアグラムであらわされる。

温度によって晶癖が決まっていると考えればよい

例 雪の単結晶



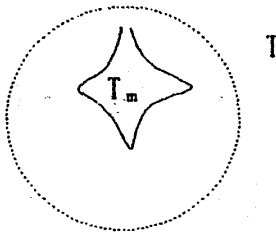
形態安定性

同じ晶癖でもなめらかな六角板と樹脂状六角板の違いが形態安定性の差から生じる。過飽和度が高いと成長が早いから、中心から遠い部分の方が成長が早い。その程度によって、樹枝、コップ状のような形が現れる。

等方性結晶の成長

界面張力係数は方向によらず、一定とする。この場合はある程度の数学的な解析が可能である。

等方性のために原理的には球状に成長しうる。この球形が安定かどうかを考えてみよう。



$$T_m < T$$

図からわかるように、
他よりも成長した部分が
より強い過飽和にさらされるのでさらに成長するた
め必然的に球形からずれる。従って、球形は常に不安
定である。

基礎方程式のセットを考えよう。温度を $T(x, y, z, t)$ とする。

k を外側の熱伝導率、 k' を内側の熱伝導率、 C_p, C_p' をそれぞれの定圧比熱とすると、

$$\text{Liq. } D \nabla^2 T = \partial T / \partial t$$

$$D = k / \rho C_p \quad \text{温度拡散率}$$

$$\text{Sol. } D' \nabla^2 T = \partial T / \partial t$$

$$D' = k' / \rho' C_p' \quad \text{温度拡散率}$$

ただし対流は考えない。

成長の速さを v_m とし、潜熱を L (J/m^3) とする。界面での熱の移動を考えると次の境界条件が成り立つ。

$$L v_m = [D' C_p' (\nabla T)_{\text{sol}} - D C_p (\nabla T)_{\text{liq}}] \cdot n$$

$$T_{\text{int}} = T_m (1 - \gamma K / L) \quad \text{Gibbs-Thomsonの関係式}$$

ただし、 T_m は界面が平面の場合の融点、 γ は界面エネルギー、 K は固体の部分が凸の時正となるように定義された曲率である。

立体の場合は、直交する2つの曲率半径を r_1, r_2 とすると $K = 1/r_1 + 1/r_2$

たとえば、左図の場合は界面エネルギーの影響で固体が解けようとして融点が低くなると考えるわけである。



無次元化によって方程式を簡単化する

$$\text{Liq. } u = \frac{T - T_m}{(L/C_p)_{\text{Liq}}} \quad (\text{Sol. については、} C_p \text{ を } C_p' \text{ とする。})$$

とにおいて

$$D \nabla^2 u = \partial u / \partial t \quad (\text{Sol. については、} D \text{ を } D' \text{ とする。})$$

境界条件

$$v_m = D [\beta (\nabla u)_{\text{sol}} - (\nabla u)_{\text{liq}}] \cdot n$$

$$\beta = D' C_p' / D C_p$$

$$(u)_{\text{int}} = -d_0 K$$

ただし、 $d_0 = \gamma T_m C_p / L^2 \sim 1 \text{ \AA}$ (水の場合)

これら基礎方程式解として、平面のまま移動する場合を考える。

移動の速さを v とすると、 $\partial / \partial t = -v \partial / \partial z$ なので

$$\text{Liq. } \nabla^2 u + \frac{2}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{2}{l} = \frac{v}{D} \quad (l \text{ は拡散距離})$$

$$\text{Sol} \quad \nabla^2 u + \frac{2}{l} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{2}{l} = \frac{v}{D}$$

平面的な成長の場合 $\nabla^2 \rightarrow (d/dz)^2$ と置き換えられるから、 $du/dz = f$ において、

$$\frac{df}{dz} + \frac{2}{l} f = 0 \quad \text{から} \quad f = A \exp(-2z/l).$$

ゆえに、

$$u = -\frac{lA}{2} \exp(-\frac{2}{l}z) + B$$

$$u_{sol} = -\frac{l'A'}{2} \exp(-\frac{2}{l}z) + B'$$

これらに対して境界条件、 $z \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow u(\infty) : \text{const.}$ 、 $z \rightarrow -\infty$ で $u_{sol} \rightarrow 0$ を仮定すると、

