

臨界点近傍での音波に対する非線型理論

九大・理 小 貫 明

臨界点近くでの音波の異常性は、種々の物質で観測されている。川崎氏の理論 (→ Domb-Green のシリーズの解説を参照) やとくに最近の Ferrell 氏らの仕事をみると、その異常性は物質によらずかなり統一的に説明できることがわかる。Ferrell の計算の意味するところを私なりに解釈すると (i) 音波によって局所的な温度変位ができること、(ii) そしてオーダーパラメータの自由度に付随する内部エネルギー ($= \text{const. } \phi(\mathbf{r}, t)^2$, ϕ はオーダーパラメータ) が変動してそのおくれが音波減衰になることである。

しかし、ここで私は従来の仕事のほとんどが線型応答理論の枠内にあることを注意したい。音波の振幅をある臨界値より大きくすれば、未開拓の「非線型領域」が実験的に充分実現できる。そして、そこでの物理は、線型領域の場合と同様に、統一的に直観的に理解できるのである。以下簡単な解説を試みる。

まず始めに、音波の周波数 Ω が充分低い場合を考える。即ち、 $\Omega \ll \Gamma_\xi$, ここに Γ_ξ は波数が相関距離 ξ の逆数程度のゆらぎの減衰率で動的スケーリング則より ξ^z に比例する。ここでは、局所平衡が成立して局所的な温度は次のように与えられる。

$$T(x, t) = T_0 + T_1 \cos(Kx - \Omega t) \quad (1)$$

ただし、音波に伴う密度変位は次のようである。

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1 \cos(Kx - \Omega t) \quad (2)$$

ここで

$$T_1 = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s \rho_1 \quad (3)$$

係数 $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s$ は、ほとんどの物質で弱い臨界異常しか示さない。例えば、xenon だと $\left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s = 0.66 (T_c / \rho_c) [(T - T_c) / T_c]^a$, helium だと log 的な振舞いを示しほぼ一定とみなせる。ここで $M \equiv \rho_1 / \rho_0 = u_1 / v_s$ は、ふつうマッハ数とよばれる (v_s は音速, u_1 は速度場の大きさ)。臨界点近くだと $M \ll 1$ でも、非線型効果が期待される。それは系が温度変位に対し非常に敏感だからである。その条件は、次のようである。

$$|T_0 - T_c| < T_1 \quad (4)$$

ここで T_c は臨界温度。この時 $T(x, t) - T_c$ は正と負の値を交互にとる。つまり系は不安定領域 ($T - T_c < 0$) に周期的に quench される。「Periodic Spinodal Decomposition」がおこるといってよい (図 1 参照)。この状況での特徴的な長さとして重要なのは次のものである。

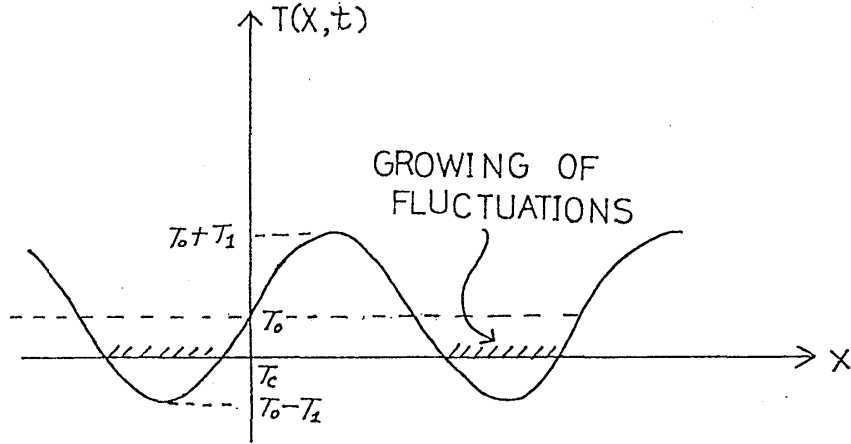


Fig. 1

$$\xi_c \equiv \xi_0 (T_1 / T_c)^{-\nu} \quad (5)$$

ここで ξ_0 はミクロな長さ ν はふつうの臨界指数。 ξ_c より小さいゆらぎは、音波の影響をあまりうけない。ところが ξ_c より大きいゆらぎは $T - T_c$ が負のとき増大する。その増加の程度は次の量で表わされる。

$$\mu = \Gamma_c / \Omega \propto \xi_c^{-2} \Omega^{-1} \propto T_1^{\nu z} \Omega^{-1} \quad (6)$$

