

ある正則概均質ベクトル空間に付随した *adelic zeta distributions* について

筑波大学数学系 木村達雄 (Tatsuo Kimura)

筑波大学数学研究科 小本曾岳義 (Takeyoshi Kojiso)

§0 : Introduction

k を数体, k_A を k の *adele* 環, $k_A^\times$ を k の *idele* 群とする。このとき, $k^\times = k \setminus \{0\}$ は, $k_A^\times$ の離散正規部分群となり, 商群 $k_A^\times / k^\times$ を *idele* 類群という。ここで, $\Omega(k_A^\times / k^\times)$ を $k_A^\times / k^\times$ から $\mathbb{C}^\times$ への連続準同型写像, 即ち, *idele* 類群上の *quasi characters* の空間とする。そのとき, ω_A を $\omega_A(x) = |x|_A^s$ for $s \in \mathbb{C}$ と定義すると, ω_A は $\Omega(k_A^\times / k^\times)$ の元となり, $\sigma(\omega)$ を $|\omega(x)|_A = |x|_A^{\sigma(\omega)}$ for $\omega \in \Omega(k_A^\times / k^\times)$ と定義する。さらに, μ を $k_A^\times$ 上の *Haar measure* とし, $\mathcal{S}(k_A) \subseteq k_A$ 上の *Schwartz-Bruhat* 空間とする。以上の記号を準備して, 次の話を考える。

$\Phi \in \mathcal{S}(k_A)$ の *Fourier* 変換 $\hat{\Phi}$ を次の様に定義する。

$$\hat{\Phi}(x) = \int_{k_A} \Phi(y) \psi(xy) d\mu(y)$$

ただし, μ は k_A の不変測度で, ψ は k_A 上の指標で, $\psi(x) = \prod_p \psi_p(x_p)$ for $x = (x_p)_p$ とする。ただし, $\psi_p(x_p)$ は, p が有限素点のとき, $x_p = \sum_{m=0}^{\infty} C_m p^m$ ($C_m = 0, 1, 2, \dots, p-1$) と書けるが, $\psi_p(x_p) = \exp(2\pi i (-\sum_{m=0}^{\infty} C_m p^m))$ とする。(以下では $\psi(xy) = \langle x, y \rangle$ と k_A と k_A^* の内積とみて, k_A と k_A^* と同一視する)

このとき, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(k_A)$ となり, $\widehat{\varphi}(x) = \varphi(-x)$ となり, 次の関係式が成立する。

$$(PF): \sum_{\xi \in k} \varphi(\xi) = \sum_{\xi \in k^*} \widehat{\varphi}(\xi) \quad (\text{両辺絶対収束の下で})$$

このとき, Tate 理論 (c.f. [T]) より, 以下のことが言える。

$$Z(\omega)(\varphi) = \int_{k_A^*} \varphi(x) \omega(x) \mu(x) \quad \text{とし, 任意の } \xi \in k^* \text{ に対し}$$

して, $\omega(x\xi) = \omega(x)$ より, $Z(\omega)(\varphi)$ は次の様にも書ける。

$$Z(\omega)(\varphi) = \int_{k_A^*/k^*} \left(\sum_{\xi \in k^*} \varphi(x\xi) \right) \omega(x) \mu(x). \quad \text{ここで, } Z(\omega)(\varphi) \text{ は,}$$

$\sigma(\omega) > 1$ で holomorphic であり, 全 $\Omega(k_A^*/k^*)$ に meromorphic に解析接続される。また, adelic Poisson formula より, 次の成立する。

$$Z(\omega)(\widehat{\varphi}) = Z(\omega_1 \omega^{-1})(\varphi), \quad \text{ここで, } \omega_1 = 1 \mid_A.$$

そこで, k_A^* を $G = GL_1$ の adèle 化, 即ち $G_A = k_A^*$ とみなし, 今までの事を既約正則概均質ベクトル空間上に拡張するのが本章理論である。 $V = A^m$ とし, (G, ρ, V) を数体 k 上で定義された既約正則概均質ベクトル空間, f を固定されたその基本相対不変式とし, $\deg f = m$ とするとき, $Z(\omega)(\varphi)$ は, 次の2通りに拡張される。(c.f. [I])

