

非線型波とその相互作用

東教大 理 戸 田 盛 和

§ 1. 序

線型の現象では重ね合わせの原理が成立するから、例えば二つの現象を知っていれば、これらを重ね合わせた現象を予期できるし、一つの現象をいくつかの基本的な現象にわけて考えることができる。例えば振動子系や弾性体の振動においては、任意の運動状態は基準振動、あるいは固有振動の重ね合わせで表わすことができる。

非線型の現象では重ね合わせの原理が成り立たないから、任意の運動を基準振動や固有振動などに分けることはできない。これが非線型の問題の理解を一般に大変困難なものにしている。非線型方程式を線型方程式の拡張として考えようとするれば、その拡張の仕方はほとんど無限に考えられるであろう。自然現象は常にいくらかの非線型部分を含み、線型化は理想化であるとする観点に立てば、非線型の極限が簡単な線型現象として妥当性をもつのはむしろ驚異であるかもしれない。非線型現象は線型の場合にみられない極めて特徴的な振舞いをするのがふつうだからである。

しかし、非線型の現象はいつでも要素的なものに分解できないとは限らない。例えば、ちょっと力学的でない現象になるが、神経の伝達現象は非線型であり、実際、非線型の方程式によって記述される。神経の情報はパルスによって伝えられるが、パルスの高さは常に一定で、情報の強さは単位時間内のパルスの数で表わされる（いわば FM 方式である）。

ここではもっと力学的な現象——格子振動と弾性体振動の非線型の場合を取扱う。これらの場合、パルスの波が、形を変えないで伝搬し、このようなパルス波が 2 個ぶつかるたたがいを通り抜けてもとの形にもどり、したがってこわれのない粒子のように運動することが示される。このような性質のため、このようなパルス波は soliton (solitary-wave particle の意味) と呼ばれる。これは始め連続体に関する非線型の Korteweg-de Vries 方程式の計算機実験によって示され、次いで解析的に明かにされ、また格子振動についても同じようなことが存在することが計算機・解析の両面から示された。非線型波は soliton のある意味の重ね合わせとして一般に表わせるのではないだ

ろうか。

この問題には完全には答えが得られていない。今のところある範囲ではそうであろう。しかしすべての可能な運動が soliton の集まりとして表わされるとは限らないことも示されている。

§ 2. 非線型鎖の振動方程式¹⁾

運動の起こっていない平衡の位置からの変位を u_n とする。1次元の鎖で、 n は粒子の番号である。これら粒子(質量 m) は非線型のバネでつながれているとし、バネののびを

$$r_n = u_n - u_{n-1} \quad (2.1)$$

で表わす。バネの位置エネルギーを $\phi(r_n)$ とすれば、鎖のエネルギーは

$$H = \sum_n \frac{m}{2} \dot{u}_n^2 + \sum_n \phi(r_n) \quad (2.2)$$

で表わされる。運動方程式は

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\phi'(r_n) + \phi'(r_{n+1}) \quad (2.3)$$

である。このままでは扱いにくいので変数変換を行う。

$n=0$ の粒子を固定し、 $u_0=0$ とおくと

$$r_1 = u_1, \quad r_2 = u_2 - u_1, \quad \dots$$

から、 $n > 0$ に対して

$$\begin{aligned} u_1 &= r_1, \quad u_2 = r_1 + r_2, \quad \dots, \quad u_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n, \quad \dots \\ \dot{u}_1 &= \dot{r}_1, \quad \dot{u}_2 = \dot{r}_1 + \dot{r}_2, \quad \dots, \quad \dot{u}_n = \dot{r}_1 + \dot{r}_2 + \dots + \dot{r}_n, \quad \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

r_n に共役な運動量を s_n とすれば

$$s_n = \frac{\partial H}{\partial \dot{r}_n} = m \{ (\dot{r}_1 + \dots + \dot{r}_n) + \dots (\dot{r}_1 + \dots + \dot{r}_N) \} \quad (2.5)$$

