

212

クリフォード演算子とリーマンの問題

京大数理研 三輪哲二

本稿では, 不確定特異点も含めた, モノドロミーに関するリーマンの問題を, クリフォード演算子を使って記述する方法を紹介する。基本的なアイデアのみ述べるので, 詳細は次のプレ・プリントを見ていただきたい。

RIMS - 342

Clifford operators and Riemann's
monodromy problem.

RIMS - 343

Painlevé property of monodromy
preserving deformation equations
and the analyticity of τ functions.

出発点となったのは Wu, McCoy, Tracy, Barouch
による次の結果である。

2次元 Ising 模型の2点相関関数のスケール極限を
 $\tau_-(t)$ ($T \uparrow T_c$) および $\tau_+(t)$ ($T \downarrow T_c$) とする。
 $\eta(t)$ を適当な境界条件のもとでの次の非線型方程式の解

とする。

$$\eta'' = \frac{1}{\eta} (\eta')^2 - \frac{1}{t} \eta' - \frac{1}{\eta} + \eta^3$$

このとき

$$\tau_{\pm}(t) = \text{const.} \cdot t^{\frac{1}{4}} (1 \mp \eta(t)) \eta(t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \left(\int_t^{\infty} \frac{s \{ (1 - \eta(s)^2)^2 - \eta'(s)^2 \}}{4 \eta(s)^2} ds \right)$$

ここに現われる非線型方程式は Painlevé 方程式と呼ばれるもののひとつである。Sato, Miwa, Jimbo は 相関関数と Painlevé 方程式の対応を 以下のような枠組で 定式化した。

Step 1. 相関関数を, クリフォード演算子の積の真空期待値 の形に表わす。

$$\tau = \langle \varphi_1 \cdots \varphi_n \rangle$$

φ が クリフォード演算子であるとは, ^(フェルミ)自由場 $\psi(x)$ を 使って

$$\varphi = : \exp \left(\iint dx dx' R(x, x') \psi(x) \psi(x') \right) :$$

の形に書けることを言う。

Step 2. 波動関数

$$\frac{\langle \psi(x_0) \psi(x) \varphi_1 \cdots \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_1 \cdots \varphi_n \rangle}$$

を考える。これは、 x の函数としてモノドロミー性質を満たし、そのモノドロミー性質は $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ に含まれるパラメタ $t_1, t_2, \dots$ に依らない。

Step 3 モノドロミー性質から、 $x, t_1, t_2, \dots$ に対する線型方程式系が導かれる。その係数は、 x に関し有理函数となる。有理函数を、部分分数展開した時の係数は $t_1, t_2, \dots$ の難しい函数である。

Step 4 この線型方程式系の可解条件は、^(上記の) 未知の係数に対する非線型方程式となる。これを変形方程式と呼ぶ。

Step 5 相関函数の対数微分を、変形方程式の解を使って表わす。

Fuchs, Garnier 等の研究により、確定特異点4つの2階線型常微分方程式およびその合流型の変形方程式として Painlevé方程式が得られる事が知られていた。確定特異点ばかりの場合の一般論としては、Schlesingerの理論があった。これらは、いずれも Step 3 と Step 4に対応するものであり、Schlesinger理論においては

Step 3 は

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial x} = \left(\sum_{\mu=1}^n \frac{A_{\mu}}{x-a_{\mu}} \right) Y(x)$$

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial a_{\mu}} = - \frac{A_{\mu}}{x-a_{\mu}} Y(x)$$

Step 4 は

$$dA_{\mu} = - \sum_{\nu \neq \mu} [A_{\mu}, A_{\nu}] d \log (a_{\mu} - a_{\nu})$$

で与えられた。この場合の Step 1, 2 および Step 5 は, Sato, Miwa, Jimbo により与えられた。特に, 相関関数の対数微分 $\omega = d \log \tau$ を与える公式は

$$\omega = \frac{1}{2} \text{trace} \sum_{\nu \neq \mu} A_{\mu} A_{\nu} d \log (a_{\mu} - a_{\nu})$$

となる。

当然, 上記の各 Step を 不確定特異点を含む場合にまで拡張する事が問題になった。Sato, Miwa, Jimbo が扱ったいくつかの物理的な模型においても, 1 級の不確定特異点が現われていた。Ueno および Flaschka, Newell は, Stokes 係数の保存という観点から, 一般的な定式化を示した。(但し, 計算的な複雑さの故に, 彼らの論文はいく