ここで Γ_c は波数が ξ_c^{-1} 程度のゆらぎの周波数のスケールで動的スケーリングの考えより ξ_c^{-z} に比例する。音波の周波数の逆数 Ω^{-1} は周期的な quench の持続時間とみなせる。xenon だと $\mu \sim 10^{12} (T_1 / T_c)^{1.89} \Omega^{-1} \sim 10^{12} M^{2.1} \Omega^{-1}$, helium だと, $\mu \sim 10^{11} (T_1 / T_c) \Omega^{-1} \sim 10^{10} M \Omega^{-1}$

高周波の場合 ($\Omega \gg \Gamma_c$) では単純な局所平衡の考えは使えないが、ゆらぎが大きな増大をうける条件は、やはり $\mu > 1$ で与えられる。このとき (3) の比例定数 $(\frac{\partial T}{\partial \rho})_s$ は $T - T_c \simeq T_1$ の値とすべきである。即ち, xenon だと $(\frac{\partial T}{\partial \rho})_s = 0.66 (T_c / \rho_c) (T_1 / T_c)^\alpha$, 従って $T_1 \propto \rho_1^{1/(1-\alpha)}$. このことは、くりこみ群的な考えによって正当化される。図 2 に線型と非線型の 2 つの領域を示

小貫 明

す。 $\mu > 1$ の条件は、 $T_1 > \text{const } \Omega^{1/\mu}$ と書けるので、 T_1 が $\Omega^{1/\mu}$ に比例するしきい値より大きいときのみ $T_0 - T_c$ を小さくすることによって、非線型領域が実現される。いわゆるクロスオーバーの温度は T_1 である。

$\mu > 1$ におけるゆらぎの構造変化は、オーダーパラメーターが保存するかしないかで大きく違うことも強調したい。即ち、保存すると非常に長波長のゆらぎのタイムスケールは q^{-2} に比例して長くなるので温度の振動を感じないで平均の温度のみ感じる（ここで q はそのゆらぎの波数）。このことより増大するゆらぎの波数は次の区間にある。

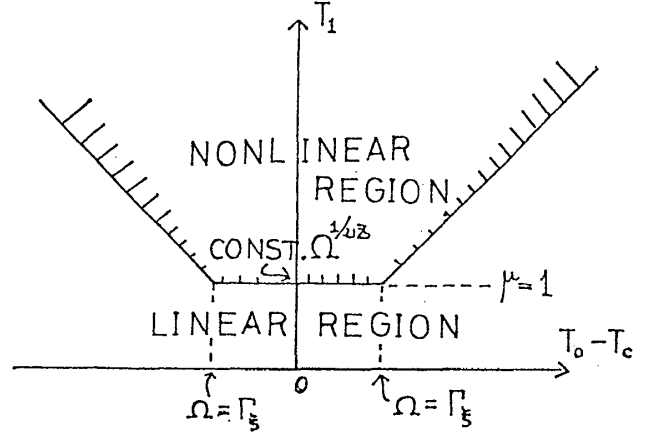


Fig. 2

$$\mu^{-1/2} \xi_c^{-1} < q < \xi_c^{-1}. \quad (7)$$

下限は、 $\Gamma_q/\Omega \sim q^2 \xi_c^2 \mu > 1$ よりでてくる。中間の波数のみが増大するということは保存する系が quench された場合の一般的現象である。(7) は周期的 quench によってできる Domain の大きさが ξ_c より大きく $\mu^{1/2} \xi_c$ より小さいことを意味している。ところで、オーダー・パラメーターが非保存のときは、ゆらぎの増幅は長波長である程著しい。