ただし粒子は N 個あるとした ($0 \leq n \leq N$)。 N 番目の粒子は右からバネの作用を受けていない。また

$s_{N+1} = 0$ である。 s_n と運動量 $m \dot{u}_n$ との関係は

$$m \dot{u}_n = s_n - s_{n+1} \quad (2.6)$$

ただし、 $m \dot{u}_N = s_N$ である。ハミルトン関数は

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2m} (s_n - s_{n+1})^2 + \frac{1}{2m} s_N^2 + \sum_{n=1}^N \phi(r_n) \quad (2.7)$$

となる。運動方程式は(以後 $n=N$ を特別扱いしない。)

$$\dot{r}_n = \frac{\partial H}{\partial s_n} = \frac{1}{m} (2s_n - s_{n-1} - s_{n+1}), \quad (2.8)$$

$$\dot{s}_n = -\frac{\partial H}{\partial r_n} = -\phi'(r_n)$$

となる。これから s_n を消去して r_n に関する式にすれば

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = \phi'(r_{n-1}) + \phi'(r_{n+1}) - 2\phi'(r_n) \quad (2.9)$$

を得るが、これは(3)の n を $n-1$ にした式と(3)との差を作った式にほかならない。

r_n を消去して s_n に関する式を作ることができる場合もある。 $\phi'(r_n)$ が r_n について一価関数であるとすると、

$$\dot{s}_n = -\phi'(r_n) \rightarrow X(\dot{s}_n) = -mr_n \quad (2.10)$$

すなわち r_n を $\dot{s}_n$ で表わしてこれを消去し

$$-\frac{d}{dt} X(\dot{s}_n) = s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n \quad (2.11)$$

あるいは

$$X'(\dot{s}_n) \ddot{s}_n = s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n \quad (2.12)$$

を得る。また

$$\int^t s_n dt = S_n \quad (2.13)$$

とすれば

$$X(\ddot{S}_n) = S_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n \quad (2.14)$$

これはバネの非線型の形を分類するのにも都合がよい。

以下では、非線型力のポテンシャルとして

$$\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar + \text{const} \quad (2.15)$$

を考える。²⁾ $ab > 0$ とする。 $b > 0$ とするとこれは右図のよ

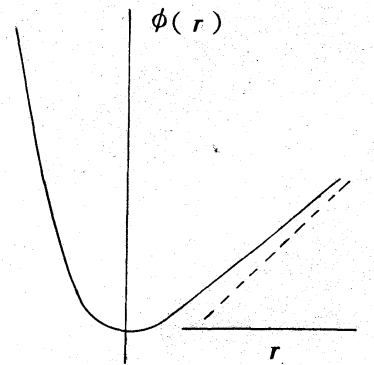
うなポテンシャルである。 $b \rightarrow 0$ では ($K = ab = \text{有限}$)、

$\phi(r)$ は放物線 — 線型力となり、 $b \rightarrow \infty$ では剛球模型となる。

$$\dot{s}_n = -\phi'(r_n) = -a(1 - e^{-br_n}),$$

$$r_n = -\frac{1}{b} \log \frac{a + \dot{s}_n}{a} = -X(\dot{s}_n) / m \quad (2.16)$$

したがって運動方程式は



$$\frac{\ddot{s}_n}{a + s_n} = \frac{b}{m} (s_{n-1} + s_{n+1} - 2s_n) \quad (2.17)$$

あるいは

$$\log \frac{a + \ddot{s}_n}{a} = \frac{b}{m} (S_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n) \quad (2.18)$$

これらの式は無限の長さの鎖 ($n = -\infty \sim \infty$) に適用できる。以下の節では、しばらくこの相互作用の場合を考察する。

§ 3. つらなり波 (Wave train)²⁾

非線型鎖 (2.17) の解として、周期的な形で、時間がたつと移動するが形の変化しない波

$$s_n = \frac{2\bar{K}\nu}{b/m} Z \left\{ 2 \left(\nu t - \frac{n}{\Lambda} \right) \bar{K} \right\} \quad (3.1)$$

がある。ここに Z は Jacobi の楕円関数 Zn であって

$$Z(u) = \int_0^u \left(dn^2 u - \frac{E}{\bar{K}} \right) du \quad (3.2)$$

また $\bar{K} \equiv \bar{K}(k)$, $E \equiv E(k)$ は第 1 種および第 2 種の完全楕円積分である。振動数 ν と波長 Λ との関係は分散式