Case 1 : $\sigma(\omega) > \frac{m}{m}$ のとき, $Z_m(\omega)$ を $Z_m(\omega)(\varphi) = \int_{Y_A} \varphi(x) \omega(f(x)) \mu(x)$ と定義する。ここで, $\varphi \in \mathcal{S}(V_A)$ で, μ は Y_A 上の G_A -不変な測度, Y_A は V_A の中の open G_A -orbits 全体とする。この時, 特に, $V = A^1$, $G = GL_1$, $f(x) = x$ とすると, $Z(\omega)(\varphi) = \int_{k_A^*} \varphi(x) \omega(x) \mu(x)$ とはさ。

Case 2 : $Z(\omega)(\varphi) = \int_{k_A^*/k^*} \left(\sum_{\xi \in k^*} \varphi(x\xi) \right) \omega(x) \mu(x)$ の拡張として。

$Z_A(\omega) = \int_{G_A/G_k} \left(\sum_{\xi \in Y_k} \varphi(g\xi) \right) \omega(\chi(g)) dg$ と考える。ここで, dg は。

G_A 上の Haar measure である。また、有理指標 χ は、 $f(g\chi) = \chi(g)f(\chi)$ を満たすものとする。この時、特に、 $\chi = A f f'$, $G = GL_1$, $f(\chi) = \chi$ の場合、 $Z(\omega)(\bar{x}) = \int_{k_A^\times / k^\times} (\sum_{\xi \in k^\times} \bar{x}(\xi)) \omega(\chi) \mu(\chi)$ となる。

Z_m は Euler 積であり、その Euler 積の Euler factors のほとんど全てが、Igusa local zeta であり、また、 Z_a は Siegel-Weil-formula で定義された automorphic form の Mellin 変換とみなせることから、 $Z_a(\omega)$ と $Z_m(\omega)$ の間の関係を調べることは自然である。以下では、[I] 中の Main theorem に関するある注意と、[I] で扱われていない、既約でない、あるタイプの概自覚ベクトル空間について、 Z_a と Z_m の関係を調べた。

§1: 井草の定理 (c.f. [I]) の紹介

§0 で用意した P.V. (G, p, V) について、次の2つの条件を考える。

(F): $|G_A \backslash Y_A| < \infty$, 即ち、 Y_A が有限個の G_A -orbits に分かれる。

(HW): もし、 (G, p, V) が、 k 上 $(p(G_0 \times GL_d), M_d)$ ([I] の type (1)) と同値ならば、 $G_0 = SL_d$ 。ここで、 G_0 は SL_d の単位元を含む連結成分とする。

このとき、次の定理が成立する。

定理 (井草) (c.f. [I])

k を数体、 (G, p, V) を固定した1つの基本相対不変式 $f(\chi) \in k[V]$ をもつ、 k 上定義された既約正則概自覚ベクトル空間とし、(F), (HW) を満たすとする。このとき、 $\gamma \in Y_k$ の isotropy 群 G_γ は、

Connected semisimple であり, Tamagawa number $\tau(G_i)$ は $\mathbb{Z}$ に よる (1) 。 また,
 $Z_A(\omega) = \tau(G_i) Z_m(\omega)$ が 成 立 する。

[証明のアウトライン]

$\mathbb{R}$ の 3 つ の 条 件 を 考 え る。

- (C1): 任意の Y_A の 中 の G_A -orbit は Y_R と 交 わる。
 (C2): $G_A \mathbb{Z}_i = G_A \mathbb{Z}_j, \mathbb{Z}_i, \mathbb{Z}_j \in Y_R \implies G_R \mathbb{Z}_i = G_R \mathbb{Z}_j$
 (C3): $\mathbb{Z}$ の Tamagawa number $\tau(G_i)$ は, $\mathbb{Z} \in Y_R$ の と り 方 に よ り (1) 。

こ の (C1), (C2), (C3) が 成 立 する とき, (C1) より, $|G_A \backslash Y_A| \leq |G_R \backslash Y_R|$, (C2)
 より, $\lambda = |G_A \backslash Y_A| \geq |G_R \backslash Y_R|$ と な り, 従 っ て, $\lambda = |G_A \backslash Y_A| = |G_R \backslash Y_R|$ と 成 立 する。

即 ち, (A1): $Y_A = \bigsqcup_{i=1}^{\lambda} G_A \mathbb{Z}_i$, (A2): $Y_R = \bigsqcup_{i=1}^{\lambda} G_R \mathbb{Z}_i$ が 成 立 する。 $\mathbb{Z}$

