

Fibered 2-knots and Thurston Norm

東大理 斎藤 昌彦 (Masahico Saito)

§ 0. Introduction

S^4 の中の smooth knot K ($\cong S^2$) が fibered であるとは,
 $S^4 \setminus K$ が S^1 上の fiber bundle であり, fiber は M^0 , ただし
 $M^0 = \text{punc } M = M \setminus \text{Int } B^3$, M は closed orientable 3-manifold
のときをいう。このとき, diffeomorphism $h: M^0 \rightarrow M^0$ によって

$$S^4 \setminus K = M^0 \times_h S^1 = M^0 \times I / \sim$$

$$((x, 0) \sim (h(x), 1), x \in M^0)$$

と書けるが, この h を monodromy という。

また, K の Alexander polynomial $f(t)$ は,

$$f(t) = \det(tI - h_*)$$

で与えられる。ただし, h_* は, h が $H_1(M^0, \mathbb{Q})$ に誘導する
automorphism である。

Polynomial $f(t)$ が fibered 2-knot の Alexander polynomial
となるための条件は,

(☆) $f(1) = \pm 1$, 最高次と最低次の項の係数が ± 1

であることが知られている。本稿では, fibered 2-knot の新しい構成法を考えるが, まず今まで知られている構成法を以下にまとめてみる。

(0) Zeeman の twist spun knot [Z]

$K \subset S^3$ を classical knot とするとき,

$$(S^4, \tilde{K}) = \{(S^3, K) \setminus \text{Int}(B^3, B^1)\} \times_{\tau^k} S^1 \cup S^2 \times D^2$$

(τ^k は K を k 回 "回転" する写像, $k \neq 0$)

で与えられる。Fiber は $(N^k)^0$, N^k は S^3 の K に沿った k -fold cyclic branched covering である。この covering の transformation が $\tilde{K}$ の monodromy となる。したがって Alexander polynomial $f(t)$ は $(t^k - 1)$ を割り切る。[L], [M], [P] に於てこの方法が一般化された:

$$(S^3 \setminus K) \times_g S^1 \bigcup_A Tw, \quad Tw \text{ は "twin" ([M])}$$

とくに $g = \text{identity}$ のときには, fiber は $((N^k)_p)^0$, $(N^k)_p$ は N^k の branch set (K の lift) に沿って surgery したものであり, monodromy はやはり finite order を持つ。

(1) Untwisted spin of classical fibered knot

(S^3, K) が classical fibered knot のときには,

$$(S^4, \tilde{K}) = \{(S^3, K) \setminus \text{Int}(B^3, B^1)\} \times S^1 \cup S^2 \times D^2$$

も fibered knot となり, fiber は $(\#_{2g} S^2 \times S^1)^0$, (g は K の genus)

Alexander polynomial は K のそれに等しい。

(2) Asano-Yoshikawa の方法 [A-Y]

条件 (★) を満たす任意の polynomial $f(t)$ に対し, $f(t)$ を Alexander polynomial として持つ fibered 2-knot が存在することが, [A-Y] に於て, 次の様にして証明された。

$h: F_m \rightarrow F_m$ を rank m の free group F_m の automorphism で, 次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) h の abel 化 $h_*: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ に対し, $\det(tI - h_*) = f(t)$

(ii) 群 $\langle t, x_1, \dots, x_m \mid t, tx_i t^{-1} h(x_i)^{-1} \ (i=1, \dots, m) \rangle$ は

"Andrews-Curtis moves" [A-C] で trivial presentation になる。

このとき, V_m を 4次元 handle body, $\bar{h}: V_m \rightarrow V_m$ を,

$\bar{h}_* = h: \pi_1(V_m) \rightarrow \pi_1(V_m)$ となる diffeomorphism とするとき,

$V_m \times_{\bar{h}} S^1$ に $(\text{1点}) \times_{\bar{h}} S^1$ に沿って 2-handle を attach すると B^5 になり,

その boundary に求める fibered 2-knot が実現される。

この方法でも fiber は $(\#_m S^2 \times S^1)^0$ になっている。

以上の構成法で, (0) では fiber としては いろいろな 3-manifold ができるが Alexander polynomial には $(t^n - 1)$ を割り切るという制限がつき, 一方 (1) (2) では Alexander polynomial は豊富にできるが fiber としては $(\# S^2 \times S^1)^0$ しかできないことがわかる。