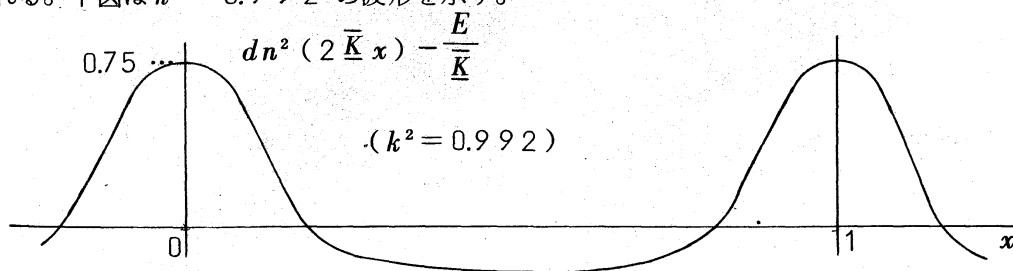
$$2\bar{K}\nu = \frac{ab}{m} \sqrt{\frac{1}{sn^2 2\bar{K}/\Lambda} - 1 + \frac{E}{\bar{K}}} \quad (3.3)$$

で与えられる。この解は

$$e^{-brn-1} = \frac{(2\bar{K}\nu)^2}{ab/m} \left[dn^2 \left\{ 2 \left(\nu t - \frac{n}{\Lambda} \right) \bar{K} \right\} - \frac{E}{\bar{K}} \right] \quad (3.4)$$

を与える。完全楕円積分 E , $\bar{K}$, および Jacobi の楕円関数 Z , sn , dn はすべて母数 k をもつ ($0 \leq k \leq 1$)。母数 k が大きいほど振幅は大きい。振幅は k と波長 Λ との関数である。

$k \simeq 0$ ならば振幅は小さく, s_n も e^{-brn-1} も正弦波に近い。 $k \simeq 1$ になると非障型がはっきり現われる。下図は $k^2 = 0.992$ の波形を示す。



上図は非線型の波がパルス型の波形の列をなして並んだものと考えられることを示しているようにみえる。実際次の公式が成立する：

$$dn^2(2\bar{K}x) - \frac{E}{\bar{K}} = \frac{\pi^2}{4\bar{K}^2} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \frac{\pi \bar{K}}{\bar{K}'} (x+l) - \frac{2\bar{K}'}{\pi \bar{K}} \right\} \quad (3.5)$$

ただしここに $\bar{K}' = \bar{K}(k') = \bar{K}(\sqrt{1-k^2})$ 。

$b \rightarrow \infty$ として剛体球の場合を扱うこと、あるいは同じことになるが、 $k \rightarrow 1$ として強い振動の極限を扱うことは興味あることであるが、この極限の場合はここではすべて省略する。

§ 4. 孤立波 (soliton)²⁾³⁾

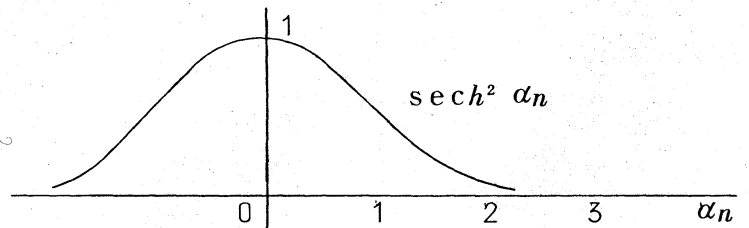
波形を変えないで伝播するパルスの孤立波は解

$$e^{-brn-1} = \sinh^2 \alpha \cdot \operatorname{sech}^2(\alpha n - \beta t) \quad (4.1)$$

$$\text{ただし } \beta = \sqrt{ab/m} \sinh \alpha \quad (4.2)$$

で与えられる。この解は(3.4)で $\alpha = 2\bar{K}/\Lambda = \text{有限}$ として $\Lambda \rightarrow \infty$, $k \rightarrow 1$ ($\bar{K} \rightarrow \infty$) の極限をとれば得られる。