現在のところ私は、オーダー・パラメーターが非保存の場合については、ゆらぎの効果を取り入れたかなり満足できる理論を作った。一番簡単な場合としては次のモデルがある。

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = -L [\tau_0 + \tau_1 \cos(\mathbf{K}x - \Omega t) - \nabla^2 + \frac{1}{6} g \phi^2] \phi + \theta \quad (8)$$

ここで $\phi(\mathbf{r}, t)$ はオーダー・パラメーター、 τ_0 は平均の温度、 τ_1 は温度変位の大きさ、 θ はランダム力を表わす。このとき τ_1 と Ω を固定して τ_0 を変化させてどんな相転移がおこるか考える。なお $\mu = L \tau_1 / \Omega$ であり $\mu \gg 1$ を仮定する。すると転移が「1次」になることがわかる。即ち τ_0 をさげていく、あるいはあげていくと、平均のオーダー・パラメーター $\eta(\phi) = \langle \phi(\mathbf{r}, t) \rangle$ が不連続のとびを示す（ここで $\phi \equiv \Omega t - \mathbf{K}x$ ）。転移温度は次のようにさがる。

$$\tau_{0c} / \tau_1 = -1 + O(\mu^{-2/3}) \quad (9)$$

第2項は $\mu^{-2/3}$ のオーダーの正の数である。図3に $\eta(\phi)^2$ の ϕ に対する平均を $6\tau_1/g$ でわって

無次元化した量を図示する。図での下の方の端点は1次転移でのオーダーした状態の metastability limit を表わしており図4の上の方のカーブに対応している。図4の下の方のカーブはオーダーしていない状態 ($\eta = 0$) からの metastability limit を表わしている。転移温度 τ_{0c} はこの2つのカーブの中間に位置している。

2つのカーブの間の温度領域では2つの (linearに) 安定な周期的状態が存在する (少くも以下にのべる近似の範囲内で)。これはレーザー系などによく見られる外力のもとでの bistability と同じような現象である。図5には metastability limit の温度での $\eta(\phi)$ を示す。ここで $\sigma = \tau_0/\tau_1$ そして

$$\overline{F}_\eta = (g/12\pi\tau_1) \int_0^{2\pi} d\phi \eta(\phi)^2 \quad (10)$$

ゆらぎをとりいれる数学的手段としては幸いなことに鈴木氏の最近の過渡現象の理論 (Advances in Physics 46 (1981) 195) 及び川崎氏らによる TDGL 系でのスピノダル分解の理論 (Phys. Rev. 17 (1978) 455) を使うことができる。即ち, $T(x, t) - T_c$ が負のところではゆらぎの分布が彼らの手法によって計算でき, 正のところではゆらぎは Gauss 的になる。2つ