つかの簡単な場合のみ考察している。) 一般論を更に展開するための動機づけは, Okamoto によって与えられた。彼は, Painlevé 方程式が "非自律的なハミルトン系の形に書ける事, 相関関数 τ がハミルトニアン H を使って

$$\tau(t) = \exp \int^t H(s) ds$$

と定義する時, 不動特異点を除き正則になる事を示した。

もともと Painlevé は, 動く分岐点を持たない2階代数的常微分方程式を分類する事によつて, Painlevé 方程式を得たのであつて, この性質を Painlevé 性質と呼ぶ。言い換えると, 方程式の形から決まる (従つて個々の解に依らない) 特異点以外は, $\underbrace{\text{pole しか持たないものを, 解の特異点として}}$

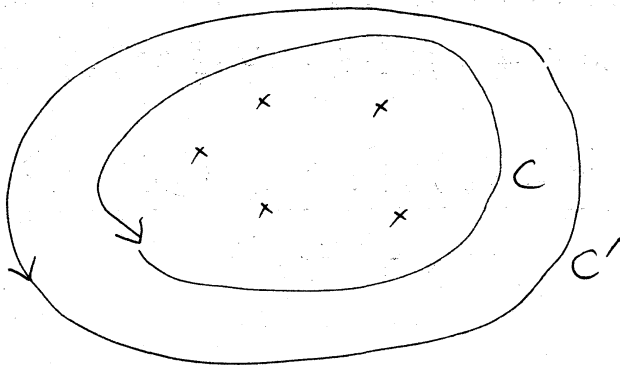
Painlevé 性質を持つ方程式と呼ぶ。Okamoto の研究は, poleすら持たない移相関数 τ が導入できる事を示した。

τ 函数を基礎におく変形方程式の研究は, Jimbo, Miwa, Ueno ~~により展開された~~ により展開された。彼らは 分数級の不確定特異点と, 整数差の固有値を持つ確定特異点を持つという制限のもとで, 変形方程式の完全積分可能性を証明し, τ 函数の定義を与えた。

そこで 彼らの扱った場合に対応して Step 1, 2 および Step 5 を完成させる事と, 変形方程式の Painlevé 性質とこの正則性を示す事が問題になる。これに対する解答を与えるのが, 上記 2論文の目的である。

モ/ドロミ-の問題を考える際, 何故 フリフォード演算子が有効か。この問に答える事から始めよう。

$Y(x)$ が $m \times m$ 行列 (モ/ドロミ-性質を持った ~~解~~) としよう。 $Y(x)$ のすべての特異点を囲む curve C と C' を考えよう。



フリフォード演算子 φ を

$$\varphi = \exp \left\{ \oint_C dx \oint_{C'} dx' \sum_{\alpha, \beta=1}^m \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x-x'} \left(Y(x)^{-1} Y(x') \right)_{\alpha\beta} \psi_\alpha(x) \psi_\beta^*(x') \right\}.$$

と定義する。但し $\psi_\alpha(x)$, $\psi_\beta^*(x')$ は自由場で

$$\langle \psi_\alpha^*(x) \psi_\beta(x') \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{i}{x-x'} \delta_{\alpha\beta}$$

なる期待値を持つとする。この時 x_0, x を C' の外側に取ると

$$\begin{aligned} & 2\pi i (x - x_0) \langle \psi_\alpha^*(x_0) \varphi \psi_\beta(x) \rangle \\ &= \left(Y(x_0)^{-1} Y(x) \right)_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

が成り立つ。

これは、殆んど tautology ($\equiv$ tology) であるが、次の合成原理が機能する事が重要である。

$Y_j(x)$, φ_j ($j=1, 2$) を、~~2組の~~ 2組の、モノドロミーを持った行列と対応するクリフォード演算子とする。この時 合成されたモノドロミーを持つ行列は

$$\frac{2\pi i (x - x_0) \langle \psi_\alpha^*(x_0) \varphi_1 \varphi_2 \psi_\beta(x) \rangle}{\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle}$$

で与えられる。

そこで、与えられたモノドロミー性質を持つ行列 $\overbrace{Y(x)}^{(Y(x))}$ を作るためには、~~モノドロミー~~ $Y(x)$ の持つ特異性を最も簡単なものに分解して、それに対応するクリフォード演算子を作り、それを合成するという手順になる。