α は任意常数で、 $1/\alpha$ がパルスの幅を与え $\sinh^2 \alpha$ が波高を与える。



この波は、次の形で与えることもできる。

$$s_n = -\frac{\beta m}{b} \tanh(\alpha n - \beta t) \quad (4.3)$$

$$S_n = \frac{m}{b} \log \cosh(\alpha n - \beta t) + \text{const} \quad (4.4)$$

この最後の式を拡張して

$$S_n = \frac{m}{b} \log [\cosh(kn - \beta t) + B \cosh(\mu n - r t + \delta)] \quad (4.5)$$

を仮定し、これを(2.18)に入れて満足させるためには、 β , r , B を k , μ の関数として次のようにとればよい (k , μ , δ は任意)。二つの場合がある ($k \neq \mu$ のとき)。

$$(i) \begin{cases} \beta = \sqrt{\frac{ab}{m}} 2 \sinh \frac{\mu}{2} \cosh \frac{k}{2}, & r = \sqrt{\frac{ab}{m}} 2 \sinh \frac{k}{2} \cosh \frac{\mu}{2} \\ B = \cosh(k/2) / \cosh(\mu/2) \end{cases} \quad (4.6)$$

これは2個の孤立波が逆向きに走る場合である。

$$(ii) \begin{cases} \beta = \sqrt{\frac{ab}{m}} 2 \sinh \frac{k}{2} \cosh \frac{\mu}{2}, & r = \sqrt{\frac{ab}{m}} 2 \sinh \frac{\mu}{2} \cosh \frac{k}{2} \\ B = \sinh(k/2) / \sinh(\mu/2) \end{cases} \quad (4.7)$$

これは2個の孤立波で同じ向きに走る場合である。

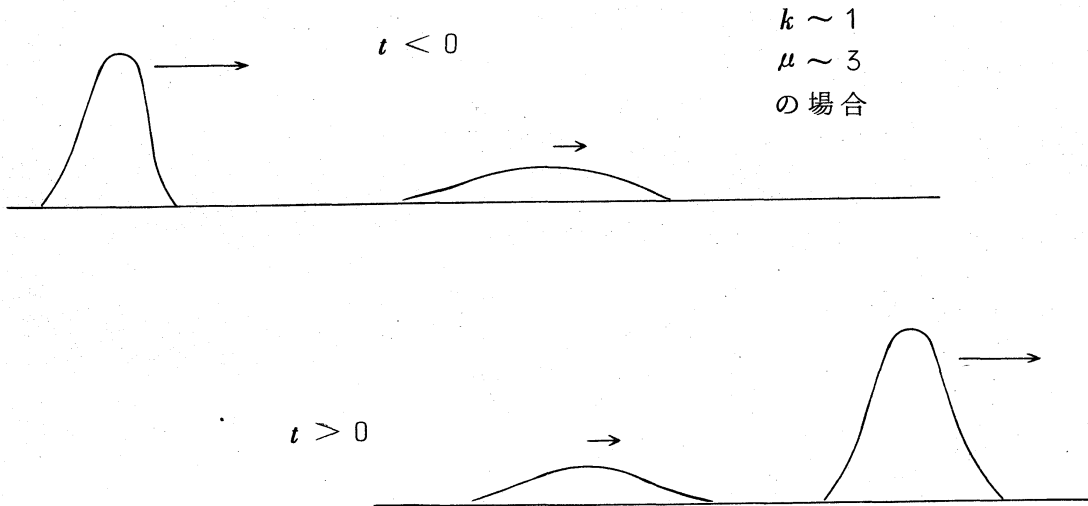
簡単のため $\delta = 0$ としておくと, $|t| \rightarrow \infty$ の漸近形は

$$t < 0 : e^{-brn-1} = \begin{cases} \sinh^2 \alpha' \cdot \operatorname{sech}^2 (\alpha' n - \beta' t + h) \\ \sinh^2 \alpha'' \cdot \operatorname{sech}^2 (\alpha'' n - \beta'' t + h) \end{cases} \quad (4.8)$$

$$t > 0 : e^{-brn-1} = \begin{cases} \sinh^2 \alpha' \cdot \operatorname{sech}^2 (\alpha' n - \beta' t - h) \\ \sinh^2 \alpha'' \cdot \operatorname{sech}^2 (\alpha'' n - \beta'' t - h) \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\text{ただし} \begin{cases} \alpha' = \frac{k+\mu}{2}, & \beta' = \sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \alpha', \\ \alpha'' = \frac{k-\mu}{2}, & \beta'' = \sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \alpha'', \\ e^h = 1 / \sqrt{B} \end{cases} \quad (4.10)$$