§1. Thurston norm との関係

F を orientable surface とし, $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$ を各 component とするとき, $\chi_-(F) = \sum_{i=1}^n \max\{0, -\chi(F_i)\}$ を F の complexity という。

M を closed orientable 3-manifold とするとき, $a \in H_2(M, \mathbb{Z})$ に対し, $\chi(a) = \min\{\chi_-(F) \mid [F] = a, F \subset M \text{ は closed orientable surface embedded in } M\}$ と定義すると, χ は pseudo-norm になり, $H_2(M, \mathbb{R})$ に連続に拡張する。これを Thurston norm という。また, M が条件

(*) χ は $H_2(M, \mathbb{Z})$ 上の norm である

($\Leftrightarrow H_2(M, \mathbb{Z})$ の 0 でない元を represent する任意の embedded surface の Euler 数が負である)

を満たすとき, $\text{Image}(\text{Diff}(M) \rightarrow \text{Aut } H_2(M, \mathbb{Z}))$ は有限である。

(以上 Thurston [T])

したがって fibered 2-knot $K \subset S^4$ の fiber M° に対し, M が条件 (*) を満たすならば, K の Alexander polynomial は, ある n に対し, $(t^n - 1)$ を割り切らなければならない。これは §0 の (0) に対応している。逆に豊富な Alexander polynomial をもつ fibered 2-knot の fiber は (*) を満たさないものでなければならないが, 実際 §0 の (1), (2) では fiber はすべて $(\#S^2 \times S^1)^\circ$ (homology を represent する surface はすべて S^2) であった。以上のことから, 与えられた Alexander polynomial をもつ

fibered 2-knot で, fiber が irreducible であるものが存在するか, という問題を考える。

§ 2. Main Theorem

$f(t)$ が classical fibered knot の Alexander polynomial となるための条件は,

$$(\star_0) \quad f(t) \equiv f(t^{-1}) \quad (\Leftrightarrow f(t) = f(t^{-1}) \cdot t^k \text{ for some } k \in \mathbb{Z})$$

かつ $(\star)$ を満たす

である。

Theorem. $f(t)$ を $(\star_0)$ を満たす任意の polynomial とするとき, Alexander polynomial が $f(t)$ で, fiber は M^0 , M は irreducible となる fibered 2-knot が存在する。

Outline of proof. (S^3, K) を Alexander polynomial が $f(t)$ となる classical fibered knot とし, $(S^4, \bar{K})$ をその untwisted spin (§0, (1)) とする。

$$(S^4, \bar{K}) = \{(S^3, K) \setminus \text{Int}(B^3, B^1)\} \times S^1 \cup S^2 \times D^2$$

$N(K)$ を $(S^3$ 内での) K の tubular neighbourhood で, $N(K) \supset B^3$ を満たすものとし, p を S^1 の 1 点, T を $(\partial N(K)) \times p \subset S^4 \setminus \bar{K}$ とする。

$$(S^4, \bar{K}) = \{ (S^3, K) \setminus \text{Int}(B^3, B^1) \} \times \overset{p}{\cong} S^1 \cup S^2 \times D^2$$

$$\bigcup \partial N(K) \times p = T \quad (\cong T^2)$$

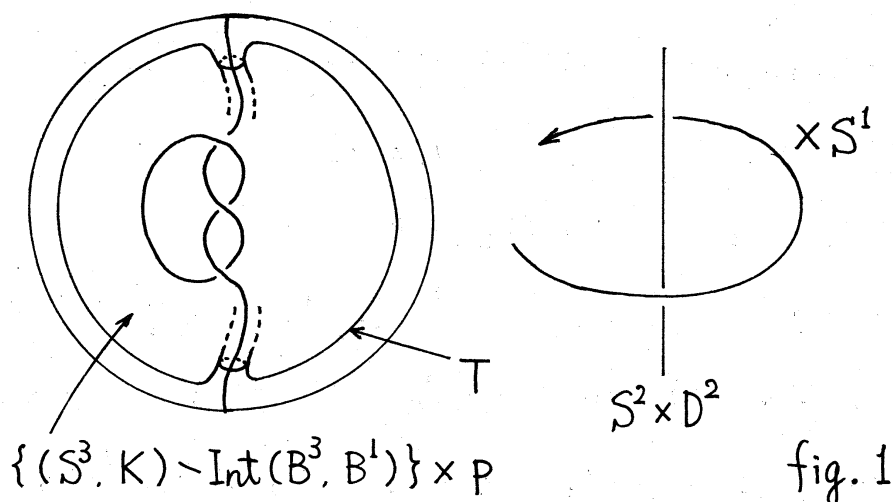


fig. 1

T は次の性質をもつ:

