

Lacunary Walsh Series の従う極限定理について

筑波大学数学系 福山克司 (Katusi Fukuyama)

0. 前言 研究集会の後、楠岡成雄先生に助言を頂き、講演した内容より更に発展を見ましたので、ここではそれを整理して述べたいとおもいます。有益な助言を下さった楠岡先生及び講演の機会を与えて下さった風巻紀彦先生そしてこの結果の計算の基礎の大部分を負うところの高橋茂先生にこの場を借りて深くお礼申し上げたいと思います。

1. 主定理 lacunary Walsh series の従う平均中心極限定理についてのべる。整数列 $\{n_m\}$ は間隙条件

$$(1.1) \quad n_{m+1} / n_m \geq 1 + cm^{-\alpha}, \quad c > 1 \text{ and } 0 \leq \alpha < 1/2$$

をみたすとする。Walsh 函数列の部分列 $\{w_{n_m}\}$ を確率空間 $([0, 1], dx)$ 上の確率変数列と思い、その挙動を調べる。簡単のために $\xi_j = w_{n_j}$ と書くことにする。実数列 $\{a_n\}$ は

$$A_n^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \rightarrow \infty, \quad a_n = o(A_n n^{-\alpha} (\log n)^{-1/2}) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

をみたすとする。この条件のもとでは、

$$(1.2) \quad \lambda_n \rightarrow 0, \quad A_n \lambda_n \rightarrow \infty \text{ and } a_n = O(A_n n^{-\alpha} (\log n)^{-1/2} \lambda_n) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

を満たすような正数列 $\{\lambda_n\}$ がとれるので、これを1つ固定する。 $S_n = a_1 \xi_1 + \cdots + a_n \xi_n$ とし $A_n^{-1} S_n$ の分布函数を F_n , 標準正規分布の分布函数を G とする。

$$\text{定理} \quad \|F_n - G\|_\infty = O(\lambda_n^{1/4}) \text{ and } \|F_n - G\|_1 = O(\lambda_n^{2/7}) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

注意 この二つの評価より $\|F_n - G\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) の評価が得られる。

また、 $a_n \equiv 1$ の場合には、 $\lambda_n = n^{\alpha-1/2} (\log n)^{1/2}$ ととれる。

2. 準備 高橋先生の論文の方針に概ね従い計算していく。

$$p(k) = \max \{ m ; n_m \leq 2^k \}, \quad \Delta_k = S_{p(k+1)} - S_{p(k)},$$

$$B_k = A_{p(k+1)} \text{ and } l_k = \lceil \alpha \log p(k) - \log c + 1 \rceil$$

とおく。このとき

$$(2.1) \quad p(k+1) - p(k) = O(p^\alpha(k)), \quad p(k+1)/p(k) \rightarrow 1 \quad \text{and} \\ p(k)/p(k-1_k) \rightarrow 1 \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

である。実際、

$$2c^{-1}p^\alpha(k) \geq 2^{1_k} \geq n_{p(k)} / n_{p(k-1_k)+1} > \prod_{m=p(k-1_k)+1}^{p(k)} (1 + cm^{-\alpha}) \\ > 1 + \{p(k) - p(k-1_k)\}cp^{-\alpha}(k)$$

なので

$$p(k) - p(k-1_k) = O(p^{-2\alpha}(k)) \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

であるから

$$p(k-1_k) / p(k) = 1 + O(p^{2\alpha-1}(k)) = 1 + o(1) \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

となり最後の式が示される。他の2式も同様に示される。

(1.1) と (2.1) より次の評価を得る。

$$(2.2) \quad b_k = \max \{ |a_n| ; p(k) < m \leq p(k+1) \}$$

$$= O(B_k p^{-\alpha}(k) (\log p(k))^{-1/2} \lambda_{p(k)}),$$

$$b'_k = \max \{ b_j ; k-1_k \leq j \leq k \} = O(B_k p^{-\alpha}(k) (\log p(k))^{-1/2}),$$

$$C_k = \sum_{m=p(k)+1}^{p(k+1)} |a_m| \leq b_k (p(k+1) - p(k)) = O(B_k (\log p(k))^{-1/2} \lambda_{p(k)}),$$

$$C'_k = \max \{ C_j ; k-1_k \leq j \leq k \} = O(B_k (\log p(k))^{-1/2} \lambda_{p(k)}),$$

$$C''_k = \max \{ C_j ; j \leq k \} = O(B_k \lambda_{p(k)}) \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

