

旗 Bott-Samelson 多様体の幾何学的及び表現論的側面

東京工業大学理学院 藤田 直樹 (Naoki Fujita)*[†]

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概要

本稿は RIMS 共同研究「変換群論における幾何・代数・組み合わせ論」における講演内容をまとめたものである。Eunjeong Lee 氏及び Dong Youp Suh 教授との共同研究 [5] に基づき、旗多様体及び Bott-Samelson 多様体の自然な拡張である旗 Bott-Samelson 多様体の幾何学的及び表現論的側面について考察する。

1 旗 Bott-Samelson 多様体

旗 Bott-Samelson 多様体は旗多様体及び Bott-Samelson 多様体の自然な拡張である。 $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ とし、 $B \subset G$ を上三角行列全体のなす部分群 (Borel 部分群) とする。本稿の内容は一般の連結単連結半単純代数群 G まで自然に拡張することができるが、簡単のため A 型に限って話を進めることにする。 $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 $I \subset [n]$ とする。このとき正の整数 $n_1, n_2, \dots, n_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し、

$$\{1, 2, \dots, n+1\} \setminus I = \{n_1, n_1 + n_2, \dots, n_1 + n_2 + \dots + n_s\}$$

となる。 $L_I \subset G$ を次の形の行列全体のなす部分群とする:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix};$$

ただし $1 \leq t \leq s$ に対して A_t は n_t 次の正方行列であり、

$$\det(A_1) \det(A_2) \cdots \det(A_s) = 1$$

を満たす。このとき $L_I \cup B$ で生成される G の部分群を P_I と書き、放物型部分群という。

例 1.1.

- (1) $I = [n]$ とする。このとき $P_{[n]} = G$ である。
- (2) $I = \emptyset$ とする。このとき $P_{\emptyset} = B$ である。
- (3) $i \in [n]$ に対して F_i を $(i+1, i)$ -成分のみ 1 で他の成分は 0 である $(n+1)$ -次正方行列とする。このとき放物型部分群 $P_i := P_{\{i\}}$ は $B \cup \exp(\mathbb{C}F_i)$ で生成される G の部分群である。 P_i は Borel 部分群 B を除く放物型部分群の中で包含関係に関して極小であり、極小放物型部分群と呼ばれる。

*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp

[†]日本学術振興会特別研究員 (PD)

定義 1.2 ([11, Ch. II.13] 参照). $\mathcal{I} = (I_1, I_2, \dots, I_r)$ を $[n]$ の部分集合の列とする. このとき次で定義される非特異射影多様体 $Z_{\mathcal{I}}$ を旗 **Bott-Samelson** 多様体という:

$$Z_{\mathcal{I}} := (P_{I_1} \times P_{I_2} \times \cdots \times P_{I_r}) / B^r;$$

ここで B^r の右作用は $p_1 \in P_{I_1}, p_2 \in P_{I_2}, \dots, p_r \in P_{I_r}$ 及び $b_1, b_2, \dots, b_r \in B$ に対して

$$(p_1, p_2, \dots, p_r) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_r) := (p_1 b_1, b_1^{-1} p_2 b_2, \dots, b_{r-1}^{-1} p_r b_r)$$

と定める.

例 1.3. $\mathcal{I} = ([n])$ とする. このとき $Z_{\mathcal{I}}$ は旗多様体 G/B と一致する.

例 1.4. すべての $1 \leq k \leq r$ に対して $|I_k| = 1$ とし, $I_k = \{i_k\}$ と書く. このとき $Z_{\mathcal{I}}$ は語 $\mathbf{i} := (i_1, i_2, \dots, i_r)$ に対応する Bott-Samelson 多様体 $Z_{\mathbf{i}} := (P_{i_1} \times P_{i_2} \times \cdots \times P_{i_r}) / B^r$ と一致する. Bott-Samelson 多様体 $Z_{\mathbf{i}}$ は Bott-Samelson [2], Demazure [3] 及び Hansen [8] によって導入された多様体であり, シューベルト多様体の重要な特異点解消を与えている.