- ① $(S^4, \bar{K})$ のすべての fiber $S (\cong (\#_{2g} S^2 \times S^1)^0, g \text{ は } K \text{ の genus})$ に transverse
 - ② unknotted (i.e. $S^1 \times D^2$ を bound, $[H-K]$) in S^4
- S^4 内での T の tubular neighbourhood を $N(T)$, $\partial N(T)$ 上の simple closed curves m, l_1, l_2 を

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \partial D^2 \subset D^2 \times T^2 \cong N(T) \\ l_1 \subset S \text{ (}\bar{K}\text{ の一枚の fiber)} \\ l_2 = (S \text{ 上の 1 点}) \times (\text{fiber の方向}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} : H_1(S^4 \setminus T, \mathbb{Z}) \text{ の generator} \\ \\ 0 \text{ in } H_1(S^4 \setminus T, \mathbb{Z}) \end{array}$$

ととる。

また, $S' \times S' \times D^2$ の boundary 上に simple closed curves m', l_1', l_2' を

$$\begin{array}{ccc} S' & \times & S' \times D^2 \\ \downarrow & & \downarrow \quad \cup \\ P_1 & P_2 & \partial D^2 \\ & & \downarrow \\ & & P_3 \end{array} \supset \begin{cases} m' = P_1 \times P_2 \times \partial D^2 \\ l_1' = S' \times P_2 \times P_3 \\ l_2' = P_1 \times S' \times P_3 \end{cases}$$

ととり, diffeomorphism $h: \partial(S' \times S' \times D^2) \rightarrow \partial(S^4 - \text{Int } N(T))$

$$h \begin{cases} h(m') = m + k l_1, & k \in \mathbb{Z} \\ h(l_1') = l_1, & h(l_2') = l_2 \end{cases}$$

を満たすものとする。②より, $\{S^4 - \text{Int } N(T)\} \cup_h (S' \times S' \times D^2)$ は再び S^4 となり, ①と h のとり方により, $\bar{K}$ のすべての fiber に同じ surgery をしたことになるので, この h による S^4 の surgery の結果, 新しい S^4 の中の fibered 2-knot $\tilde{K}$ が得られる。

($\tilde{K}$ は, $\bar{K}$ の fibering に対して "equivariant Dehn surgery" をしてできた 2-knot である。)