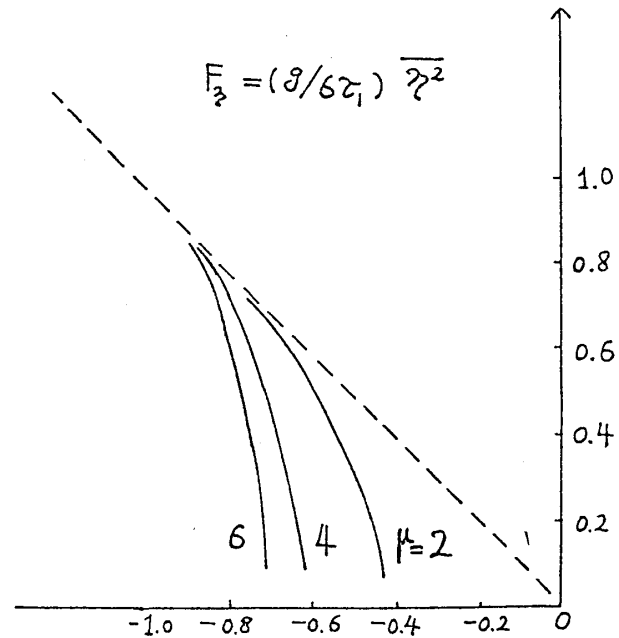


Fig. 3

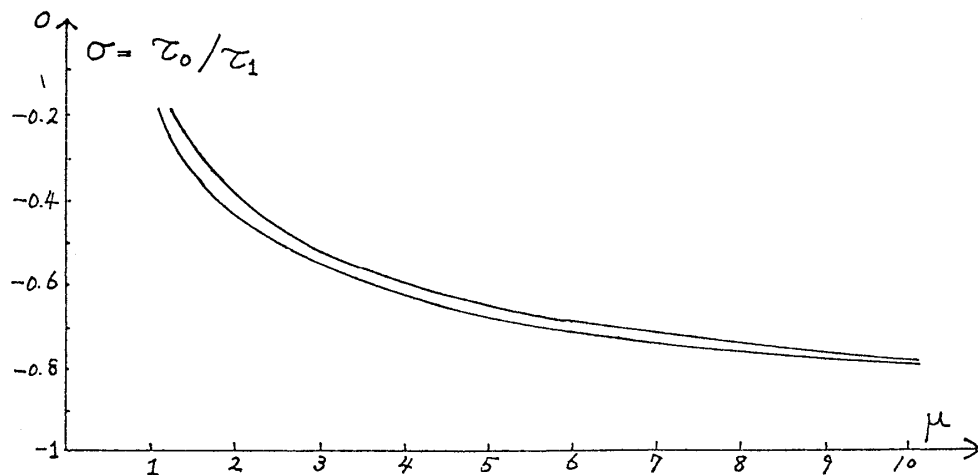


Fig. 4

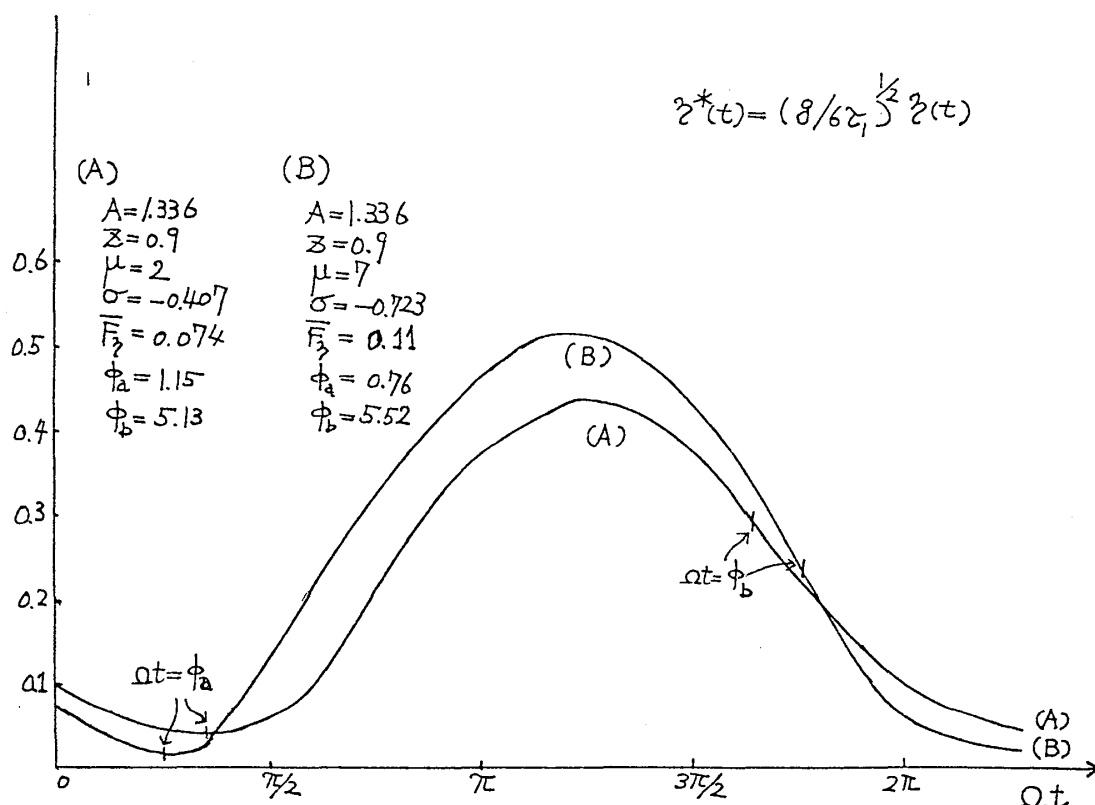


Fig. 5

の領域での分布は鈴木氏の手法によってうまく接続することができる。このように滑らかにながった解はすべて $t \rightarrow \infty$ で周期的な分布に近づく。しかし図4の2つのカーブの中間の温度では、周期的な分布は2つあり、どちらかに近づくかは初期条件に強く依存している。計算機では hysteresis が発見された。

しかし彼らの手法はオーダー・パラメーターが非保存のときのみ適用できる。古典流体のように保存するときは、相分離に伴うゆらぎの効果を取り入れることは大変むずかしい。

実験的な可能性は豊富である。まず注意したいのは(6)に定義した μ は T_c が大きい程そして Ω が小さい程大きくなるということである。即ち、タイムスケールの早い系の方が μ は大きい。このことは従来のスピノダル分解の実験が、タイムスケールの遅い系（合金や2成分溶液）でしか観測可能でないことと事情が逆である。ここに述べた周期的スピノダル分解の実験は従って磁性体や固体などにも適している。また、この効果は何も音波でなくとも外力によって $T - T_c$ を振動できさえすれば期待できる。helium や2成分溶液や誘電体などに周期的な圧力を加えてもよい。また反強磁性体を交流の流れるコイルにいて磁場を変化させてもよい。具体的効果としては、i) 光散乱や中性子散乱の増大。ii) 輸送係数の増大。iii) オーダー・

臨界点近傍での音波に対する非線型理論パラメーターが非保存の系では1次転移であるから、第2音波の音速や磁化を測定することによって、状態方程式がだせる。iv) 動的な構造因子 $S_{k\omega}$ にも音波による変調の効果("spikes")が期待できる。v) さらにオーダー・パラメータが振動する場合 (soft modeなど) は、パラメトリックな増幅が考えられる。vi) 音波減衰そのものが音波の振幅に依存してくる。