となり, (i), (ii) いずれの場合も2個の孤立波よりなる。この孤立波は $t \simeq 0$ で重なる。次に孤立波が同じ向きに走る(ii)の場合の1例を略図によって示す。2個の孤立波は近づき, 相互作用をし, その後はな



れていくが, そのときもとの形をとり戻す。孤立波の速いものは遅いものに追いつき, これを追い抜くが, 波形はそれぞれ変化しない。この性質のため, このような孤立波は粒子の性質をもつので, soliton とよばれる。

§ 5. 弱い非線型 — 連続体近似

連続体近似の Korteweg-de Vries 方程式を格子の式から導く方法はいろいろある。研究会では最も初等的な方法を述べたが、その後別の方法で同じ結果がみ通しよく導かれるのを知ったので、この方法を述べることにする。

まず、線型の方程式 $(\partial^2 / \partial t^2 - \partial^2 / \partial x^2) y = 0$ を考えると因数分解して $(\partial / \partial t - \partial / \partial x)(\partial / \partial t + \partial / \partial x) y = 0$ あるいは $(\partial / \partial t + \partial / \partial x)(\partial / \partial t - \partial / \partial x) y = 0$ となる。これから右へ走る波 $(\partial / \partial t + \partial / \partial x) y = 0$ と左へ走る波 $(\partial / \partial t - \partial / \partial x) y = 0$ を得る。線型の鎖の運動方程式は $r_n(t) = r(t, x)$, $x = nh$ (h は平衡の粒子間隔離) として $(K = ab)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} &= \frac{K}{m} \{ r(x-h) + r(x+h) - 2r(x) \} \\ &= 4 \frac{K}{m} \left[\sinh\left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \right]^2 r \end{aligned}$$

と書ける。したがって

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sinh\left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sinh\left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} v = 0$$

と書き直せる。右向きに走る波は $r \propto e^{i(kx - \omega t)}$ とおくと上式から直ちに

$$\omega = \frac{2\sqrt{\frac{K}{m}}}{i} \sinh\left(i \frac{hK}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{hK}{2}\right)$$

を得るが、これはよく知られた格子振動の分散式である。

同様なことを非線型の鎖について考えよう。

$$\ddot{r}_n = \frac{a}{m} (2e^{-br_n} - e^{-br_{n-1}} - e^{-br_{n+1}}) \quad (5.1)$$

これは次のように書ける：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 4 \frac{K}{m} \left[\sinh\left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \right]^2 \left(r - \frac{b}{2} r^2 \right) \quad (5.2)$$

あるいは $C_0 = K/mh$ とおいて

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 4 \frac{K}{m} \left[\sinh\left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \right]^2 \right\} r + bhC_0^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial r}{\partial x} \right) = 0 \quad (5.3)$$

非線型項は最後の項で bh の高次をすてると

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sinh\left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{b C_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} r \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sinh\left(\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{b C_0}{2} r \frac{\partial}{\partial x} \right\} r = 0 \quad (5.4)$$

これから右方へ伝わる波は大体 $C_0 = \sqrt{K/m} h$ の速さで伝わり

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + C_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{C_0 \varepsilon}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u = 0 \quad (5.5)$$

で記述されることがわかる。ただし

$$\begin{aligned} r &= -hu, \\ \varepsilon &= bh, \\ \beta &= \frac{C_0 h^2}{24} \end{aligned} \quad (5.6)$$

とおいた。そこで C_0 で動く座標系

$$\xi = x - C_0 t \quad (5.7)$$

に移れば

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{C_0 \varepsilon}{2} u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (5.8)$$

を得る。 u , ξ , t の尺度を適当に変えれば, 第1項の係数はそのまま1にしておいて, 第2項, 第3項の係数を任意に動かすことができる。そこで上式は

$$u_\tau + u u_\xi + \delta^2 u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (5.9)$$

と書くことができる。これが Korteweg-de Vries 方程式である。⁴⁾

ちょっと不思議なことであるが, 高次の項を無視したにかかわらず, 孤立波は, soliton などは Korteweg-de Vries 方程式についてもそのままあてはまるのである。つらなり波もそうである。これらを少しまとめておく。