補題 1.
$$E \left(B_N^{-2} \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E\Delta_j^2) \right)^2 = O(\lambda_{p(N)}) \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

証明. $p(k) < i < j \leq p(k+1)$ とすると

$$n_j - n_i \geq n_i c i^{-\alpha} \geq 2^k c p^{-\alpha}(k) \geq 2^{k-\alpha \log p(k) + \log c}$$

なので、 $k-1_k \leq s < k$ の範囲の Rademacher 関数 r_s が少なくとも1つ $\xi_i \xi_j$ にかかっ

ている。それ故 $m \leq k-1_k$ なら $E(\Delta_m^2 - E\Delta_m^2)(\Delta_k^2 - E\Delta_k^2) = 0$ である。さらに

$E(\Delta_m^2 - E\Delta_m^2)(\Delta_k^2 - E\Delta_k^2)$ は $E\xi_p \xi_q \xi_r \xi_s$ の形の積分の和に書けるが、

$E\xi_p \xi_q \xi_r \xi_s = 1$ となる s は p, q, r について一意であるから、

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{m < k \leq N} E(\Delta_m^2 - E\Delta_m^2)(\Delta_k^2 - E\Delta_k^2) \right| = \left| \sum_{k=1}^N \sum_{m=k-1}^k E(\Delta_m^2 - E\Delta_m^2)(\Delta_k^2 - E\Delta_k^2) \right| \\
& \leq \sum_{k=1}^N \sum_{m=k-1}^k C_k^2 C_m b'_k \leq \sum_{k=1}^N b'_k C_k^2 C_k^2 \\
& = O\left(\sum_{k=1}^N C_k^2 B_k^2 (\log p(k))^{-1} l_k p^{-\alpha(k)} \lambda_{p(k)}^2 \right) \\
& = O\left(\sum_{k=1}^N (B_k^2 - B_{k-1}^2) (p(k+1) - p(k)) B_k^2 p^{-\alpha(k)} \lambda_{p(k)}^2 \right) \\
& = O\left(\sum_{k=1}^N (B_k^2 - B_{k-1}^2) B_k^2 \lambda_{p(k)}^2 \right) \\
& = O(B_N^4 \lambda_{p(N)}^2)
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N E(\Delta_j^2 - E\Delta_j^2)^2 & \leq \sum_{j=1}^N E\Delta_j^4 \leq \sum_{j=1}^N C_j^2 E\Delta_j^2 \leq C_N'' \sum_{j=1}^N E\Delta_j^2 \\
& = O(B_N^4 \lambda_{p(N)}^2) \text{ as } N \rightarrow \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

補題2. ある $1 \geq L_2 > 0$ が存在して $|t| \leq L_2 \lambda_{p(N)}^{-1/3}$ ならば,

$$E \exp \left(\left| t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E\Delta_j^2) \right| \right) \leq 2e$$

をみたす.

証明

$$m(0)=1, \quad m(j+1) = \min \{ m; m-1_m \geq m(j) \} \wedge N,$$

$$T_j = \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1} (\Delta_k^2 - E\Delta_k^2)$$

とすると, $\{T_{2j}\}$, $\{T_{2j+1}\}$ は multiplicative system になる. 即ち

$$ET_{2i_1} \cdots T_{2i_r} = 0 \quad \text{and} \quad ET_{2i_1+1} \cdots T_{2i_r+1} = 0 \quad \text{if } r \in \mathbb{N} \text{ and } i_1 < \cdots < i_r$$

