

解除可能クレジット・デフォルト・スワップの価格評価*

Tim Siu-tang Leung
Department of Applied Mathematics and Statistics
Johns Hopkins University

山崎和俊 (Kazutoshi Yamazaki)
大阪大学・金融・保険教育研究センター
Center for the Study of Finance and Insurance
大阪大学 (Osaka University)

1 はじめに

クレジット・デフォルト・スワップ (CDS) は近年の金融市場において重要な役割を果たしてきた。Bear Stearns、AIG、Lehman Brothers など大手金融機関の経営破綻後の今もなお、CDS の市場規模は目を見張るものがある。今後一層先進的かつロバストな評価モデルが求められていくことは言うまでも無い。標準的な CDS では、国や企業などの参照組織の債務不履行 (デフォルト) が発生した際にプロテクションの売り手が予め合意された金銭を支払い、その引き換えに買い手は定期的な金銭の支払いを行う。また決められた契約期間中に解約することは通常出来ない。

本稿では、プロテクションの買い手が自由に契約解除する権利を保有する CDS を扱う。具体的には、参照組織の資産価値をレヴィー過程でモデルし、Black-Cox 構造型アプローチを考える。つまり、デフォルトはレヴィー過程があるレベルを初めて下回った時刻におけると定義される。買い手はデフォルトの可能性が十分に低くなったときに解約し、当然この解約権にともない CDS スプレッドは上昇する。

この解除可能 CDS のスプレッド評価を目的とし、さらには買い手がどのタイミングで解約権を行使するかについて論じる。まず、一般的なレヴィー過程について最適停止問題としてモデルし、ジャンプが下向きのみ (spectrally negative) の場合において解析解を求める。また尺度関数 (scale function) を用いて明示的に最適戦略を表現し、CDS スプレッドの計算方式を論じる。本稿の概要及び証明に関しては [12]、他の関連論文としては [2, 3, 7, 9, 15] を参照のこと。

2 モデル

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ においてレヴィー過程 $X = \{X_t; t \geq 0\}$ を定義し、 $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を X で生成されるフィルトレーションとする。また、 $\mathbb{P}^x$ は $X_0 = x$ となる確率測度とする。まず参照組織の資産価値を指数レヴィー過程 $Y = \{Y_t := e^{X_t}; t \geq 0\}$ で表し、初めて Y があるレベルを下回った時刻をデフォルト時刻と定義する。さらに初期値をずらすことによって、デフォルト時刻を

$$\theta := \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 0\}$$

と表現し直すこととする。ここでは $\inf \emptyset = \infty$ と定義し、 θ は $[0, \infty]$ の値をとる $\mathbb{F}$ -停止時刻となる。

*本研究は NSF 助成金 DMS-0908295 および科研費 No. 22710143 の助成を受けたものである。

プレミアム料を p 、デフォルト時の売り手から買い手への支払金額を α 、解約料を γ 、無リスク利子率を $q > 0$ と表し、 S をデフォルト時刻 θ 以下の値をとる $\mathbb{F}$ -停止時刻の集合、つまり

$$S := \{\nu \in \mathbb{F} : \nu \leq \theta \text{ a.s.}\}$$

と定義する。すると買い手側の CDS の価値は

$$V(x) := \sup_{\nu \in S} \mathbb{E}^x \left[- \int_0^\nu e^{-qt} p dt + e^{-q\nu} (\alpha 1_{\{\nu=\theta, \nu<\infty\}} - \gamma 1_{\{\nu<\theta, \nu<\infty\}}) \right] \quad (2.1)$$

となり、上の期待値を最大化するような時刻 ν^* で解約することが買い手の最適戦略となる。また、(2.1) は

$$\zeta(x) := \mathbb{E}^x [e^{-q\theta}], \quad (2.2)$$

$$v(x) := \sup_{\nu \in S} \mathbb{E}^x [e^{-q\nu} h(X_\nu) 1_{\{\nu<\infty\}}], \quad (2.3)$$

$$h(x) := \left(\left(\frac{p}{q} - \gamma \right) - \left(\frac{p}{q} + \alpha \right) \zeta(x) \right) 1_{\{x>0\}} \quad (2.4)$$