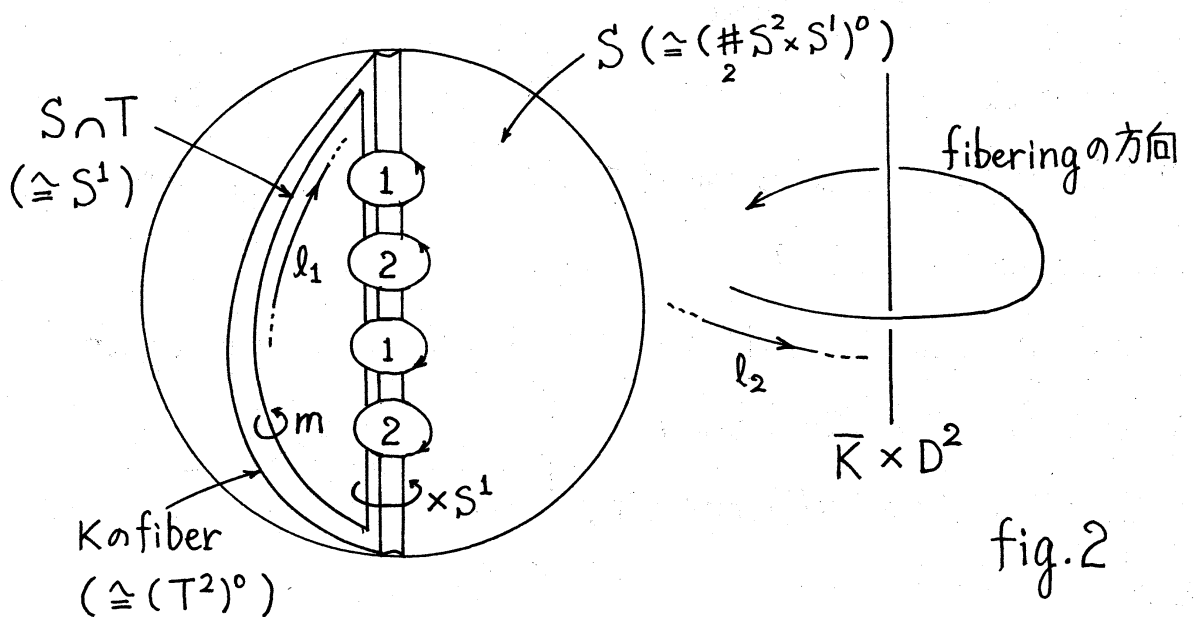
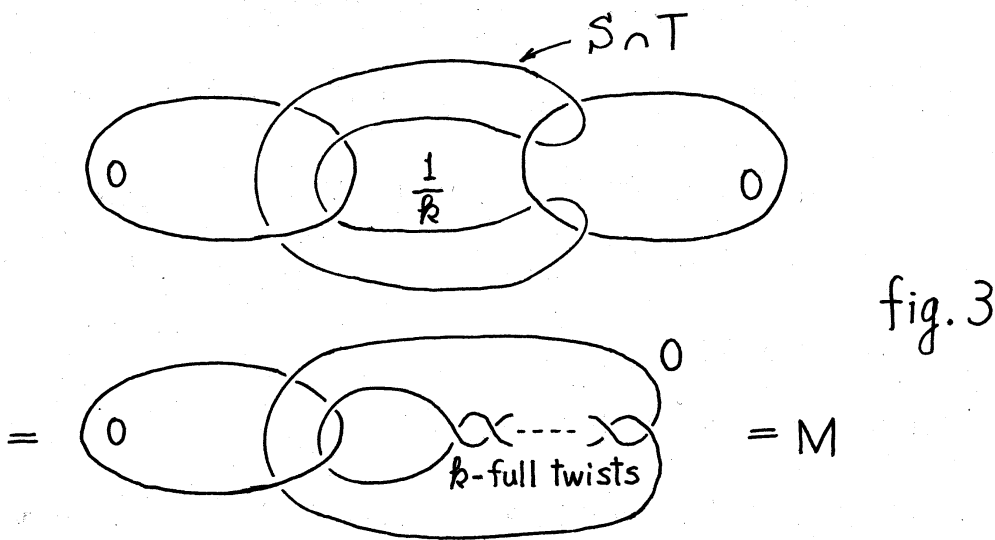


fig. 2 は K の genus が 1 のときを示している。1 の ball, 2 の ball
同志を同一視すると $(\#_2 S^2 \times S^1)^0$ になっている。この中に K の fiber の
一枚 ($\cong (T^2)^0$) が入っていて、その上に $S \cap T$ がある。

これによる surgery でできた fibered 2-knot $\tilde{K}$ の fiber は, S を,
 $S \cap T$ に沿って $(1/k)$ -surgery したものである。fig. 3 はその
fiber M を示している。



monodromy の不変性: $\tilde{K}$ の monodromy を $F_1: S \rightarrow S$, $\tilde{K}$ の
monodromy を $F_2: M^0 \rightarrow M^0$ とするとき, $S \setminus \text{Int} N(S \cap T) \cong M^0 \setminus \text{Int} N(M \cap T)$
であり, $F_1|_{S \setminus \text{Int} N(S \cap T)} = F_2|_{M^0 \setminus \text{Int} N(M \cap T)}$ が成り立つ。

$H_1(S; \mathbb{Z})$, $H_1(M^0; \mathbb{Z})$ の生成元として, それぞれ $S \setminus \text{Int} N(S \cap T)$,
 $M^0 \setminus \text{Int} N(M \cap T)$ 内の loop をとることができるので, 上のことから,
 $(F_1)_* = (F_2)_*$ となる。 $\tilde{K}$ の Alexander polynomial は K のそれに
等しいので, $\tilde{K}$ の Alexander polynomial も $f(t)$ となる。