と (C3) より,

$$(1-1): Z_A(\omega)(\Phi) = \sum_{i=1}^{\lambda} \int_{G_A/G_R} \left(\sum_{\mathbb{Z} \in G_R \mathbb{Z}_i} \Phi(\mathbb{Z}) \omega(\nu(\mathbb{Z})) \right) \mu_G(\mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} (1-2): & \int_{G_A/G_R} \left(\sum_{\mathbb{Z} \in G_R \mathbb{Z}_i} \Phi(\mathbb{Z}) \right) \omega(\nu(\mathbb{Z})) d\mu_G(\mathbb{Z}) \\ &= \int_{G_A/(G_{\mathbb{Z}_i})_R} \Phi(\mathbb{Z}_i) \omega(f(x)) d\mu_G(\mathbb{Z}) \\ &= \int_{G_A \cdot \mathbb{Z}_i} \left\{ \int_{(G_{\mathbb{Z}_i})_A/(G_{\mathbb{Z}_i})_R} \Phi(\mathbb{Z}h\mathbb{Z}_i) \omega(\nu(\mathbb{Z}h)) dh \right\} \mu_Y(x) \\ &= \int_{G_A \mathbb{Z}_i} \Phi(x) \omega(f(x)) \left(\int_{(G_{\mathbb{Z}_i})_A/(G_{\mathbb{Z}_i})_R} dh \right) \mu_Y(x) \\ &= \tau(G_{\mathbb{Z}_i}) \int_{G_A \mathbb{Z}_i} \Phi(x) \omega(f(x)) \mu_Y(x) \end{aligned}$$

(1-1) を (1-2) に 代 入 し, $\tau(G_i)$ が $\mathbb{Z}$ に よ り (1) と な り, $\tau(G_{\mathbb{Z}_i}) = \tau$

と な る。 こ の と き,

$$Z_A(\omega)(\Phi) = \sum_{i=1}^{\lambda} \tau(G_{\mathbb{Z}_i}) \int_{G_A \mathbb{Z}_i} \Phi(x) \omega(f(x)) \mu_Y(x) = \tau \int_{Y_A} \Phi(x) \omega(f(x)) \mu_Y(x)$$

$= \tau Z_m(\omega)(\bar{\omega})$ となる。それゆえ、 G_3 の連結性と、(C1), (C2), (C3) と (F), (HW) を使って証明するのはよい。

①: G_3 の連結性に ついて

これは次の lemma (in [I]) によりわかる。

Lemma

k を数体とし、 (G, ρ, V) を k 上 定義された相対不変式 $\rho(x)$ をもつ $P.V.$ で条件 (F) をみたすものとする。このとき、Simply connected covering $\pi: H \longrightarrow \mathcal{D}(G)$ で、次の性質をもつものが存在する。 H_3 は、Connected simply connected で、 $\tau(H_3) = G_3$ をみたす。

(この Lemma の証明は、略しますが、[I] では、p.5, p.6 の 9-types と Case by Case でチェックして証明していることに注意しておきます。)

② (C1) と (F) を使った、 G_3 の連結性の証明

(F) により、 k の places 全体 Σ について、 Σ の有限部分集合 S が存在して、任意の $V \in S$ について、 G_V は Υ_V に transitive に作用する。--- ①

このとき、elementary approximation theorem より、 $\forall x = (x_V) \in \Upsilon_A$ について、 $\exists \xi \in V_k$ s.t. $\forall \varepsilon > 0, |x_V - \xi| < \varepsilon$ for all $V \in S$ となる。

実は、 $\xi \in \Upsilon_k$ である。何故なら、 $\forall V \in S$ について、

$$\begin{array}{ccccc} G_V \cdot x_V & \xhookrightarrow{\varphi: \text{canonically embedding}} & \Upsilon_A & \hookrightarrow & V_A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x_V & \longmapsto & (1, 1, \dots, 1, x_V, 1, \dots, 1) = \bar{x}_V & & (1, 1, \dots, 1, \xi, 1, \dots, 1) = \bar{\xi} \end{array}$$

が存在して、 $\bar{x} = (1, 1, \dots, 1, x_V, 1, \dots, 1)$ の ε -近傍 $U_\varepsilon(\bar{x}_V) \subset \Upsilon_A$ は $\bar{\xi}$ を