と定義すると、 S の定義を使い、

$$V(x) = \left(\frac{p}{q} + \alpha \right) \zeta(x) - \frac{p}{q} + v(x) \quad (2.5)$$

と書くことができる。つまり、 θ のラプラス変換 (2.2) および最適停止問題の解 (2.3) を得ることによって、この CDS の価値を得ることが出来る。また $V(x) = 0$ とする p^* が CDS スプレッドとなる。

3 Spectrally negative なレヴィー過程の場合

3.1 Spectrally negative なレヴィー過程と尺度関数

このセクションでは X が spectrally negative なレヴィー過程の場合、つまりジャンプが常に下向きである場合を考える。この時のラプラス指数は

$$\psi(s) := \log \mathbb{E}^0 e^{sX_1} = cs + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 + \int_{(0,\infty)} (e^{-sx} - 1 + sx 1_{\{0<x<1\}}) \Pi(dx), \quad s \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

と表現することができる。ここで $c \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ であり、 Π は $(0, \infty)$ 上の測度で $\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$ を満たす (Kyprianou [10], p.212 を参照)。特に

$$\int_{(0,\infty)} (1 \wedge x) \Pi(dx) < \infty \quad (3.2)$$

の場合には

$$\psi(s) = \mu s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 + \int_{(0,\infty)} (e^{-sx} - 1) \Pi(dx), \quad s \in \mathbb{C}$$

として書くことができる。ここで

$$\mu := c + \int_{(0,1)} x \Pi(dx)$$

であり、 $\sigma = 0$ かつ (3.2) の場合に X は有界変動となり、それ以外の場合には非有界変動となる。さらに前者でレヴィー測度が有界の場合には X は混合ポワソン過程 (compound Poisson) と呼ばれる。

ここでは X が単調減少 (negative subordinator) の場合は除いて考える。つまり、 $\sigma = 0$ の場合には $\mu > 0$ とする。また、リスク中立条件下では割引後の資産価格がマルチンゲールになるために $\psi(1) = q$ となる必要がある。

すべての $q \geq 0$ および spectrally negative なレヴィー過程 X において尺度関数 $W^{(q)} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ が存在し、ラプラス変換

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}, \quad \beta > \zeta_q$$

によって一意に定義される。ここで $\zeta_q := \sup\{\lambda \geq 0 : \psi(\lambda) = q\}$ であり、また $(-\infty, 0)$ 上では $W^{(q)}(x) = 0$ とする。Surya [14] の Proposition 1 より、 $W^{(q)}$ は $\mathbb{R}_+$ 上で指数関数的に増加し、

$$W^{(q)}(x) \sim \frac{e^{\zeta_q x}}{\psi'(\zeta_q)} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

となる。

次に ν_B を

$$\nu_B := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq B \text{ or } X_t \leq 0\}, \quad B \geq 0, \quad (3.4)$$

と定義する。すると尺度関数を使用し、

$$\mathbb{E}^x [e^{-q\nu_B} 1_{\{\nu_B < \theta\}}] = \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(B)} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}^x [e^{-q\nu_B} 1_{\{\nu_B = \theta\}}] = Z^{(q)}(x) - Z^{(q)}(B) \frac{W^{(q)}(x)}{W^{(q)}(B)}$$

が得られる。ここで $Z^{(q)}(x) := 1 + q \int_0^x W^{(q)}(y) dy$, $x \in \mathbb{R}$ である。

また、 $W_{\zeta_q} = \{W_{\zeta_q}(x) := e^{-\zeta_q x} W^{(q)}(x); x \in \mathbb{R}\}$ と定義すると、

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W_{\zeta_q}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta + \zeta_q) - q}, \quad \beta > 0$$

が得られる。関数 W_{ζ_q} は単調増加であり、

$$W_{\zeta_q}(x) \sim \frac{1}{\psi'(\zeta_q)} \quad \text{as } x \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

本稿では

$$W_{\zeta_q}''(x) < 0, \quad x \geq 0 \quad (3.6)$$

と仮定する。この条件は例えばレヴィー測度が完全単調 (completely monotone) な場合などに成り立つ ([13] を参照)。一般的にも、 W_{ζ_q} の凹性は Surya [14] の数値計算などからも合理的な仮定であることがわかる。