Grossberg-Karshon [7] は Bott-Samelson 多様体 $Z_{\mathbf{i}}$ が複素構造の変形により Bott 多様体と呼ばれるトーリック多様体に退化することを証明した. この退化は Pasquier [19] によって Bott-Samelson 多様体のコホモロジーの消滅に応用されている. 本稿の目的は Grossberg-Karshon の結果 [7] を旗 Bott-Samelson 多様体まで拡張することである. 旗 Bott-Samelson 多様体の退化先には旗 Bott 多様体という flag bundle の列を取ることで構成される多様体が登場する. 退化先に現れる旗 Bott 多様体の具体的な表示についても説明する. さらに旗 Bott-Samelson 多様体の表現論への応用として, テンソル積表現の既約分解を Newton-Okounkov 凸体を用いて記述する公式についても解説する.

2 旗 Bott 多様体と複素構造の変形

まず 黒木-Lee-Song-Suh [15] によって導入された旗 Bott 多様体の定義を説明する.

定義 2.1 ([15, Definition 2.1]). 高さ r の旗 **Bott tower** とは次のような flag bundle の列のことである:

$$F_r \rightarrow F_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 = \{\text{pt}\}.$$

ただし各 $1 \leq k \leq r$ に対して F_{k-1} 上の正則直線束 $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \dots, \xi_k^{(m_k+1)}$ が存在し,

$$F_k = \mathcal{F}\ell \left(\bigoplus_{1 \leq l \leq m_k+1} \xi_k^{(l)} \right)$$

となるとする; ここで $\mathcal{F}\ell(\bigoplus_{1 \leq l \leq m_k+1} \xi_k^{(l)})$ は F_{k-1} 上のベクトル束 $\bigoplus_{1 \leq l \leq m_k+1} \xi_k^{(l)}$ が誘導する flag bundle である. 旗 Bott tower に登場する複素多様体 $F_1, \dots, F_r$ を旗 **Bott** 多様体という.

黒木-Lee-Song-Suh [15] によって与えられている, 旗 Bott 多様体の商多様体としての構成についても説明する. $H \subset G$ を対角行列全体のなす部分群とし, H の指標格子を P とする; つまり

$$P := \{ \text{指標 } \chi: H \rightarrow \mathbb{C}^\times \}$$

である. $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ に対して指標 $\chi_{\mathbf{a}} \in P$ を

$$\chi_{\mathbf{a}}(\text{diag}(t_1, t_2, \dots, t_{n+1})) := t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_{n+1}^{a_{n+1}} \quad (2.1)$$

と定義すると、写像

$$\mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow P, \mathbf{a} \mapsto \chi_{\mathbf{a}},$$

は全射になる。一般線形群 $GL_m(\mathbb{C})$ に対して、 $B_{GL_m(\mathbb{C})} \subset GL_m(\mathbb{C})$ を上三角行列全体のなす部分群とし、 $H_{GL_m(\mathbb{C})} \subset GL_m(\mathbb{C})$ を対角行列全体のなす部分群とする。また

$$\Upsilon: B_{GL_m(\mathbb{C})} \rightarrow H_{GL_m(\mathbb{C})}$$

を自然な全射とし、 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^m$ に対して指標 $\chi_{\mathbf{a}}: H_{GL_m(\mathbb{C})} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ を (2.1) と同様に定義する。

命題 2.2 ([15, Propositions 2.8, 2.11] 参照). $\{F_k\}_{0 \leq k \leq r}$ を高さ r の旗 Bott tower とする。このとき整数ベクトル

$$\mathbf{a}_{k,j}^{(l)} \in \mathbb{Z}^{m_j+1}, 1 \leq j < k \leq r, 1 \leq l \leq m_k + 1,$$