が成立する. さらに

$$\begin{aligned}
\|T_j\|_\infty & \leq \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1} C_k^2 \leq l_{m(j+1)} C_{m(j+1)}^2 \\
& = O(B_{m(j+1)}^2 (\log p(m(j+1)))^{-1} \lambda_{p(m(j+1))}^2 l_{m(j+1)})
\end{aligned}$$

$$= O(B_{m(j+1)}^2 \lambda_{p(m(j+1))}^2)$$

であるから,

$$\max_j \|T_j\|_\infty = O(B_N^2 \lambda_{p(N)}^2) \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

よって L_2 を十分小さく取れば

$$4t^2 B_N^{-2} \max_j \|T_j\|_\infty \leq 1/2, \quad t^4 B_N^{-2} \max_j \|T_j\|_\infty \leq 1/32$$

を満たすようにできる.

$$\begin{aligned} E \exp \left(\left| t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E\Delta_j^2) \right| \right) &= E \exp \left(\left| t^2 B_N^{-2} \sum_j T_j \right| \right) \\ &\leq E \exp \left(t^2 B_N^{-2} \sum_j T_j \right) + E \exp \left(t^2 B_N^{-2} \sum_j -T_j \right) \\ &\leq E^{1/2} \exp \left(2t^2 B_N^{-2} \sum_j T_{2j} \right) E^{1/2} \exp \left(2t^2 B_N^{-2} \sum_j T_{2j+1} \right) \\ &\quad + E^{1/2} \exp \left(2t^2 B_N^{-2} \sum_j -T_{2j} \right) E^{1/2} \exp \left(2t^2 B_N^{-2} \sum_j -T_{2j+1} \right) \end{aligned}$$

ここで $e^{w \leq (1+w)e^{w^2}}$ ($|w| \leq 1/2$) を用いて最初の積分を評価する.

$$E \exp \left(4t^2 B_N^{-2} \sum_j T_{2j} - 16t^4 B_N^{-4} \sum_j T_{2j}^2 \right) \leq E \prod_j \left(1 + 4t^2 B_N^{-2} \sum_j T_{2j} \right) = 1.$$

ところで,

$$\begin{aligned} |T_{2j}| &= \left| \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1} (\Delta_k^2 - E\Delta_k^2) \right| \leq \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1} (\Delta_k^2 - E\Delta_k^2) + 2 \sum_{k=m(j)}^{m(j+1)-1} E\Delta_k^2 \\ &\leq T_{2j} + 2(B_{m(2j+1)}^2 - B_{m(2j)}^2) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} 16t^4 B_N^{-4} \sum_j T_{2j}^2 &\leq 16t^4 B_N^{-4} \left(\max_j \|T_j\|_\infty \right) \sum_j |T_{2j}| \\ &\leq 16t^4 B_N^{-4} \left(\max_j \|T_j\|_\infty \right) \left(\sum_j T_{2j} + 2B_N^2 \right) \\ &\leq 2t^2 B_N^{-2} \sum_j T_{2j} + 1 \end{aligned}$$

であるから,

$$E \exp \left(2t^2 B_N^{-2} \sum_j T_{2j} \right) \leq e.$$

他の積分も同様に評価されるので、補題は示された。□

補題3. ある $L_3 > 0$ が存在して $|t| \leq L_3$ なら $E \exp(t B_N S_{p(N+1)}) \leq e$ が成り立つ。

証明. $|t| \leq L_3 \leq 1/2$ なら $2|t| B_N^{-1} C_N'' \leq 1/2$ となるように L_3 をとる。

$$E \exp \left(2t B_N^{-1} \sum_{j=1}^N A_j - 4t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N A_j^2 \right) \leq E \left(1 + 2t B_N^{-1} A_j \right) = 1.$$