最後に Kyprianou and Surya [11] の Lemma 4.3 と 4.4 より、ゼロ付近で尺度関数は以下を満たす

$$W^{(q)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{非有界変動} \\ \frac{1}{\mu}, & \text{有界変動} \end{cases},$$

$$W^{(q)'}(0+) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma^2}, & \sigma > 0 \\ \infty, & \sigma = 0 \text{ かつ } \Pi(0, \infty) = \infty \\ \frac{q + \Pi(0, \infty)}{\mu^2}, & \text{複合ポワソン} \end{cases}.$$

3.2 最適解

尺度関数を使うことにより、問題 (2.1) を書き換える。まず、すべての $x \in \mathbb{R}$ において θ のラプラス変換 (2.2) は

$$\zeta(x) = Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\zeta_q} W^{(q)}(x) \quad (3.7)$$

となり、

$$h(x) = \left[p \left(\frac{1}{q} \left(1 - Z^{(q)}(x) \right) + \frac{1}{\zeta_q} W^{(q)}(x) \right) - \alpha \left(Z^{(q)}(x) - \frac{q}{\zeta_q} W^{(q)}(x) \right) - \gamma \right] 1_{\{x>0\}} \quad (3.8)$$

と書くことができる。

次に、買い手はデフォルト確率が十分に小さくなった場合に解約することが最適と考えられ、最適解は (3.4) の形で与えられることが予想される。その閾値の候補 B^* を求め、 ν_{B^*} の最適性を証明する。ここですべての $B > 0$ について

$$G^{(q)}(B) := \frac{p}{q} \left(Z^{(q)}(B) - 1 \right) + \alpha Z^{(q)}(B) + \gamma$$

とし

$$\varrho(B) := (p + \alpha q) W^{(q)}(B) - \frac{W^{(q)'}(B)}{W^{(q)}(B)} G^{(q)}(B)$$

と定義する。すると、(3.6) の条件化の下では $\varrho(B)$ は単調関数となり、

$$\varrho(B) = 0 \quad (3.9)$$

を満たす B は多くても一つとなる。その解が存在する場合にはその値を B^* とし、それ以外の場合は、 $\varrho(B) > 0 \ \forall B > 0$ の時に $B^* = 0$ 、 $\varrho(B) < 0 \ \forall B > 0$ の時に $B^* = \infty$ とする。

この閾値戦略は

$$\nu_{B^*} := \inf \{ t \geq 0 : X_t \geq B^* \text{ or } X_t \leq 0 \} \quad (3.10)$$

となり、まず $0 < B^* < \infty$ の場合には、相当する価値関数は

$$v_{B^*}(x) = \begin{cases} W^{(q)}(x) \left(\frac{p + \alpha q}{\Phi(q)} - \frac{G^{(q)}(B^*)}{W^{(q)}(B^*)} \right) 1_{\{x \neq 0\}}, & -\infty < x < B^*, \\ h(x), & x \geq B^*, \end{cases} \quad (3.11)$$

となる。また $B^* = \infty$ の場合は一切解約しないことを意味し、 $v_{B^*}(x) = 0$ となる。 $B^* = 0$ の場合は、 $\nu_{B^*} = 0$ を意味し、これは

1. $\sigma = 0$,
2. $\Pi(0, \infty) < \infty$,
3. $p - q\gamma - (\alpha + \gamma)\Pi(0, \infty) \geq 0$,

の条件がそろったときのみ起こることが示される。

このように定義された ν_{B^*} は最適であり、その価値関数は $v_{B^*}(x)$ で与えられることが証明できる。つまり

$$v_{B^*}(x) = \sup_{\nu \in \mathcal{S}} \mathbb{E}^x \left[e^{-r\nu} h(X_\nu) 1_{\{\nu < \infty\}} \right]$$