$z \rightarrow -\infty$ の境界条件から $A' = 0$ 、 $B' = 0$ となる。これから $u_{int} = 0$ となり、さらに、

$$u(0) = -lA/2 + B = 0$$

$$v = 2D/l = D[\beta(\frac{\partial u}{\partial z})_{sol} - \frac{\partial u}{\partial z}] = -DA$$

から、 $B = -1$ 、 $lA = -2$ となる。結局、

$$u(z) = \exp(-\frac{2}{l}z) - 1$$

すなわち、平面のまま成長するのは $u(\infty) = -1$ の時のみである。

この平面を保ちながら成長する面が安定かどうか考える。そのために、 y 方向に周期的に変化する摂動を与えて、振幅の成長を調べてみる。摂動の成長を $\xi(y, t) = \xi_0 \exp(iqy + \omega t)$ とする。

$$u(liq) = \exp(-2z/l) - 1 + u_0 \exp(iqy - pz + \omega t)$$

$$u(sol) = 0 + u_0' \exp(iqy + p'z + \omega t)$$

これらの式を基礎方程式に代入し、自明な解 ($\xi_0 = u_0 = u_0' = 0$) 以外の解が存在する条件を求める。多少の計算の後、摂動の成長速度に対して、

$$\omega = v(p - 2/l) - D(p + \beta p') d_0 q^2$$

を得る。

ω が + なら不安定、 ω が - なら安定である。

ここで、つぎの2つの近似を行う。

(1) 準定常 つまり、 $\partial/\partial t \sim -v\partial/\partial z$ とする。これからとくに拡散方程式は、

$$D(\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial y^2)u(liq) = -v\partial u/\partial z$$

$$D(\partial^2/\partial z^2 + \partial^2/\partial y^2)u(sol) = -v\partial u/\partial z$$

となり、上の式を代入することにより、

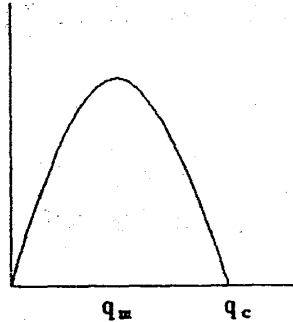
$$-2p/l + p^2 - q^2 = 0$$

$$-2p'/l + p'^2 - q^2 = 0$$

(2) 拡散距離 l が波長 $2\pi/q$ よりはるかに大きい。

このとき、 $p' \sim q$, $p \sim q$, $p - 2/l \sim q$ となる。これを用いると、自明でない解が存在するのは、

$$\omega = v q [1 - (\beta + 1) d_0 l q / 2]$$



ω と q の関係は図に示したとうりである。

q の限界 q_c は

$$q_c = 1 / \sqrt{\{(1 + \beta) l d_0 / 2\}}$$

である。

実験データを用いると、

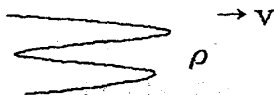
$$\lambda_c = 2\pi / q_c \sim 0.1 \mu$$

ω が最大値をとる q_m は

$$q_m = q_c / \sqrt{3} \text{ である。}$$

l に成長速度が絡んでいるから q_c の値は実験から求めなければならない。

λ が 1μ よりも小さいと成長は抑えられるが、 1μ よりも大きいと成長して、結局平面は不安定になる。



成長して、先端が曲率半径 ρ の突起になったとしよう。その突起の進行速度 v と ρ とは、 $v\rho = \text{一定}$ という関係があることが示される。

一方、樹脂状結晶については、側枝の発達が問題となる。

数値実験によれば、先端の曲率半径が ρ 進行速度が v の時、

$$2 d_0 D / \rho^2 v < 0.025 \quad \text{不安定}$$

$$2 d_0 D / \rho^2 v > 0.025 \quad \text{安定}$$

実験では 0.0195 が臨界条件になっている。

以上をまとめると、平面が不安定になって波がたち、枝の先端では曲率によって成長速度が決まる。さらに条件によっては側枝が発達する。

ここでは非線形効果と対流の効果を無視した。現実の結晶の形を決める式はまだ無い。

§3.2 粘性突起(viscous finger)