以上のような種々の効果を予測していくことが今後の課題である。

最後に補足として、従来の線型応答理論についてコメントする。(2)のような音波を考えよう。すると種々の物理量の線型応答が摂動論にもとづく一般的枠組から計算できる。臨界点の近くでは、この展開がいかなる条件で成立しているのかははっきり意識する必要がある。即ち、適当に無次元した展開パラメーターは何であるか？これが1より大きいと線型応答は使えない。考える物理量としては、ゆらぎの大きさを表す相関函数 $\langle \phi(1) \phi(2) \rangle$ の変化を考える。xenonのような流体だと展開パラメータは $\mathcal{Q} \ll \Gamma_\xi$ では $[(T_0 - T_c)/T_c]^{-1+\alpha} \rho_1/\rho_c \sim [T_1/(T_0 - T_c)]^{1-\alpha}$ となり $\mathcal{Q} \gg \Gamma_\xi$ では $(\mathcal{Q}/\mathcal{Q}_0)^{(1-\alpha)/\nu_z} \rho_1/\rho_c \sim (\mathcal{Q}/\Gamma_c)^{(1-\alpha)/\nu_z} \sim \mu^{-(1-\alpha)/\nu_z}$ となる。従って線型理論は $T_1 > |T_0 - T_c|$ かつ $\mu > 1$ のとき破れる。また音波でなくて非圧縮流のときの無次元化した展開パラメーターは D/Γ_ξ であった。ここで D は速度勾配の大きさである (Ann. Phys. 121 (1979) 456; ibid. 131 (1981) 217)。従って、 $D > \Gamma_\xi$ では線型理論は破れる。従来の枠組が破れるところに新しい可能性がある。