が存在し、 $\{F_k\}_{0 \leq k \leq r}$ は次の商多様体になす旗 Bott tower と同型である:

$$\{(GL_{m_1+1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{m_k+1}(\mathbb{C})) / (B_{GL_{m_1+1}(\mathbb{C})} \times \cdots \times B_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})})\}_{0 \leq k \leq r}.$$

ただし $B_{GL_{m_1+1}(\mathbb{C})} \times \cdots \times B_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})}$ の右作用は $g_1 \in GL_{m_1+1}(\mathbb{C}), \dots, g_k \in GL_{m_k+1}(\mathbb{C})$ 及び $b_1 \in B_{GL_{m_1+1}(\mathbb{C})}, \dots, b_k \in B_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})}$ に対して、

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (b_1, \dots, b_k) := (g_1 b_1, \Lambda_{2,1}(b_1)^{-1} g_2 b_2, \dots, \Lambda_{k,1}(b_1)^{-1} \Lambda_{k,2}(b_2)^{-1} \cdots \Lambda_{k,k-1}(b_{k-1})^{-1} g_k b_k)$$

と定義する; ここで

$$\Lambda_{k,j}: B_{GL_{m_j+1}(\mathbb{C})} \rightarrow H_{GL_{m_k+1}(\mathbb{C})}, b \mapsto \text{diag}(\chi_{\mathbf{a}_{k,j}^{(l)}}(\Upsilon(b)))_{1 \leq l \leq m_k+1},$$

である。

正の整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ と余指標 $\rho: \mathbb{C}^\times \rightarrow H$ であって、すべての $i \in [n]$ および $t \in \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\alpha_i(\rho(t)) = t^q$$

となるものを固定する。ただし $\alpha_i \in P$ は単純ルートである; つまり

$$\mathbf{a}_i := (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, -1, 0, \dots, 0)$$

に対して $\alpha_i = \chi_{\mathbf{a}_i}$ である。 $t \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\Upsilon_t: B \rightarrow B$ を

$$\Upsilon_t(b) = \rho(t)b\rho(t)^{-1}$$

と定義し、 $\Upsilon_0: B \rightarrow H$ を自然な全射とする。このとき写像

$$B \times \mathbb{C} \rightarrow B, (b, t) \mapsto \Upsilon_t(b),$$

は正則である。つまり Υ_0 は Υ_t の $t \rightarrow 0$ による極限となっている。各 $t \in \mathbb{C}$ に対して、複素多様体 $Z_{\mathcal{I}}^t$ を

$$Z_{\mathcal{I}}^t := (P_{I_1} \times P_{I_2} \times \cdots \times P_{I_r}) / B^r$$

と定義する; ここで B^r の右作用は $p_1 \in P_{I_1}, p_2 \in P_{I_2}, \dots, p_r \in P_{I_r}$ 及び $b_1, b_2, \dots, b_r \in B$ に対して

$$(p_1, p_2, \dots, p_r) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_r) := (p_1 b_1, \Upsilon_t(b_1)^{-1} p_2 b_2, \dots, \Upsilon_t(b_{r-1})^{-1} p_r b_r)$$

と定める。 $\Upsilon_1 = \text{id}_B$ のため $Z_{\mathcal{I}}^1$ は $Z_{\mathcal{I}}$ と一致している。また次の命題により $Z_{\mathcal{I}}^t$ は $Z_{\mathcal{I}}$ の複素構造の変形を与えていることがわかる。

命題 2.3. $Z_{\mathcal{I}}^t$ の微分多様体としての構造は $t \in \mathbb{C}$ に依らず一定である.