つらなり波

$$u = \underline{u} + (\bar{u} - \underline{u}) \operatorname{cn}^2 \alpha (\xi - \bar{c} \tau) \quad (5.10)$$

ここに $\underline{u}$, $\bar{u}$ は常数で, cn の母数を k とすると

$$\begin{aligned} \bar{u} - \underline{u} &= 12 \alpha^2 \delta^2 k^2 \\ \bar{c} &= \underline{u} - 4 \alpha^2 \delta^2 (1 - 2 k^2) \end{aligned} \quad (5.10')$$

孤立波 (soliton)

$$u = u_\infty + A \operatorname{sech}^2 \alpha (\xi - \bar{c} \tau) \quad (5.11)$$

ここに

$$A = 12 \alpha^2 \delta^2, \quad \bar{c} = u_\infty + \frac{A}{3} \quad (5.11')$$

これは、つらなり波(10), (11)で $k \rightarrow 1$ としたものと同じである。(5.11)は(4.1)の α が小さい場合と一致する ($u_\infty = 0$ のとき)。

2 個の soliton

2 個の soliton の場合も (4.5) 以下の式で k, μ が小さい場合として (4.5) などを使って導くことができる。その結果、2 個の soliton がある場合の Korteweg-de Vries 方程式の解として

$$u = 4 \frac{k \mu}{\left[\frac{k \mu}{4} \left\{ (\underline{\mu} + \underline{k})^2 \cosh [(\underline{\mu} - \underline{k}) \underline{\xi} - (\underline{r} - \underline{\beta}) \underline{\tau}] + (\underline{\mu} - \underline{k})^2 \cosh [(\underline{\mu} + \underline{k}) \underline{\xi} - (\underline{r} + \underline{\beta}) \underline{\tau}] \right\} \right.} \\ \left. \left[\underline{\mu} \cosh(\underline{k} \underline{\xi} - \underline{\beta} \underline{\tau}) + \underline{k} \cosh(\underline{\mu} \underline{\xi} - \underline{r} \underline{\tau}) \right]^2 \right] \quad (5.12)$$

を得る。ここで

$$\underline{\tau} = \frac{\tau}{6 \sqrt{6} \delta^2}, \quad \underline{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{6} \delta^2} \quad (5.13)$$

である。また $\underline{k}, \underline{\mu}$ は常数で任意にとれるが、 $\underline{\beta}, \underline{r}$ は

$$\underline{\beta} = \frac{1}{2} \left\{ (\underline{\mu} + \underline{k})^3 - (\underline{\mu} - \underline{k})^3 \right\}, \\ \underline{r} = \frac{1}{2} \left\{ (\underline{\mu} + \underline{k})^3 + (\underline{\mu} - \underline{k})^3 \right\} \quad (5.14)$$

によって与えられるものである。

$K. - d. V.$ の方程式において任意の初期値を与えると、その波形は時間の経過につれて一般に soliton の集まりになる。そしてこれら soliton は別々の単位として運動する。⁴⁾

soliton 以外の小さな微小振動波形も初期波から生じる場合があることが示されるが、⁵⁾ 運動の大きな特徴は soliton の集まりの運動によって理解されるようである。⁶⁾ このように soliton 分解はさらに検討が期待される。

- 1) M. Toda: Prog. Theor. Phys. Suppl. **36** (1966) 113.
- 2) M. Toda: J. Phys. Soc. Japan **22** (1967) 431, **23** (1967) 501.
- 3) 戸田盛和: 数理解析研究所講究録 **56** (1968) 71.
- 4) N. J. Zabusky: Nonlinear partial differential equations, Academic Press 1967.
N. J. Zabusky M. D. Kruskal: Phys. Rev. Letters **15** (1965) 241.
N. J. Zabusky: Proc. Intern. Conf. on Statistical Mech. Kyoto 1968.
- 5) N. J. Zabusky: Private Communications.
B. V. Chirikor: Preprints, Institute of Nuclear Thysics, Novosibirsk.
- 6) V. I. Karpman: Phys. Letters **25A** (1967) 708.
戸田盛和: 科学 1968. 7月号 P. 346.