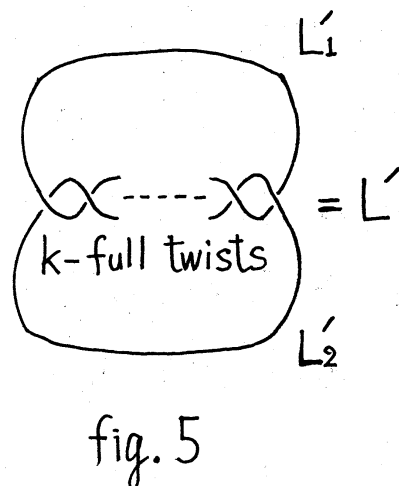
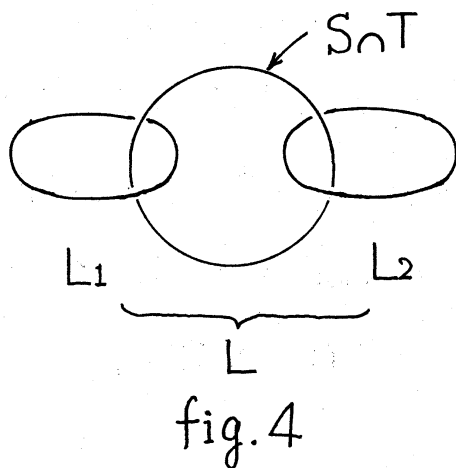
M の irreducibility : (宮崎桂氏の指摘による) M を以下の様に記述しなおす。(以下簡単のため K の genus を 1 とする。) $L = L_1 \cup L_2$ を 2-component unlink とし, $g: \partial N(L_1) \rightarrow \partial N(L_2)$ を, L_1 の meridian-longitude pair を L_2 の meridian-longitude pair にうつす diffeomorphism とするとき, $S^3 - \text{Int}\{N(L_1) \cup N(L_2)\}$ の boundary を g で同一視してできる 3-manifold は $\#_2 S^2 \times S^1$ である:

$$S^3 - \text{Int}\{N(L_1) \cup N(L_2)\} / g \cong \#_2 S^2 \times S^1$$

これを $\bar{K}$ の fiber S と思うと, その中に, $S \cap T$ は fig. 4 の様に入っている. M は $S \cap T$ に沿って surgery して得られるから, fig. 5 の link $L' = L'_1 \cup L'_2$ に対し, $g': \partial N(L'_1) \rightarrow \partial N(L'_2)$ を g から得られる diffeomorphism とするとき,

$$M \cong S^3 - \text{Int}\{N(L'_1) \cup N(L'_2)\} / g'$$

となる. L' は unsplittable link であり, このようにしてできる 3-manifold は irreducible であることが Brakes [B] によってわかっている. したがって M は irreducible である.



§ 3. Other Examples

以上の構成法を用いて, さらに別の fiber を持つ fibered 2-knot を構成することができる。

$K_1, K_2 \subset S^3$ を (unknot でない) classical fibered knots とするとき, fig. 6 のように, $S^3 \setminus K_1 \# K_2$ 内に, disjoint に embed された, $K_1 \# K_2$ のすべての fiber に transverse に交わる 3つの tori T_0, T_1, T_2 が存在する。§ 2 と同様に, $K_1 \# K_2$ の untwisted spin $\overline{K_1 \# K_2}$ を考え, T_0, T_1, T_2 が $S^4 \setminus \overline{K_1 \# K_2}$ 内に入っていると思い, それらに沿って "equivariant Dehn surgery" をすることによって, 新しい fiber ができる。fig. 7 はこの結果できた fiber を示している。