$t \in \mathbb{C}$ 及び $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in P$ に対して, $Z_{\mathcal{I}}^t$ 上の正則直線束 $\mathcal{L}_{\mathcal{I}, \lambda_1, \dots, \lambda_r}^t$ を

$$\mathcal{L}_{\mathcal{I}, \lambda_1, \dots, \lambda_r}^t := (P_{I_1} \times P_{I_2} \times \cdots \times P_{I_r} \times \mathbb{C})/B^r$$

と定める; ここで B^r の右作用は $p_1 \in P_{I_1}, p_2 \in P_{I_2}, \dots, p_r \in P_{I_r}, c \in \mathbb{C}$ 及び $b_1, b_2, \dots, b_r \in B$ に対して

$$\begin{aligned} & (p_1, p_2, \dots, p_r, c) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_r) \\ &:= (p_1 b_1, \Upsilon_t(b_1)^{-1} p_2 b_2, \dots, \Upsilon_t(b_{r-1})^{-1} p_r b_r, \lambda_1(\Upsilon(b_1)) \cdots \lambda_r(\Upsilon(b_r))c) \end{aligned}$$

と定義する. $(c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ を $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ の Cartan 行列とする; つまり

$$c_{i,j} := \begin{cases} 2 & (i = j), \\ -1 & (|i - j| = 1), \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

である. 次が本稿の一つ目の主結果である.

定理 2.4. すべての $1 \leq k \leq r$ に対して, ある $0 \leq u_k < n$ が存在し

$$I_k = \{u_k + 1, u_k + 2, \dots, u_k + m_k\}$$

となると仮定する; ここで $m_k := |I_k|$ である.

(1) $Z_{\mathcal{I}}^0$ は $Z_{\mathcal{I}'}^0$ 上の flag bundle

$$\mathcal{F}\ell(\mathcal{L}_{\mathcal{I}', 0, \dots, 0, \chi_1}^0 \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{I}', 0, \dots, 0, \chi_2}^0 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{I}', 0, \dots, 0, \chi_{m_r}}^0 \oplus \mathcal{L}_{\mathcal{I}', 0, \dots, 0}^0)$$

と一致する; ここで $\mathcal{I}' := (I_1, \dots, I_{r-1})$ であり, 各 $1 \leq j \leq m_r$ に対して

$$\chi_j := \alpha_{u_r+j} + \cdots + \alpha_{u_r+m_r}$$

である.

(2) 高さ r の旗 Bott tower

$$Z_{\mathcal{I}}^0 \rightarrow Z_{\mathcal{I}'}^0 \rightarrow Z_{(I_1, \dots, I_{r-2})}^0 \rightarrow \cdots \rightarrow Z_{(I_1)}^0 \rightarrow \{\text{pt}\}$$

は次の整数ベクトルにより与えられる:

$$\mathbf{a}_{k,j}^{(l)} = \left(\sum_{\substack{l \leq s \leq m_k, \\ p \leq l \leq m_j}} c_{u_j+l, u_k+s} \right)_{1 \leq p \leq m_j+1}.$$

注意 2.5. G が一般の連結単連結半単純代数群のとき, $I_k = \{u_k + 1, u_k + 2, \dots, u_k + m_k\}$ という仮定は P_{I_k}/B が A 型の旗多様体であることに対応する.

例 2.6. $G = SL_3(\mathbb{C})$, $\mathcal{I} = ([2], [2])$ とする. このとき高さ 2 の旗 Bott tower

$$Z_{\mathcal{I}}^0 \rightarrow Z_{([2])}^0 \rightarrow \{\text{pt}\}$$

は次の整数ベクトルで与えられる:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{2,1}^{(1)} &= \left(\sum_{\substack{1 \leq s \leq 2, \\ p \leq t \leq 2}} c_{t,s} \right)_{1 \leq p \leq 3} = (2, 1, 0), \\ \mathbf{a}_{2,1}^{(2)} &= (c_{1,2} + c_{2,2}, c_{2,2}, 0) = (1, 2, 0). \end{aligned}$$

特に $Z_{\mathcal{I}}^0$ は商多様体

$$(GL_3(\mathbb{C}) \times GL_3(\mathbb{C})) / (B_{GL_3(\mathbb{C})} \times B_{GL_3(\mathbb{C})})$$

と同型である. ただし $B_{GL_3(\mathbb{C})} \times B_{GL_3(\mathbb{C})}$ の右作用は $g_1, g_2 \in GL_3(\mathbb{C})$ 及び $b_1, b_2 \in B_{GL_3(\mathbb{C})}$ に対して

$$(g_1, g_2) \cdot (b_1, b_2) := (g_1 b_1, \Lambda_{2,1}(b_1)^{-1} g_2 b_2)$$

で与えられる; ここで b_1 の対角成分を $b_1(1), b_1(2), b_1(3)$ とするとき,

$$\Lambda_{2,1}(b_1) = \text{diag}(b_1(1)^2 b_1(2), b_1(1) b_1(2)^2, 1)$$

である.