これは、Saffman Taylor 不安定性として昔から知られている。狭い平板間(間隔)の粘性流体中を、気泡が突起状に成長する不安定である。

Proc. Roy. Soc. London A245(1958), 312-329

D. Bensimon et. al.: Viscous flows in Two-dimension Rev. Mod. Phys. 58(1986)977-999

基礎方程式は、ナビエストークス方程式

$$\rho D u / D t = -\nabla p + \mu \nabla^2 u$$

および、非圧縮の場合を考えて、

$$\nabla u = 0$$

である。さらに以下の2つの仮定を置く。

(1) $Re = Ub/\nu$ が1にくらべて小さい場合を考える。このとき、基礎方程式は、

$$\nabla p = \mu \nabla^2 u \quad \text{Stokes equation}$$

となり、 $\nabla u = 0$ を使うと、圧力は調和関数であることがわかる。

$$\nabla^2 p = 0$$

(2) 板の間隔はとても狭くて、局所的には平面ポアズイユ流であり、その方向は $-\nabla p$ の方向を向いている。このとき、

$$u = \nabla p (A - B y^2) \quad \text{と書ける。}$$

A, Bは、Stoks方程式と、境界条件 $u(+b/2) = u(-b/2) = 0$ から決められる。この流れはヘレシヨウ流と呼ばれる。

$$p \quad u = -\nabla \frac{b^2}{8\mu} \left(1 - \frac{y^2}{b^2/4} \right)$$

気泡の運動に付いて考える時は流体分布の y 方向平均をとって、2次元の問題にしてよい。

$$u = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} u \, dy$$

$$= -\nabla p (b^2/12\mu)$$

ここで $b^2/12\mu$ は浸透係数(perpriability)と呼ばれる。 u は圧力勾配の方向を向いているので、境界の位置、及び圧力分布は、圧力について議論すれば大体事足りる。

泡と液体の境界が直線で、速さ U の場合、

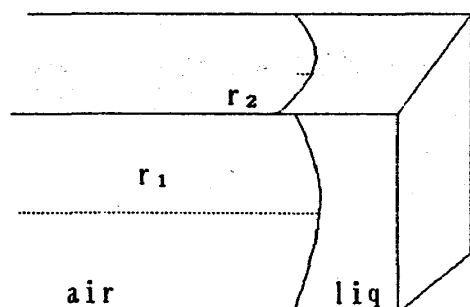
$$x = x(t) = Ut$$

$$p_{air} = p$$

$$p_{liq} = p_0' - \frac{U}{b^2/12\mu} (x - Ut)$$

と書ける。 p_0, p_0' はそれぞれ境界での圧力である。

表面張力を考慮すると、 p_0 と p_0' の差が決まる。すなわち、



ところで、Saffman&Taylorは r_1 として泡の境界を平板投影したときの曲率半径、及び

$$\gamma (1/r_1 + 1/r_2) = p_{air} - p_{liq}$$

$r_2 = b/2$ を用いた。

しかし、これは正しくないことが、C.W.Parks & G.M.Homsy : J.F.M 139(1984), 291-308 によって示された。正しい式は、

$$p_0 - p_0' = \frac{\gamma}{b/2} + \frac{\pi}{4} \gamma \frac{1}{r_1} + \dots$$

のようになる。

さて、結晶成長の場合と同じように、直線的な境界の安定性を調べよう。基底状態は、

$$X = Ut, \quad r_1 = \infty \text{ として、 } p_0 - p_0' = \gamma / (b/2) \text{ である。}$$