故に,

$$\begin{aligned} E \exp(t B_N S_{p(N+1)}) &= E \exp \left(t B_N^{-1} \sum_{j=1}^N A_j - 2t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N A_j^2 \right) \exp \left(2t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N A_j^2 \right) \\ &\leq E^{1/2} \exp \left(2t B_N^{-1} \sum_{j=1}^N A_j - 4t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N A_j^2 \right) E^{1/2} \exp \left(4t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N A_j^2 \right) \\ &\leq e^{2t^2} E^{1/2} \exp \left(4t^2 B_N^{-2} \sum_{j=1}^N (A_j^2 - E A_j^2) \right) \end{aligned}$$

ここで L を改めて補題2の条件を満たすように小さくとりなおせばよい。□

3. 定理の証明

ここでは

$$e^w = (1+w) \exp \left(2^{-1} w^2 + R(w) \right), \quad |R(w)| \leq |w|^3 \quad \text{if} \quad |w| \leq 1/2$$

を用いる。 z は複素数で $8|\operatorname{Im} z| \leq L_3$, $|z| \leq 2^{-1} L_2 \lambda_{p(N)}^{-1/3}$ をみたすとする。

$T_n(z) = \prod_{j=1}^n \left(1 + i z B_n^{-1} A_j \right)$ とおくと $E T_n(z) = 1$ である。また,

$$|T_n(z)| \leq \exp \left(-B_n^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N A_j^2 - \operatorname{Im} z B_n^{-1} S_{p(n+1)} \right)$$

である。これらのことから,

$$\begin{aligned} &\left| E \exp \left(i z A_{p(N+1)}^{-1} S_{p(N+1)} \right) - e^{-z^2/2} \right| \\ &= \left| E T_N(z) \left[\exp \left(-2^{-1} B_N^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N A_j^2 + \sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} A_j) \right) - e^{-z^2/2} \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq E \exp \left(B_N^{-2} (\operatorname{Im} z)^2 \sum_{j=1}^N \Delta_j^2 - \operatorname{Im} z B_n^{-1} S_{p(n+1)} \right) \\
&\quad \times \left| \exp \left(\sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} \Delta_j) \right) - \exp \left(2^{-1} B_N^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) \right) \right| \\
&\leq E \exp \left(B_N^{-2} (\operatorname{Im} z)^2 \sum_{j=1}^N \Delta_j^2 - \operatorname{Im} z B_n^{-1} S_{p(n+1)} \right) \\
&\quad \times \left[\left| \exp \left(\sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} \Delta_j) \right) - 1 \right| + \left| \exp \left(2^{-1} B_N^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) \right) - 1 \right| \right]
\end{aligned}$$

$|e^{w-1}| \leq |w| e^{|w|}$ をもちいて,

$$\begin{aligned}
&\leq E \exp \left(B_N^{-2} (\operatorname{Im} z)^2 \sum_{j=1}^N \Delta_j^2 - \operatorname{Im} z B_n^{-1} S_{p(n+1)} \right) \\
&\quad \times \left[\left| \sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} \Delta_j) \right| \exp \left| \sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} \Delta_j) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| 2^{-1} B_N^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) \right| \exp \left| 2^{-1} B_N^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) \right| \right] \\
&\leq E^{1/8} \exp \left(8 B_N^{-2} (\operatorname{Im} z)^2 \sum_{j=1}^N \Delta_j^2 \right) E^{1/8} \left(-\operatorname{Im} z B_n^{-1} S_{p(n+1)} \right) \\
&\quad \times \left[E^{1/2} \left(\sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} \Delta_j) \right)^2 E^{1/8} \exp \left| 8 \sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} \Delta_j) \right| \right. \\
&\quad \left. + E^{1/2} \left(B_N^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) \right) E^{1/8} \exp \left| 4 B_N^{-2} z^2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) \right| \right]
\end{aligned}$$

ここで,

$$E \exp \left(8 B_N^{-2} (\operatorname{Im} z)^2 \sum_{j=1}^N \Delta_j^2 \right) = e^{8 (\operatorname{Im} z)^2} E \exp \left(8 B_N^{-2} (\operatorname{Im} z)^2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) \right)$$