3 Newton-Okounkov 凸体とテンソル積表現

まず Newton-Okounkov 凸体の定義から説明する. Newton-Okounkov 凸体は Kaveh-Khovanskii [13, 14] 及び Lazarsfeld-Mustata [17] によって系統的な定義がなされた概念であり, トーリック多様体に対するモーメント多面体の拡張となっている.

$$P_+ := \{\chi_{\mathbf{a}} \in P \mid \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n+1}), a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n+1} = 0\}$$

とおく. 簡単のため $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in P_+$ に対して $\mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} := \mathcal{L}_{\mathcal{I}, \lambda_1, \dots, \lambda_r}^1$ と書く. $\mathbb{C}$ -代数 $R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r})$ を

$$R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^{\otimes k})$$

と定義する. $N := \dim_{\mathbb{C}}(Z_{\mathcal{I}})$ とし, $\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^N$ 上の全順序 $<$ を

$$(k, \mathbf{a}) \leq (l, \mathbf{b}) \iff \begin{cases} k > l, \text{ または} \\ k = l, \mathbf{a} \leq \mathbf{b} \end{cases}$$

と定める. この全順序に関する付値

$$v: R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}^N$$

を取り, 次を仮定する:

$$(i) \ v(H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^{\otimes k}) \setminus \{0\}) \subset \{k\} \times \mathbb{Z}^N,$$

(ii) $\sigma \in R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r})$ に対して,

$$v(\sigma) = v(\sigma_{\max\{k|\sigma_k \neq 0\}})$$

である; ただし $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して σ_k を σ の $H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^{\otimes k})$ -成分とする.

定義 3.1 ([9, Sect. 3.1.1] 及び [14, Definition 1.10] 参照). $\mathcal{I} = (I_1, I_2, \dots, I_r)$ を $[n]$ の部分集合の列とし, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in P_+$ とする. 像 $\text{Im}(v)$ を含む最小の実閉錐を $C(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}, v) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^N$ とし, 集合 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}, v) \subset \mathbb{R}^N$ を

$$\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}, v) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N \mid (1, \mathbf{a}) \in C(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}, v)\}$$

と定める. この集合 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}, v)$ を **Newton-Okounkov 凸体** という.

v が付値であることから $\text{Im}(v)$ は半群となっている. この半群が有限生成のとき, Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}, v)$ は有理凸多面体となる. Newton-Okounkov 凸体の重要な応用の一つが Harada-Kaveh [9] による完全可積分系の構成である.

定理 3.2 ([9, Theorem B]). 像 $\text{Im}(v)$ が有限生成半群のとき, 通常の位相での開稠密部分集合 $U \subset Z_{\mathcal{I}}$ 及び $Z_{\mathcal{I}}$ 上の実数値連続関数の組 $F_1, \dots, F_N$ が存在し, 次が成り立つ:

- (1) $F_1, \dots, F_N$ の U への制限は U 上の完全可積分系を与える;
- (2) モーメント写像 $\mu = (F_1, \dots, F_N): Z_{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}^N$ の像は Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}, v)$ と一致する.