境界の形として、 y 方向に周期的な波を考え、

$$x(y, t) = Ut + A(t) \cos qy$$

という摂動を考える。

すると、圧力分布は次のようになる。

$$p_{air} = p_0$$

$$p_{liq} = p_0' - \frac{U}{b^2/12\mu} (x - Ut) + B(x - Ut, t) \cos qy$$

$\nabla^2 p = 0$ から $B = B(t) \exp(-q(x - Ut))$ となる。これと境界条件から、

$$\dot{A} = q k B, \quad k = b^2 / 12 \mu$$

$$B = \frac{U A}{k} - \frac{\pi}{4} \gamma A q^2$$

が求まる。Bを消去すると、

$$\dot{A} = A \left[\frac{U}{k} - \frac{\pi}{4} \gamma q^2 \right] q k$$

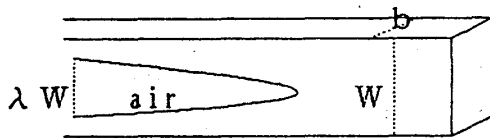
よって、Aが自明でないためには、

$$A = A_0 \exp(\omega t)$$

$$\omega = \left[\frac{U}{k} - \frac{\pi}{4} \gamma q^2 \right] q k$$

が必要である。

振幅が大きくなるとその枝の様子はまだ解析されていない。一方、チャンネルが狭く、1つだけ突起があるような場合は次のような定常解がSaffmanらによって求められている。



$$\frac{x}{W} = \frac{1-\lambda}{\pi} \ln \left(\cos \frac{\pi y}{\lambda W} \right)$$

突起が樹脂状に発達する過程は観察によると、次の3つの過程の繰り返しになっている。

早く前にでた突起が伸びて他を抑える(Shielding)

次にそれがひろがる(Spreading)

先が不安定化して分離する(Splitting)

これらの流体力学的な解析は、まだ未解決である。

§ 3.3 DLA (Diffusion Limited Aggregation)

ブラウン運動によって拡散してきた粒子が、ある「種」に付着して、そのために凝集体が成長する過程を考える。そのとき、もし枝が伸びていたら、外側の枝にさきによつかる事が多いので、枝がどんどんのびて行く。つまり、Shielding現象がみられる。DLAと粘性突起の現象はよく似ている(とくに数学的構造)。ただし粘性突起の場合と違って、spreadingはおきない。その違いは、表面張力の有無からくる。粘性流体でも、界面張力がないとDLAと同じ不安定性を持つはずである。

前節と同じように、DLAによる凝集が円形に発達する場合をまず考え、次にその安定性を考察しよう。基礎方程式は、拡散場 u について、

$$\partial u / \partial t = D \nabla^2 u$$

境界条件は、凝集体表面で、

$$\textcircled{1} \quad u = 0$$

$$\textcircled{2} \quad V_n = D (\mathbf{n} \cdot \nabla u)$$

である。ただし、 V_n は表面の移動速度である。

円形に成長する基本状態を $r = R(t)$ と表す。

準定常と仮定すると

$$u = a \log r + C$$

境界条件①より

$$(u)_{r=R} = a \log R + C = 0 \quad \text{であり}$$

$$u = a \log \{r/R(t)\}$$

境界条件②より

$$\dot{R} = D(a/R) \quad \text{、これから} \quad R = 2Da t$$

次に、摂動を受けた境界の形を

$$r = R(t) + \delta_m(t) \cos m\theta$$

とすると、定常拡散方程式の解は

$$u = a \log(r/R) + C_m \cos m\theta / r^m$$

となる。線形安定理論の範囲を考えているので δ_m , C_m は微小とする。

$$(u)_{r=R+\delta_m \cos m\theta} = 0$$

これから

$$a(\log(R + \delta_m \cos m\theta)/R) + C_m \cos m\theta / (R + \delta_m \cos m\theta)^m = 0$$

となり、簡単化して、

$$a\delta_m \cos m\theta / R + C_m \cos m\theta / R^m = 0$$

となる。また、境界条件②から

$$\begin{aligned} v_m &= dr/dt = \dot{R} + \dot{\delta}_m \cos m\theta \\ &= [Da/r - mC_m \cos m\theta / r^{m+1}]_{r=R+\delta_m \cos m\theta} \end{aligned}$$