である。この結果と (2.5) および (3.7) から CDS の価値 V が求められる。

4 数値計算

このセクションでは、買い手の最適行使戦略および CDS スプレッドの動きを計算結果を用いて論じる。ここでは超指数的 (hyperexponential) なジャンプを持つ spectrally negative なレヴィー過程を考える。超指数分布の集合は完全単調な分布の集合で稠密であり ([5, 6] を参照)、この形のレヴィー過程によって、レヴィー過程の広い集合について近似が可能である。例えば、Asmussen et al. [1] は CGMY 過程のレヴィー密度を超指数分布で近似している。

4.1 超指数分布のジャンプをもつ spectrally negative なレヴィー過程

超指数分布のジャンプをもつ spectrally negative なレヴィー過程は

$$X_t = x + \mu t + \sigma B_t - \sum_{n=1}^{N_t} Z_n, \quad 0 \leq t < \infty \quad (4.1)$$

の形を取る。ここで $B = \{B_t; t \geq 0\}$ は標準ブラウン運動、 $N = \{N_t; t \geq 0\}$ はパラメータ λ のポワソン過程、 $Z = \{Z_n; n = 1, 2, \dots\}$ は互いに独立で同一の分布に従い、ある $0 < \eta_1 < \dots < \eta_m < \infty$ について

$$f(z) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \eta_i e^{-\eta_i z}, \quad z > 0,$$

の確率密度をもつ確率変数の列とする。また、ラプラス指数 (3.1) は

$$\psi(s) = \mu s + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 - \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{s}{\eta_i + s} \quad (4.2)$$

となる。

ここでは $\sigma > 0$ の場合を考え、Egami and Yamazaki [5] において明示的に求められている尺度関数を利用する。 $\sigma = 0$ の場合は [5] を参照のこと。まず、 $\psi(s) = q$ の実数解の中で負の値をとるものが $m+1$ あり、その絶対値 $\{\xi_{i,q}; i = 1, \dots, m+1\}$ は

$$0 < \xi_{1,q} < \eta_1 < \xi_{2,q} < \dots < \eta_m < \xi_{m+1,q} < \infty$$

を満たす。そして、

$$A_{k,q} := \frac{\prod_{j \in \{1, \dots, m\}} \left(1 - \frac{\xi_{k,q}}{\eta_j}\right)}{\prod_{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}} \left(1 - \frac{\xi_{k,q}}{\xi_{i,q}}\right)}, \quad 1 \leq k \leq m+1$$

とすると尺度関数は各 $x \geq 0$ について

$$\begin{aligned} W^{(q)}(x) &= \frac{2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,q} \xi_{i,q}} \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,q} \left(\frac{\xi_{i,q}}{\zeta_q + \xi_{i,q}} \right) \left[e^{\zeta_q x} - e^{-\xi_{i,q} x} \right], \\ Z^{(q)}(x) &= 1 + \frac{2q}{\sigma^2 \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,q} \xi_{i,q}} \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,q} \left(\frac{\xi_{i,q}}{\zeta_q + \xi_{i,q}} \right) \left[\frac{1}{\zeta_q} (e^{\zeta_q x} - 1) + \frac{1}{\xi_{i,q}} (e^{-\xi_{i,q} x} - 1) \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

となる。さらに

$$W_{\zeta_q}(x) = \frac{2}{\sigma^2 \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,q} \xi_{i,q}} \sum_{i=1}^{m+1} A_{i,q} \left(\frac{\xi_{i,q}}{\zeta_q + \xi_{i,q}} \right) \left[1 - e^{-(\zeta_q + \xi_{i,q})x} \right], \quad x \geq 0,$$

となり、 x に関して凹関数であり (3.6) が成り立つことが確認できる。

4.2 超指数分布による近似

密度関数 $f(\cdot)$ が完全単調である分布関数は超指数分布関数で近似することができる。そのため、Egami and Yamazaki [5] で論じられているように、完全単調なレヴィー密度をもつ spectrally negative なレヴィー過程の尺度関数は (4.3) で表される尺度関数で近似することが可能である。ここでは Feldmann and Whitt [6] の結果を用い (4.1) において Z がパレート分布をもつものを一例として扱う。