P_{I_1} の $Z_{\mathcal{I}}$ 及び $\mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}$ への作用を $p, p_1 \in P_{I_1}, p_2 \in P_{I_2}, \dots, p_r \in P_{I_r}$ 及び $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} p \cdot [p_1, \dots, p_r] &:= [pp_1, p_2, \dots, p_r], \\ p \cdot [p_1, \dots, p_r, c] &:= [pp_1, p_2, \dots, p_r, c] \end{aligned}$$

と定める. 射影 $\mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \rightarrow Z_{\mathcal{I}}$ がこれらの作用と compatible であるため, 大域切断のなす空間 $H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r})$ は自然に P_{I_1} -加群となる. $\mathcal{I} = ([n])$ とすると, $P_{I_1} = G$ かつ $Z_{\mathcal{I}} = G/B$ である. $\lambda \in P_+$ に対して $V(\lambda) := H^0(G/B, \mathcal{L}_{\lambda})^*$ とおくと, Borel-Weil 理論により集合 $\{V(\lambda) \mid \lambda \in P_+\}$ は有限次元既約 G -加群全体の集合と一致する. 以後 $\mathcal{I} = ([n], [n])$ とする. このとき対応する旗 Bott-Samelson 多様体は

$$Z_{\mathcal{I}} = G \times_B G/B$$

であり, $\lambda, \mu \in P_+$ に対して, G -加群としての同型

$$H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda, \mu})^* \simeq V(\lambda) \otimes V(\mu)$$

が成り立つ. すべての有限次元 G -加群は完全可約なので ([10, Sect. 14.3] 参照), 既約分解

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{\nu \in P_+} V(\nu)^{\oplus c_{\lambda, \mu}^{\nu}}$$

を得る. $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ なので, $V(\nu)$ の重複度 $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ は Littlewood-Richardson 係数と一致している ([6, Ch. 8] 参照). この重複度 $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ を具体的に記述することは G の表現論における重要な問題の一つである. Berenstein-Zelevinsky [1, Theorems 2.3, 2.4] は $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ をある具体的な有理

凸多面体の格子点の個数として記述した。本稿では Newton-Okounkov 凸体の格子点を用いて, Berenstein-Zelevinsky のものとは異なる公式を与える。

$$N_0 := \dim_{\mathbb{C}}(G/B) = \frac{n(n+1)}{2}$$

とおく。このとき $N := \dim_{\mathbb{C}}(Z_{\mathcal{I}}) = 2N_0$ である。

定義 3.3. 語 $(i_1, \dots, i_{N_0}) \in [n]^{N_0}$ が簡約語であるとは, 次の写像が双有理射となることである:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{N_0} &\rightarrow G/B, \\ (t_1, \dots, t_{N_0}) &\mapsto \exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_{N_0} F_{i_{N_0}}) \bmod B; \end{aligned}$$

ただし $F_i, i \in [n]$, は例 1.1 (3) で定義した行列である。

例 3.4. 語 $(1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in [n]^{N_0}$ は簡約語である。

$(i_1, \dots, i_{N_0}), (j_1, \dots, j_{N_0}) \in [n]^{N_0}$ を二つの簡約語とし,

$$\mathbf{i} := (i_1, \dots, i_{N_0}, j_1, \dots, j_{N_0}) \in [n]^N$$

とおく。このとき次の写像は双有理射である:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^N &\rightarrow Z_{\mathcal{I}}, \\ (t_1, \dots, t_N) &\mapsto (\exp(t_1 F_{i_1}) \cdots \exp(t_{N_0} F_{i_{N_0}}), \exp(t_{N_0+1} F_{j_1}) \cdots \exp(t_N F_{j_{N_0}})) \bmod B^2. \end{aligned}$$

この双有理射を用いて関数体 $\mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}})$ を有理関数体 $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_N)$ と同一視する。 $\mathbb{Z}^N$ 上の全順序 $<$ を次で定義する: $(a_1, \dots, a_N), (a'_1, \dots, a'_N) \in \mathbb{Z}^N$ に対して,

$$(a_1, \dots, a_N) < (a'_1, \dots, a'_N) \iff \text{ある } 1 \leq k \leq N \text{ について, } a_1 = a'_1, \dots, a_{k-1} = a'_{k-1}, a_k < a'_k.$$