以上より

$$\dot{\delta}_m = D(m-1)\delta_m a/R^2 = (\dot{\delta}_m \dot{R}/R)(m-1)$$

が求められる。すなわち、

$$\frac{\dot{\delta}_m / \delta_m}{\dot{R} / R} = m - 1$$

である。 $m > 2$ ならば $\dot{\delta}_m / \delta_m > \dot{R} / R$ となる。この関係式は3つ以上枝が伸びるような摂動に対しては、円形凝集体のサイズの成長よりも摂動の成長の方が速いことを意味する。すなわち凝集体は決して円形に留まらず、必ず変形していくつかの枝を発達させるのである。

以上の3節の内容から、結晶成長、粘性突起、DLAには共通点が多いことがわかる。

§ 3. 4 コロイドの凝集

以下の2節では、ランダムな凝集・合併プロセスの例として、ゲル中のコロイドの凝集、および混合層における渦列を考察する。特に、凝集体間、あるいは渦間距離の対数正規分布について述べる。

ゲル中のコロイドの分布の実験については、S.Kai and S.C.Müller : Science on Form 1 (1984) 9-39 に解説されている。実験においては、 PbI_2 in agar gel (寒天) を対象としている。手法としては、agar gel を 95°C で解かして、 $4.8\sim 6.6 \text{ mMol PbI}_2$ を解かす。これを 22°C に冷やすと、 PbI_2 が凝集してくる。観察の結果によると、コロイドの粒子間および structure 間の距離の分布は、ほぼ 対数正規 (log-normal) の分布になっていることがわかった。

ここで、正規分布と対数正規分布について説明しておこう。

正規分布

初め $x = x_0$ にいた粒子が、酔歩 (ランダムウォーク) を行う、すなわち $x \rightarrow x \pm a$ というステップでランダムに移動を繰り返すとき、原点からの距離を x とすると、 N ステップ後の粒子の存在確率 $p(x)$ は、 N が大きくなるにつれて正規分布

$$p(x)dx = C \exp[-(x-x_0)^2/2\sigma^2]dx$$

に近づく。

対数正規分布

同様の酔歩であるが、ただし移動距離が $\pm a$ になっているのではなく、 $x > 0$ の範囲で、 x が a 倍、あるいは $1/a$ 倍になるとしよう。

$$x \rightarrow ax \text{ or } x/a \quad \text{i.e.} \quad \log x \rightarrow \log x \pm \log a$$

x がこのようなルールでランダムな移動を繰り返すとき、 N ステップ後の粒子の位置の対数 $\log x$ は、 N が大きくなるにつれて、対数正規分布

$$p(\log x)d(\log x) = C \exp[-(\log x - \log x_0)^2/2\sigma^2]d(\log x)$$

に近づく。または、確率変数を x にもどすと、

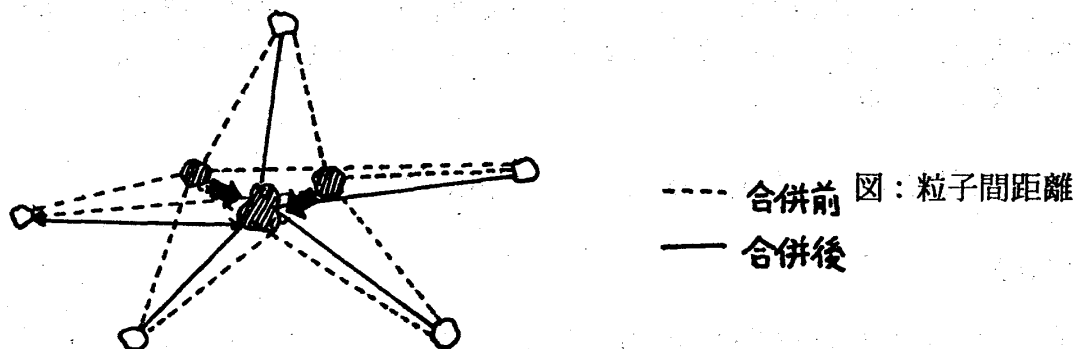
$$p^*(x)dx = Cx^{-1} \exp[-(\log x - \log x_0)^2/2\sigma^2]dx$$