$Y(x)$ の特異性は、特異点を a_μ とすると、 a_μ を中心とするある sector で、適当な定数行列

$$C^{(\mu)}, S_1^{(\mu)}, S_2^{(\mu)}, \dots$$

を便して調節してやると、次の形に漸近展開されるという事である。

$$(Y(x) C^{(\mu)-1} S_1^{(\mu)} \dots S_{l-1}^{(\mu)})_{\alpha\beta}$$

$$\sim (G_{\alpha\beta}^{(\mu)} + O(x - a_\mu)) e_\beta^{(\mu)}(x)$$

$$e_\beta^{(\mu)}(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^{r_\mu} t_{j,\beta}^{(\mu)} \frac{(x - a_\mu)^{-j}}{-j} + t_{0,\beta}^{(\mu)} \log(x - a_\mu)\right)$$

少し説明しておく。 $e_\beta^{(\mu)}(x)$ は $x = a_\mu$ に、パラメタ $t_{-r_\mu,\beta}^{(\mu)}, \dots, t_{0,\beta}^{(\mu)}$ で決まる特異性を持った函数である。

$Y(x)$ が 1 行 1 列の時は $C^{(\mu)}, S_1^{(\mu)}, S_2^{(\mu)}, \dots$ は全く不要である。一般に $m \times m$ 行列の時は m 個の特異性 $e_1^{(\mu)}(x), \dots, e_m^{(\mu)}(x)$ がそれぞれ第 1 列, ..., 第 m 列に対応するように、列を線型変換してやる必要がある。このための定数行列が $C^{(\mu)}$ であり、さらに不確定特異点においては、sector を移るごとに、調節が必要になる。これが Stokes 係数 $S_l^{(\mu)}$ である。

さて、特異性を分解するに当たって基本的なアイデアは次の 2 点である。

1) クリフォード演算子は、 m 個 (m は行列の

大きさ, n は特異点の数) 用意し, ひとつひとつが $e_{\alpha}^{(\mu)}(x)$ ($\mu = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, \dots, m$) に対応するようにする。

2) 特異点と sector の数に応じた, 複数の自由場を用意し, $C^{(\mu)}, S_1^{(\mu)}, S_2^{(\mu)}, \dots$ などのデータを, 自由場の間の真空期待値として input する。

~~詳細は略するが, 上記のアイデアのもとに, 既知の例を見直してみると正しいやり方は容易に想像がつき, 求める行列の演算子表示~~

詳細は略するが, 上記のアイデアのもとに, 既知の例を見直してみると正しいやり方は容易に想像がつき, 求める行列の演算子表示

$$Y(x)_{\alpha\beta} = 2\pi i(x-x_0) \frac{\langle \psi_{\alpha}^*(x_0) \varphi_1^{(0)} \dots \varphi_m^{(n)} \psi_{\beta}(x) \rangle}{\langle \varphi_1^{(0)} \dots \varphi_m^{(n)} \rangle}$$

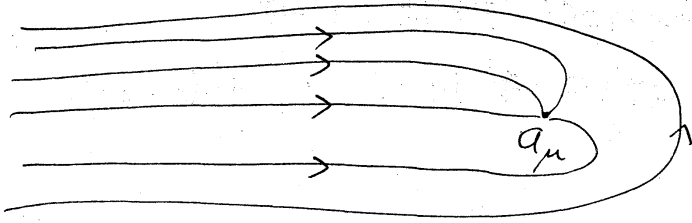
が得られる。

この表示から Wick の定理を使って計算すると, $Y(x)_{\alpha\beta}$ に対する Neumann 級数型の 無限級数表示が得られる。

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j \text{ 重積分})$$

という形である。ここに現われる積分は, クリフォード演算子 φ にはいっている $\int dx \int dx'$ に対応している。但し今の場合, $e_{\alpha}^{(\mu)}(x)$ が " $x=\infty$ " にも特異性を持つことと,

不確定特異点での Stokes ~~現象~~現象に対抗して 次のような積分路が必要となる。



$t_{j,\alpha}^{(\mu)}$ および $(S_\ell^{(\mu)} - 1)_{\alpha\beta}$ が 小さければ, 上記の無限和の収束が言えて, $\Upsilon(z)$ のモノドロミー性質および $\omega = d \log \langle \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_m^{(n)} \rangle$ となる事が示せる。しかし, 一般には収束は期待できない。なぜなら, $\langle \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_m^{(n)} \rangle$ は 正則とはいえず, 零点は持つはずで, そこでは (と期待される)