この全順序 $<$ を用いて $t_1, \dots, t_N$ を変数とする単項式たちの間の順序 $<$ を次で定義する:

$$t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} < t_1^{a'_1} \cdots t_N^{a'_N} \iff (a_1, \dots, a_N) < (a'_1, \dots, a'_N).$$

以上の準備のもとで付値 $v_{\mathbf{i}}^{\text{high}}: \mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}}) \setminus \{0\} (= \mathbb{C}(t_1, \dots, t_N) \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{Z}^N$ を次のように定める: $f, g \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\text{high}}(f/g) := v_{\mathbf{i}}^{\text{high}}(f) - v_{\mathbf{i}}^{\text{high}}(g)$ とし,

$$f = ct_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N} + (\text{lower terms}) \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_N] \setminus \{0\}$$

に対して $v_{\mathbf{i}}^{\text{high}}(f) := -(a_1, \dots, a_N)$ とする; ここで c は 0 でない複素数であり, “lower terms” は上で定めた順序 $<$ に関して $t_1^{a_1} \cdots t_N^{a_N}$ より小さい単項式たちの線形結合である。大域切断 $0 \neq \tau \in H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda, \mu})$ を固定し, 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}^{\otimes k})$ を次のように $\mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}})$ の有限次元部分空間と同一視する:

$$H^0(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}^{\otimes k}) \hookrightarrow \mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}}), \sigma \mapsto \sigma/\tau^k.$$

すると $\mathbb{C}(Z_{\mathcal{I}})$ 上の付値 $v_{\mathbf{i}}^{\text{high}}$ は上で述べた条件を満たす $R(Z_{\mathcal{I}}, \mathcal{L}_{\lambda, \mu})$ 上の付値 $v_{\mathbf{i}}^{\text{high}}$ を誘導する。次が本稿の二つ目の主結果である。

定理 3.5. $\mathcal{I} = ([n], [n])$, $\lambda, \mu \in P_+$ とし, $(i_1, \dots, i_{N_0}), (j_1, \dots, j_{N_0}) \in [n]^{N_0}$ を二つの簡約語とする。

- (1) 像 $v_i^{\text{high}}(R(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}) \setminus \{0\})$ は有限生成半群である. 特に $\Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}})$ は有理凸多面体である.
- (2) 射影 $\pi: \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_0} \oplus \mathbb{R}^{N_0} \rightarrow \mathbb{R}^{N_0}$ を $\pi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \mathbf{b}$ により定義し,

$$\widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) := \pi(\Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}))$$

とおく. このとき格子点集合 $\widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0}$ は自然にテンソル積表現 $V(\lambda) \otimes V(\mu)$ の直和成分と重複度込みで 1 対 1 に対応する. 特に $\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0}$ に対応する既約表現を $V(\nu(\mathbf{y}))$ とすると, $c_{\lambda, \mu}^\nu$ は

$$\{\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0} \mid \nu(\mathbf{y}) = \nu\}$$

の位数と一致する.

- (3) $\mathbf{y} \in \widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) \cap \mathbb{Z}^{N_0}$ に対して, ファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y}) \cap \Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}})$ は簡約語 $(i_1, \dots, i_{N_0})$ に関する $V(\nu(\mathbf{y}))$ のストリング多面体と一致する (ストリング多面体については [1, 18] 参照).

例 3.6. $(i_1, \dots, i_{N_0}) = (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1)$ とする. このときファイバー $\pi^{-1}(\mathbf{y}) \cap \Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}})$ は指標 $\nu(\mathbf{y})$ に関する Gelfand-Zetlin 多面体とユニモジュラー同値である ([18, Sect. 5] 参照).

注意 3.7. G -加群 $H^0(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu})^* \simeq V(\lambda) \otimes V(\mu)$ は一般化 Demazure 加群 ([16] 参照) の特別な場合である. 筆者 [4] は一般化 Demazure 加群に対応する結晶基底 (一般化 Demazure 結晶) に着目し, ストリング多面体の理論を一般化 Demazure 加群にまで拡張した (結晶基底については [12] 参照). Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}})$ はこの一般化されたストリング多面体と一致している.