に近づく。

凝集体間隔が対数正規分布になることに対して、物理的解釈を試みよう。ただし、なぜ対数正規分布になるのかについての確立した理論は現在無い。ここでは、定性的な議論にとどめることにする。

系内のある粒子対間の距離を x とし、これを系内のすべての近接粒子対について平均したものを $\langle x \rangle$ とする。この時、この距離 x を $\langle x \rangle$ で規格化したものの分布を考える。

凝集体が一回合併することによって、粒子間の距離がどう変わるか考えてみよう。粒子間の距離は、合併した粒子と他の粒子の間では増加し、それ以外の対の間では変わらない。その粒子対の距離増加の割合を a としよう、すなわち一回の合併につき、合併した粒子との距離が $x \rightarrow ax$ となるとする。もちろん実際には、 a の値は相手の粒子によって異なっているが、ここでは定性的な議論をしているので、代表的な値をひとつだけ採用している。



この合併にともなって、粒子間の平均距離 $\langle x \rangle$ も増加する。しかし距離の増加した対の総数は、系全体の対の総数に比べてはるかに少ないので、粒子間距離の系全体の平均値の増加の割合は a に比べて十分に小さい。この時、平均距離の増加の割合が $(1 + \varepsilon)$ 倍であるとして、凝集後の距離 x' を

$$\langle x' \rangle = (1 + \varepsilon) \langle x \rangle$$

によって再規格化しよう。すると、規格化された分布において、合併した粒子と他の粒子との距離は $a/(1 + \varepsilon)$ 倍になり、それ以外の対の距離は $1/(1 + \varepsilon)$ 倍になる。したがって、 x' の対数を取ると

$$\begin{aligned} \log x' &= \log x + \log a - \log(1 + \varepsilon) && \text{合併粒子との対} \\ &= \log x - \log(1 + \varepsilon) && \text{それ以外の対} \end{aligned}$$

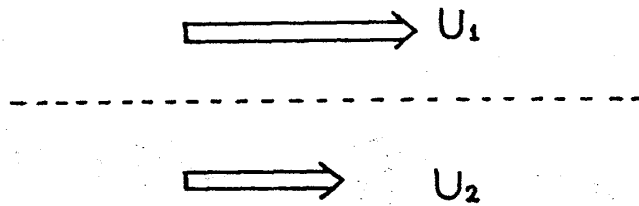
である。以上のように、1回の合併に対応する酔歩は、 $\log x = 0$ に対して左右非対称な過程となる。

これをある粒子対の一回合併に対する距離の変化の確率分布であると考え、それを無限個重ね合わせると、中心極限定理により $\sum \log x'$ の分布は正規分布に近づく。したがって、 x の分布は対数正規分布に近づくと考えられる。