比 $\langle \psi_\alpha^*(x_0) \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_m^{(n)} \psi_\beta(x) \rangle / \langle \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_m^{(n)} \rangle$ は pole を持つ。

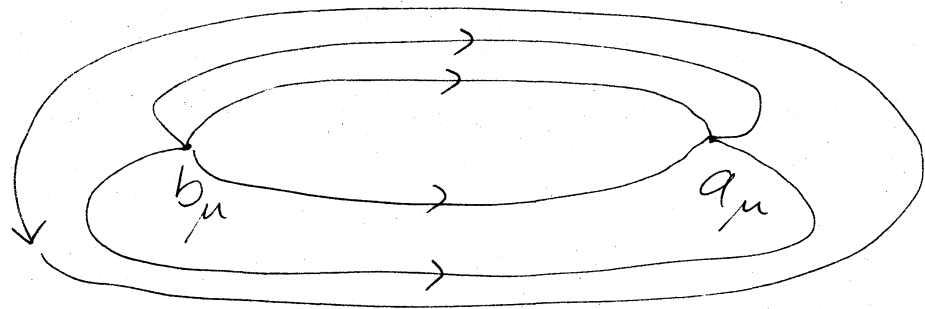
実は, Wickの定理を $\langle \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_m^{(n)} \rangle$ に適用すると Fredholm 行列式の形の無限級数表示を得る。同様に $\langle \psi_\alpha^*(x_0) \varphi_1^{(n)} \dots \varphi_m^{(n)} \psi_\beta(x) \rangle$ は Fredholm 小行列式の形をしている。従って, おのおのが正則になる事がいえれば, とも都合がよい。しかし, ひとつの困難は, 上記のように積分区間が non compact である事である。

この点を切り抜けるため、次の二つのトリックを使う。

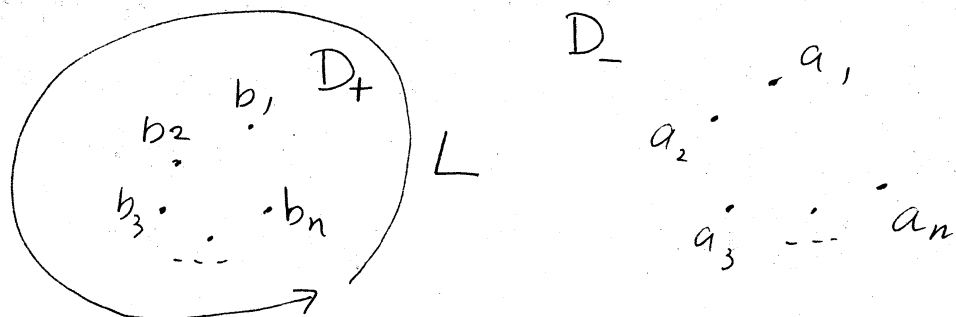
1) 与えられた問題の代わりに、特異点の数を2倍にした問題を、compactな積分路だけを使って解く。

2) 次に、余分な特異点を、Hilbert - Plemeljの方法で消し去る。

少し説明する。積分路が無限までのびた理由は、 $e_\alpha^{(\infty)}(x)$ の特異点が a_μ と ∞ である、だからである。そこで、 ∞ の代わりに有限な点 b_μ を用意してやり、積分路を閉じさせる。



これが 1) のアイデアである。こうして特異点 $a_1, \dots, a_n$ と $b_1, \dots, b_n$ に対応する解 $Z(x)$ が作れたとしよう。
 $b_1, \dots, b_n$ を囲む閉曲線を L としよう。



L の外側 D_- で正則な行列 $R_-(x)$ と L の内側 D_+ で正則な行列 $R_+(x)$ で

$$R_-(x)Z(x) = R_+(x) \quad x \in L$$

を満たすものは, Hilbert - Plemelj 型の積分方程式を解いて得られる。この時求むる解 $Y(x)$ は

$$Y(x) = \begin{cases} R_-(x)Z(x) & x \in D_- \\ R_+(x) & x \in D_+ \end{cases}$$

で与えられる。

以上の構成法から, $Y(x)$ がすべてのパラメータについて有理型になる事がわかり, 変形方程式の Painlevé 性質が確かめられる。さらに Fredholm 行列式の正則性から Γ 関数の正則性が従う。