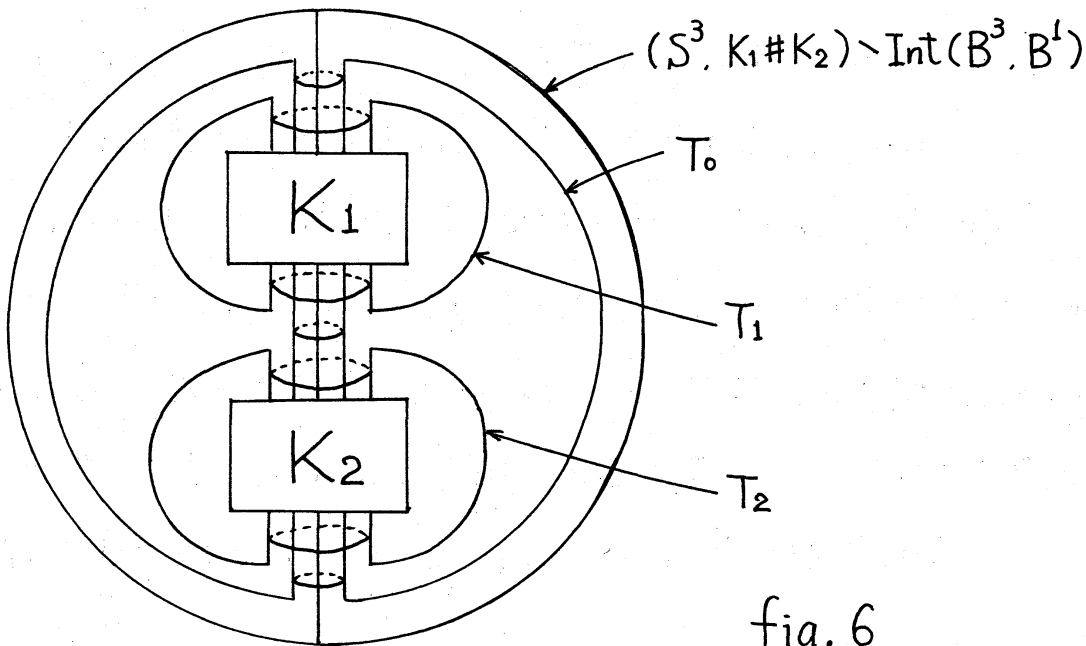
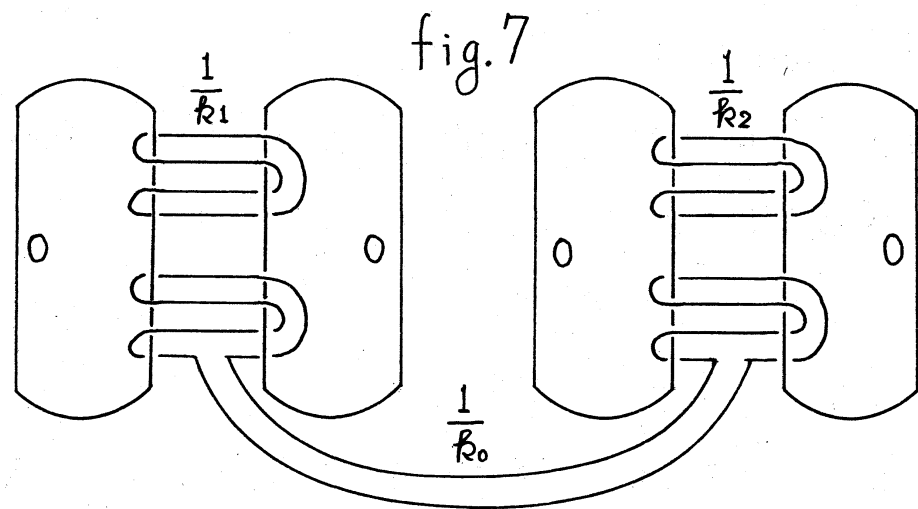


fig. 6



ただし, fig. 7 では, K_1 と K_2 の genus がいずれも 1 であり, T_0 , T_1 , T_2 に沿ってそれぞれ係数 $1/k_0$, $1/k_1$, $1/k_2$ の surgery をしてできた fiber である。同様に K_1 , K_2 の genus を変えたり, connected sum の数を増して多くの tori に沿って surgery することにより, いろいろな 3-manifold を fiber として持つ fibered 2-knot を構成することができる。

また, periodic monodromy をもつ classical fibered knot (torus knot) の complement の中に, すべての fiber に transverse な immersed torus をつくり, この untwisted spin を考え, 4次元で embedded torus になおして surgery する方法も考えられるが, この場合は できた 2-knot も periodic monodromy をもつため, §0.(0) の方法で構成される 2-knot と一致してしまう可能性がある。

§ 4. Final Remark

§ 2. の Theorem の仮定の polynomial についての条件 (☆₀) でなく、一般に (☆) で成り立つような fibered 2-knot を構成するために、§ 0. (2) の構成法を応用することが考えられる。すなわち、