以上より、凝集体間の距離が対数正規分布に従うということには、凝集体の合併のステップが、各粒子対に対してランダムに生じていることが反映されていると考えられる。

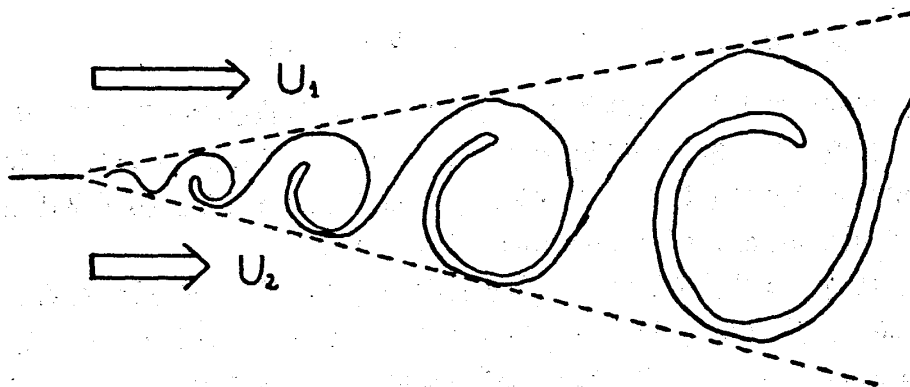
§ 3. 5 合併する渦群

異なる速度を持つ二つの定常流の層の接触面を考えよう。この面は、ずれ層、あるいは剪断層と呼ばれる。



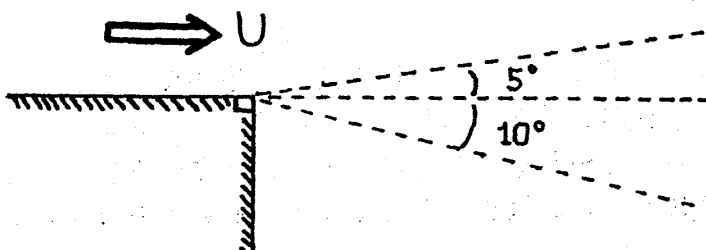
図：二つの流体層

透明な流体に対する可視化の工夫として、異なる密度を持つ二つの流体を用い、屈折率の差を用いてスクリーンに写る影を見る、という手段がある。別の方法として、上流側で染料を流しこんでよい。いずれにしても、二つの流体が出逢う下流側では、一列に並んだ渦群が生じ、渦のサイズが下流ほど大きくなっているの、境界が楔状に拡がっているのが観測される。この境界の領域を混合層と呼ぶ。



図：混合層(1)

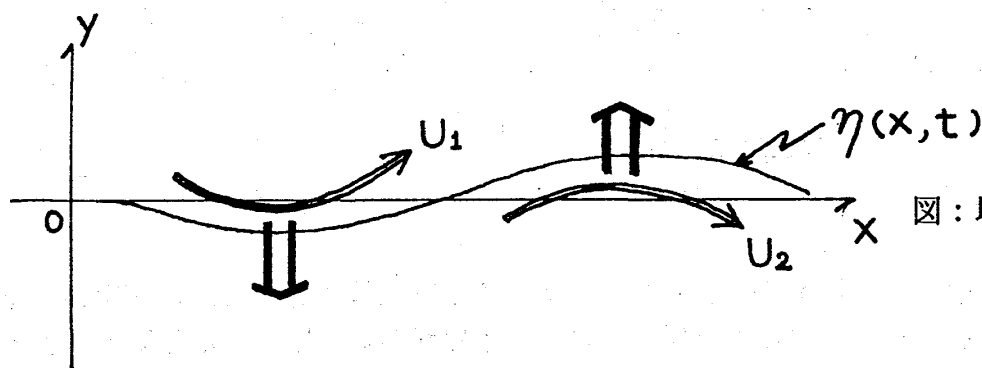
楔状の領域の拡がり、片方の流れの速度が0の場合上に5度、下に10度ということが経験的に知られていた。(Landau and Lifshits "Fluid Mechanics" (Pergamon 1959)) しかし、その広がり方のしくみが明らかになったのは、ほんの20年くらい前である。観察によれば、ずれ層は、波打ってきて、巻き上がりによって渦の列が現われ、さらに渦は流れながら合併していく。(Brown and Roshko J. Fluid Mech. 64, 775 (1974))



図：混合層(2)

まず、これらの混合層形成過程について、順に説明する。

もしも流体間に粘性やゆらぎが存在しない場合、完全に平行な二つの流体層は互いに滑り合うだけで、渦を生じることはない。しかし、一般に流体にはゆらぎが存在するので、それが増大し、二つの流体の境界は安定には存在しなくなり、その結果として境界に渦を生じる。この不安定性は、直観的には、境界にある波長の微小な波が生じたとき、その波に添って流体の遠心力が波の振幅を増加させる方向に生じるために起こる。