パレート分布は a と b の正のパラメータをもち、

$$F(t) = 1 - (1 + bt)^{-a}, \quad t \geq 0$$

である。Feldmann and Whitt [6] は完全単調な密度を持つ分布を超指数分布で近似するアルゴリズムを提供し、特にパレート・ワイブル分布について計算結果を求めている。ここでは、その結果を用い、(4.1) において Z がパレート確率変数で $a = 1.2$ と $b = 5$ のパラメータを持つものを考える。Table 1 ではそのパレート分布を超指数分布で近似した場合のパラメータを示している。そのパラメータから (4.3) の形で生成された尺度関数を近似として用いる。近似の収束に関しては [5] を参照のこと。

i	α_i	η_i	i	α_i	η_i
1	8.37E-11	8.3E-09	8	0.000147	0.0020
2	7.18E-10	6.8E-08	9	0.001122	0.0100
3	5.56E-09	3.9E-07	10	0.008462	0.0570
4	4.27E-08	2.2E-06	11	0.059768	0.3060
5	3.27E-07	1.2E-05	12	0.307218	1.5460
6	2.50E-06	6.5E-05	13	0.533823	6.5160
7	1.92E-05	3.5E-04	14	0.089437	23.304

Table 1: $a = 1.2$ と $b = 5$ のパラメータをもつパレート分布の超指数分布による近似 (Feldmann and Whitt [6], Table 9)。

4.3 計算結果

上記のレヴィー過程でかつ他のパラメータを $q = 0.03$ 、 $\sigma = 0.2$ 、 $\alpha = 1$ 、 $x = 1.5$ 、 $\gamma = 50\text{bps}$ とする。また λ と μ の値に関してはリスク中立条件 $\psi(1) = q$ が成り立つように定める。

Figure 1 では最適閾値 B^* を p の関数として表している。まず B^* は p に関して単調減少であることが確認できる。この事はプレミアム (買い手にとってのコスト) が増加するにつれ、解約が早まることから明らかである。また、 B^* は λ とともに増加することが確認でき、これは λ の増加に伴いゼロを一瞬にして下回る確率が増えることに起因している。Figure 2 では CDS の価値 V を p の関数として表している。価値関数 V は p に関して減少関数であり、 p が十分に大きいときには V は $-\gamma$ となる。また λ が増加するにつれて、 V も増加する。

Figure 3 は $V = 0$ となる CDS スプレッド p^* を初期点 $X_0 = x$ の関数として表し、解約権の無い場合 (バニラ CDS) との比較を表している。 V の p についての単調性から、 p^* の値は一意になり、二分法などで p^* は計算することが出来る。ここから明らかなように、 x がゼロから離れるに

つれて、言い換えればデフォルト確率が小さくなるにつれて、CDS スプレッド p^* は減少する。また、バニラ CDS に比べて、解約権のある場合はスプレッドが高くなっているのが確認できる。