$h: F_m \rightarrow F_m$ を rank m の free group F_m の automorphism で、

§ 0. (2) の条件 (i) (ii) に加え、次の条件 (iii) も満たすものとする:

(iii) h は 1 でない fixed point γ ($\gamma \in F_m$, $h(\gamma) = \gamma$) をもち、 $\pi_1(V_m) \cong F_m$ で γ を represent する simple closed curve $\bar{\gamma}$ を $\partial V_m \cong \#_m S^2 \times S^1$ にとると、 $S^4 = (\#_m S^2 \times S^1)^0 \times_{\bar{h}} S^1 \cup S^2 \times D^2$ 内に embedded torus $T_{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma} \times_{\bar{h}} S^1$ がとれるが、この $T_{\bar{\gamma}}$ が S^4 の中で unknotted であるようにできる。(V_m , $\bar{h}$ 等については § 0 (2) 参照)

このとき、§ 0 (2) の方法で構成した fibered 2-knot に対して、§ 2. と同様に $T_{\bar{\gamma}}$ に沿って "equivariant Dehn surgery" をすることによって新しい fibered 2-knot が得られる。

ところが $\det(\pm I - h_*)$ が (☆) を満たすような h は、あまり fixed point を持たないことが知られている。(cf. [G-T], [G], [S]) とくに、次のような予想がある。

$m \times m$ -integer matrix で determinant が ± 1 , 固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とするとき、 $|\lambda_1| > 1$, $|\lambda_i| < 1$ ($i=2, \dots, m$) をみたすものを

"P-V matrix" といい、automorphism $h: F_m \rightarrow F_m$ に対して

abel化 $h_*: \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ が P-V matrix となるとき h を "P-V automorphism" という。Stallings [S] は「rank が 3 以上の P-V automorphism の fixed point は 1 だけである」という予想をした。具体的に与えられた automorphism に対して fixed point を求める方法は知られている [G] が、一般にはこの予想は未解決である。もしこの予想が正しいければ、P-V matrix の characteristic polynomial となるような polynomial に対しては、上に述べたような構成法は使えないことがわかる。条件 (☆) を満たし、かつ (i)(ii)(iii) をも満たす polynomial を characteristic polynomial として持つような free group の automorphism はまだ見つかっていない。したがってこの構成法で新しい fibered 2-knot ができるかどうかは不明である。

References

- [A-G] J.J. Andrews & M.L. Curtis
Free Groups and Handle Bodies, Proc. Amer. Math. Soc. 16,
(1965) 192-195
- [A-Y] K. Asano & K. Yoshikawa
On Polynomial Invariants of Fibered 2-knots. Pacific J.
of Math. 97, 2, (1981) 267-269
- [B] W.R. Brakes
Property R and Superslices. Quart. J. Math. Oxford

(2) 31 (1980) 263-281

[G] S. M. Gersten

On Fixed Points of Certain Automorphisms of Free Groups.

Proc. London Math. Soc. (3) 48 (1984) 72-90

[G-T] R. Z. Goldstein & E. C. Turner

Automorphisms of Free Groups and Their Fixed Points.

Inv. Math. 78, 1-12 (1984)

[H-K] F. Hosokawa & A. Kawauchi

Proposals for Unknotted Surfaces in Four-spaces.

Osaka J. Math. 16 (1979) 233-248

[L] R. A. Litherland

Deforming Twist-spun Knots. Trans. Amer. Math. Soc.

250, (1979) 311-331

[M] J. M. Montesinos

On Twins in the 4-sphere I, II. Quart. J. Math.

Oxford. 34, 171-199, 35, 73-83 (1983, 4)

[P] S. P. Plotnick

Fibered Knots in S^4 — twisting, spinning, rolling, surgery,
and branching. Four manifold theory, A.M.S. Contemporary

Math. (1982) 437-460

[S] J. R. Stallings

Topologically Unrealizable Automorphisms of Free Groups.

Proc. of Amer. Math. Soc. (1) 84 (1982) 21-24

[T] W.P. Thurston

A Norm for the Homology of 3-manifolds. Preprint.

[Z] E.C. Zeeman

Twisting Spun Knots. Trans. Amer. Math. Soc. 115

(1965) 471-495