例 3.8. $G = SL_2(\mathbb{C})$, $I = ([1], [1])$, $\lambda = \chi_{(\lambda_1, 0)}$, $\mu = \chi_{(\mu_1, 0)} \in P_+$, $\mathbf{i} = (1, 1)$ とする. このとき大域切断 $0 \neq \tau \in H^0(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu})$ を適切に取ると,

$$\Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq a_2 \leq \min\{\lambda_1, \mu_1\}, 0 \leq a_1 \leq \lambda_1 + \mu_1 - 2a_2\}$$

が成り立つ. また

$$\widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) = \{a_2 \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a_2 \leq \min\{\lambda_1, \mu_1\}\}$$

であり, $a_2 \in \widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) \cap \mathbb{Z}$ は既約表現 $V(\chi_{(\lambda_1 + \mu_1 - 2a_2, 0)})$ に対応する. 実際

$$V(\lambda) \otimes V(\mu) \simeq \bigoplus_{0 \leq a_2 \leq \min\{\lambda_1, \mu_1\}} V(\chi_{(\lambda_1 + \mu_1 - 2a_2, 0)})$$

が成り立つ. 射影 $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は $\pi(a_1, a_2) = a_2$ で与えられ, $a_2 \in \widehat{\Delta}(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) \cap \mathbb{Z}$ に対して $\pi^{-1}(a_2) \cap \Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}}) = \{(a_1, a_2) \mid 0 \leq a_1 \leq \lambda_1 + \mu_1 - 2a_2\}$ が成り立つ. 第 1 成分への射影 $(a_1, a_2) \mapsto a_1$ により, $\pi^{-1}(a_2) \cap \Delta(Z_I, \mathcal{L}_{\lambda, \mu}, v_i^{\text{high}})$ は指標 $\chi_{(\lambda_1 + \mu_1 - 2a_2, 0)}$ に関する Gelfand-Zetlin 多面体と同一視される.

参考文献

- [1] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.* **143** (2001), 77–128.
- [2] R. Bott and H. Samelson, Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, *Amer. J. Math.* **80** (1958), 964–1029.
- [3] M. Demazure, Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), 53–88.
- [4] N. Fujita, Newton-Okounkov bodies for Bott-Samelson varieties and string polytopes for generalized Demazure modules, preprint 2015, arXiv:1503.08916v2.
- [5] N. Fujita, E. Lee, and D. Y. Suh, Algebraic and geometric properties of flag Bott-Samelson varieties and applications to representations, preprint 2018, arXiv:1805.01664v1.
- [6] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts Vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [7] M. Grossberg and Y. Karshon, Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations, *Duke Math. J.* **76** (1994), 23–58.
- [8] H. C. Hansen, On cycles in flag manifolds, *Math. Scand.* **33** (1973), 269–274.
- [9] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, *Invent. Math.* **202** (2015), 927–985.
- [10] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics Vol. 21, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
- [11] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, 2nd ed., Math. Surveys Monographs Vol. 107, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [12] M. Kashiwara, On crystal bases, in *Representations of Groups (Banff, AB, 1994)*, CMS Conf. Proc. Vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 155–197.
- [13] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology*, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, 263–282.
- [14] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, *Ann. of Math.* **176** (2012), 925–978.
- [15] S. Kuroki, E. Lee, J. Song, and D. Y. Suh, Flag Bott manifolds and the toric closure of a generic orbit associated to a generalized Bott manifold, preprint 2017, arXiv:1708.02082v1.
- [16] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar, Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties, *Compos. Math.* **130** (2002), 293–318.
- [17] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, *Ann. Sci. de l'ENS* **42** (2009), 783–835.
- [18] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups* **3** (1998), 145–179.
- [19] B. Pasquier, Vanishing theorem for the cohomology of line bundles on Bott-Samelson varieties, *J. Algebra* **323** (2010), 2834–2847.