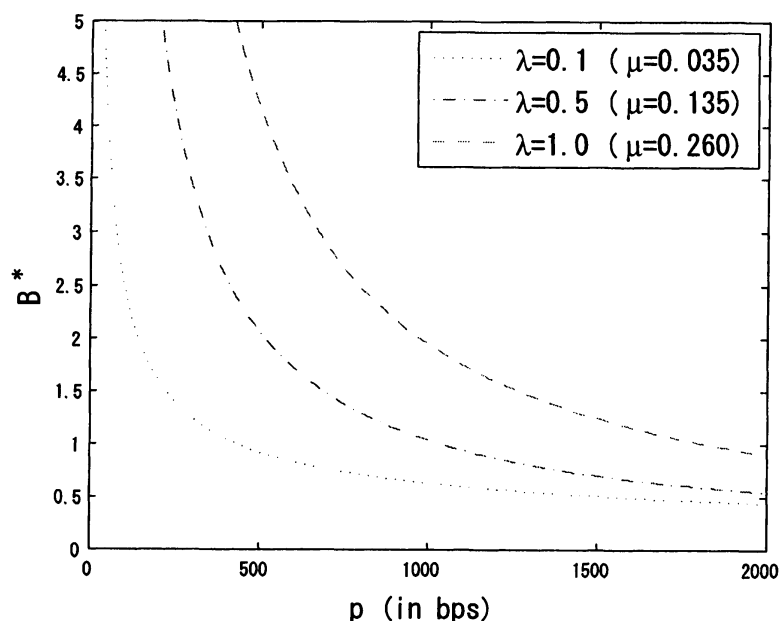


Figure 1: 最適閾値 B^*

References

- [1] S. ASMUSSEN AND D. MADAN AND M. PISTORIUS, *Pricing equity default swaps under an approximation to the CGMY Levy model*, Journal of Computational Finance, 11(2), 79–93, 2007.
- [2] CARIBONI, J. AND SCHOUTENS, W., *Pricing credit default swaps under Lévy models*, The Journal of Computational Finance, 10(4): 1–21, 2007.
- [3] BIELECKI, T., CRÉPEY, S., JEANBLANC, M. AND RUTKOWSKI, M., *Defaultable game options in a hazard process model*, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 2009, 1-33, 2009.
- [4] EGAMI, M. AND YAMAZAKI, K., *Precautionary measures for credit risk management in jump models*, Discussion Papers, Kyoto University and Osaka University, 2010.
- [5] EGAMI, M. AND YAMAZAKI, K., *On scale functions of spectrally negative Lévy processes with phase-type jumps*, Discussion Paper, Osaka University, 2010.
- [6] FELDMANN, ANJA AND WHITT, WARD, *Fitting mixtures of exponentials to long-tail distributions to analyze network performance models*, Performance Evaluation, 31, 245-279, 1998.

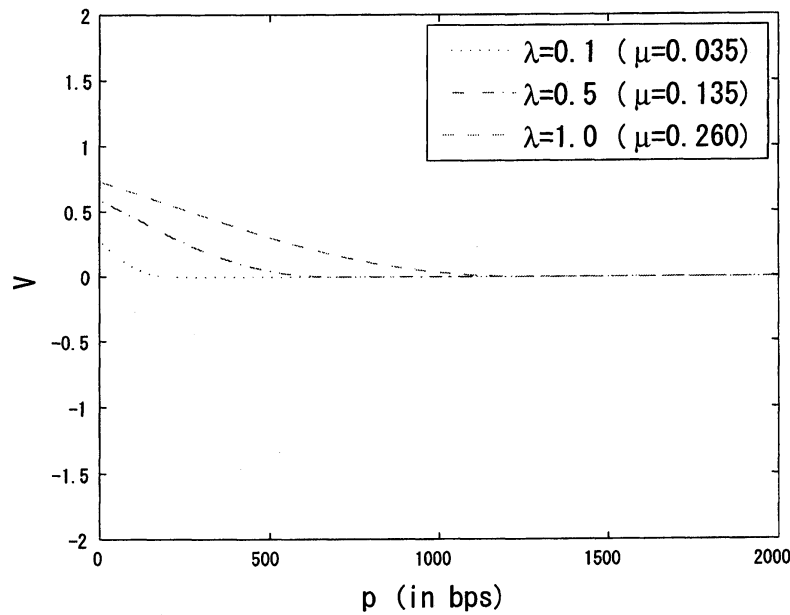


Figure 2: 価値関数 V の p に関する動き

- [7] HILBERINK, B. AND ROGERS, L. C. G., *Optimal capital structure and endogenous default*, Finance and Stochastics, 6, 237–263, 2002.
- [8] KOU, S.G. AND WANG, H., *First passage times of a jump diffusion process*, Advances in Applied Probability, 35(2), 504–531, 2003.
- [9] KOVALOV, P. AND LINETSKY, V., *Pricing convertible bonds with stock price, interest rate and credit risks*, Working Paper, 2006.
- [10] KYPRIANOU, A. E., *Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications*, 2006.
- [11] KYPRIANOU, A. E. AND SURYA, B. A., *Principles of smooth and continuous fit in the determination of endogenous bankruptcy levels*, Finance Stoch., 11(1), 131–152, 2007.
- [12] LEUNG, T. AND YAMAZAKI, K., *American Step-Up and Step-Down Credit Default Swaps under Lévy Models*, Discussion Paper, Osaka University, 2010.
- [13] LOEFFEN, R. L., *On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes*, The Annals of Applied Probability, 18(5), 1669–1680, 2008.
- [14] SURYA, B. A., *Evaluating scale functions of spectrally negative Lévy processes*, Advances in Applied Probability, 45(1), 135–149, 2008.
- [15] ZHOU, C., *The term structure of credit spreads with jump risk*, Journal of Banking and Finance, 25, 2015–2040, 2001.