であり, また

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^N R(i z B_n^{-1} \Delta_j) \right| &\leq |z|^3 B_N^{-3} C_N'' \sum_{j=1}^N \Delta_j^2 \\
&\leq \lambda_{p(N)} |z|^3 \left(B_N^{-2} \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) + 1 \right) \\
&\leq B_N^{-2} L_2 \sum_{j=1}^N (\Delta_j^2 - E \Delta_j^2) + 1
\end{aligned}$$

なので

$$E \left(\sum_{j=1}^N R(izB_n^{-1}A_j) \right)^2 \leq \lambda_{p(N)} |z|^3 \left[E \left(B_N^{-2} \sum_{j=1}^N (A_j^2 - EA_j^2) \right) + 1 \right]$$

$$E \exp \left| 8 \sum_{j=1}^N R(izB_n^{-1}A_j) \right| \leq e E \exp \left(B_N^{-2} L_2 \sum_{j=1}^N (A_j^2 - EA_j^2) \right)$$

となる。以上のことより補題を用いて、

$$|\hat{F}_{p(N)}(z) - \hat{G}(z)| \leq L \lambda_{p(N)} (|z|^3 + |z|^2) \quad \text{if } |z| \leq L' \lambda_{p(N)}^{-1/3}$$

となることが分かり、結局、

$$|\hat{F}_N(z) - \hat{G}(z)| \leq L \lambda_N (|z|^3 + |z|^2) \quad \text{if } |z| \leq L' \lambda_N^{-1/3}$$

が示された。ここで Essen の定理を用いる。

定理

$$\|F - G\|_{\infty} \leq C_1 \int_{-T}^T \left| \frac{\hat{F}(t) - \hat{G}(t)}{t} \right| dt + C_2/T$$

$$\begin{aligned} \|F - G\|_1 &\leq C_3 \left[\int_{-T}^T \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{F}(t) - \hat{G}(t)}{t} \right) \right|^2 dt \right]^{1/2} \\ &\quad + C_4 \left[\int_{-T}^T \left| \frac{\hat{F}(t) - \hat{G}(t)}{t} \right|^2 dt \right]^{1/2} (1 + 1/T) + C_5/T \end{aligned}$$

以下 L は本質的でない定数を表し、行ごとに必ずしも等しくないものとする。

$$\left| \frac{\hat{F}_N(z) - \hat{G}(z)}{z} \right| \leq L \lambda_N (|z|^2 + |z|) \quad \text{if } |z| \leq L' \lambda_N^{-1/3}$$

であるから、 C_t を t 中心で半径 $(L_3/8) \wedge (|t|/2)$ の円とすると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{F}_N(t) - \hat{G}(t)}{t} \right) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_t} \frac{\hat{F}_N(\zeta) - \hat{G}(\zeta)}{(\zeta - t)^2 \zeta} d\zeta \right| \\ &\leq \sup_{\zeta \in C_t} \left| \frac{\hat{F}_N(\zeta) - \hat{G}(\zeta)}{\zeta} \right| \left((L_3/8) \wedge (|t|/2) \right)^{-1} \\ &\leq L \lambda_N (|t|^2 + |t| + 1) \quad \text{if } |t| \leq L' \lambda_N^{-1/3} \end{aligned}$$

これら二つの評価により、

$$\|F_N - G\|_{\infty} \leq L \lambda_N (T^3 + T^2 + T^{-1}) \quad \text{and}$$

$$\|F_N - G\|_1 \leq L\lambda_N \left(T^{5/2} + T^{3/2} + T^{1/2} + T^{-1} \right) \quad \text{if} \quad |T| \leq L\lambda_N^{-1/3}$$

ここで, それぞれ $T = \lambda_N^{-1/4}$, $T = \lambda_N^{-2/7}$ とすると目標の評価がえられる. $\square$

参考文献

T.Nakata , On the rate of convergence in mean central limit theorem for martingale differences , Rep.of Statist.Appl., Union of Japan Sci.and Engin.,23 (1976) 4 , 10-15.

S.Takahashi , On the law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series II , Tohoku Math.J., 27 (1975) , 391-403.