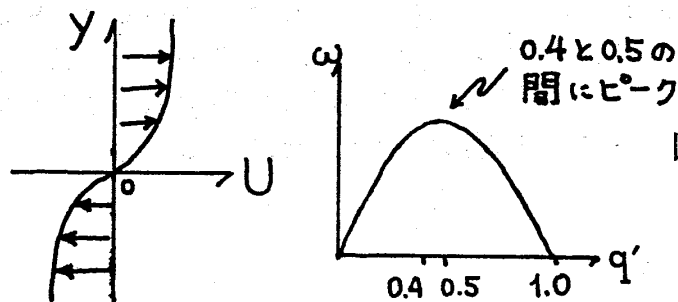
図：境界の不安定性

具体的には、境界が無限小の厚さを持つとし、そこに

$$y = \eta(x, t) = A \exp[i k x + \omega t]$$

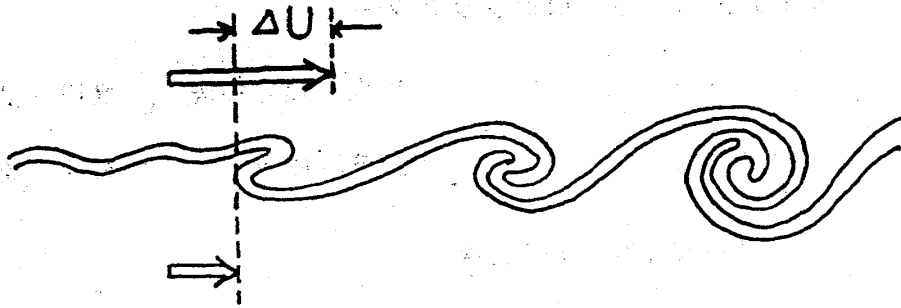
で表される微小な波が立ったとして（線形不安定性）、 ω の値を調べる。二つの流体の流速の平均を ΔU と置くと、解析の結果 $\omega = \pm \frac{1}{2} k \Delta U$ となる。 $\omega > 0$ となる解を含んでいるので、ずれ層は波打ちに対して不安定であることが言える。(G.K. Batchelor "Introduction to Fluid Dynamics" (Cambridge 1967) Ch.7)

しかし、実際のずれ層には粘性の影響で、必ず有限の厚さ (H とする) がある。ずれ層の厚さ $H \neq 0$ の時、速度分布が $U = U_0 \tanh(y/H)$ で与えられるとして、粘性が存在しない場合の理論解析の結果、不安定な波の成長速度 ω はおよそ下の図ようになる。(Bechor and Criminale (Academic Press 1967))



図：速度分布と不安定波の成長速度 ω
 $q' = q H$ は、規格化された波数

これより $q' \sim \frac{1}{2}$ のモード、すなわち波長 $\lambda \sim 1.2 H$ の波が一番成長しやすい。いかえるとずれ層の厚さのおよそ10倍程度の波が立ちやすいということになる。ただし、これは線形安定性での話なので、不安定な波が成長していくとこの式は成り立たなくなる。さきに述べたように、実際には、発達した波は巻き上がりによって渦列を形成する。



図：波の発達と渦列

さて、こうして形成された渦列中の渦の間隔の分布を取ると、対数正規分布に近くなることが観察された。(Bernal) これより、渦の合併の現象も、凝集体の合併と同じくランダムなプロセスの結果として起こっていると考えられる。

渦どうしの間隔を x で表し、その平均値を $\langle x \rangle$ とする。一つの渦対の合併によって、その両側の間隔は約 1.5 倍になる。他の渦対の間隔は不変である。しかし、渦間隔の平均値がわずかに $(1 + \varepsilon)$ 倍とする) 増すために、 $\langle x \rangle$ で規格化された間隔は $1/(1 + \varepsilon)$ 倍になる。一方、合併した渦対の両側の間隔は、 $1.5/(1 + \varepsilon)$ 倍になる。このような変化がランダムに起きると仮定すると、渦間隔分布は対数正規分布に近づくわけである。

第4章 あとがき

本稿は、筆者が1989年11月に京都大学理学部物理学科大学院において行った集中講義の内容である。聴講しておられた茶碗谷毅君を初めとする院生の方々がノートを整理し、それに筆者が多少手を加えて完成させた。今見直してみると、講義の不備な点が目につく。しかし講義録というジャンルに属するので、なるべく元の形のままとした。なお本稿の内容に続けて、「界面の形成と運動」、「形の計測と認識」という章を近い将来追加し、「形の物理」としてまとめる予定である。最後に集中講義の機会を与えてくださった京都大学理学部の川原助教授、および本稿をまとめるのに尽力してくださった上記の院生の方々に感謝の意を表したい。