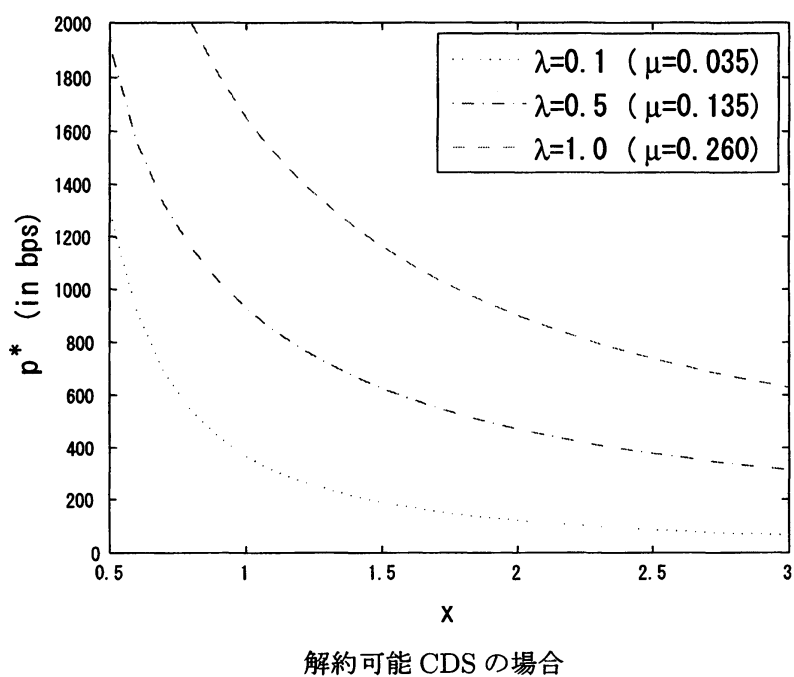
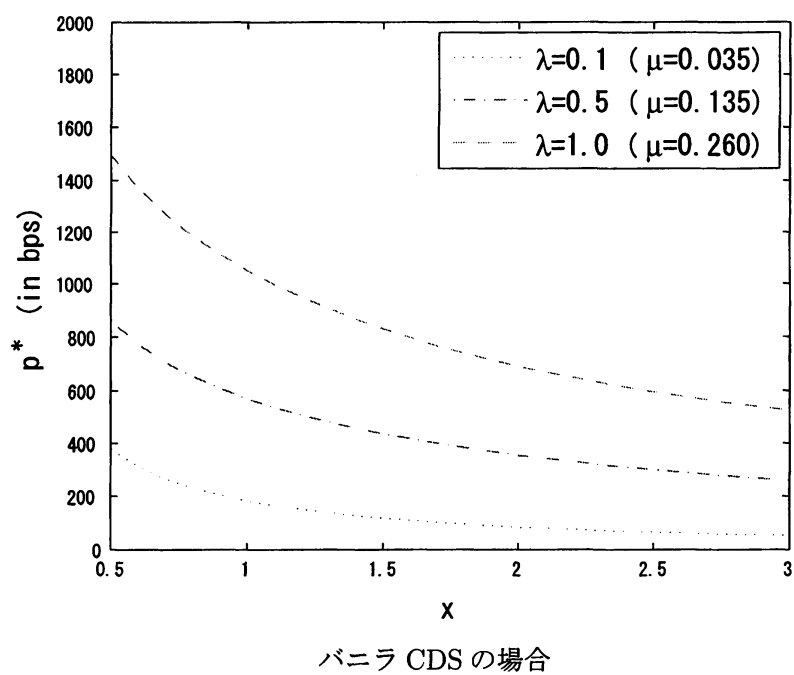


Figure 3: バニラ CDS と解約可能 CDS の CDS スプレッド p^*