含むから、 $\varphi^{-1}(U_\varepsilon(\bar{x}_V)) \ni \xi$ となり、 $\xi \in G_V x_V \cap \Upsilon_k$... ② となる。

次に, $\bar{z} = f\alpha \in G_A \alpha \cap Y_k$ であることと主張しよう。 $\nu \in S$ ならば, (B)より,
 $\bar{z} = g_\nu \alpha_\nu$ となり, $\nu \notin S$ ならば, (A)より, G_ν は Y_ν に transitive に作用
 用し, $Y_\nu \ni \bar{z}$ より $G_\nu \cdot \bar{z} = Y_\nu$ となる。従って, $\bar{z} = g_\nu \alpha_\nu$, $\nu \in E$ となる。
 即ち, $(\bar{z}, \dots, \bar{z}) = \bar{z} = f\alpha$ for $f \in \prod_{\nu \in S} G_\nu$, $\alpha = (\alpha_\nu) \in Y_A$ 。こ
 のとき, $f \in G_A$ となる。

②

$1 \rightarrow G_3 \rightarrow G \rightarrow Y = G/\bar{z} \rightarrow 1$ の Galois cohomology をとる。

$$\begin{array}{ccccccc} G_3(\mathbb{F}_3) & \rightarrow & G(\mathbb{F}_3) & \rightarrow & Y(\mathbb{F}_3) & \rightarrow & H^1(\mathbb{F}_3, G_3) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \leftarrow \text{Lang's theorem} \\ H^0(\mathbb{F}_3, G_3) & & H^0(\mathbb{F}_3, G) & & & & 1 \end{array}$$

$$\therefore Y(\mathbb{F}_3) = G(\mathbb{F}_3) \cdot \bar{z} = G(\mathbb{F}_3) / G_3(\mathbb{F}_3) \quad \text{-----} \quad (\#)$$

この (#) を使って, $f \in G_A$ と証明しよう。

ある有限部分集合 S' が存在して, $\forall \nu \notin S'$ に $\alpha_\nu, \alpha_\nu \in Y_\nu^\circ, \bar{z} \in Y_\nu^\circ$ 。

ここで, $Y_\nu^\circ = G(O_\nu) \cdot \bar{z} \cup G(O_\nu) \cdot \bar{z}' \cup \dots$ となり,

mod π とすると, $Y(\mathbb{F}_3) = G(\mathbb{F}_3) \cdot \bar{z} \cup (G(\mathbb{F}_3) \cdot \bar{z}') \cup \dots$ となる。

(#) より, $Y_\nu^\circ = G(O_\nu) \cdot \bar{z}$ となる。 $\therefore g_\nu \in G(O_\nu)$ の中からとれる。

$\therefore f \in G_A$

③ (F), (HW) を使った (C2) の証明

次の diagram を考える。

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \rightarrow & (G_3)_K & \rightarrow & G_K & \rightarrow & Y_K & \rightarrow & H^1(k, G_3) & \rightarrow & H^1(k, G) \\ & & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \\ (*) & & 1 & \rightarrow & (G_3)_A & \rightarrow & G_A & \rightarrow & Y_A & \rightarrow & \prod_{\nu \in S} H^1(k_\nu, G_3) & \rightarrow & \prod_{\nu \in S} H^1(k_\nu, G) \end{array}$$

$\{ = \{z_1, z_2 \in G_A\} \subset Y_A$ とする.

$$z_1 \xrightarrow{\delta'} 1 \in H^1(k_v, G_3), \quad z_2 \xrightarrow{\delta'} 1 \in H^1(k_v, G_3) \quad \text{for all } v \in \Sigma$$

また, $(*)$ の可換性より, $\delta z_1, \delta z_2 \in \alpha_G^{-1}(1)$, しかし, Hasse 原理より, $\alpha_G^{-1}(1) = 1$ となり, $z_1, z_2 \in G_k$ となる.

④: (F) と (HW) を使った $C(3)$ の証明

[1] の P.5, P.6 の 9-types を Case by Case で check して, 次の diagram を得ることが出来る.

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{D}(G) = [G, G] & \xleftarrow{p} & GL(V) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ H_3 & \longrightarrow & G_3 & \longrightarrow & P(G_3) \end{array}$$

ここで, H_3 は Connected semisimple simply connected, このとき, [1] の lemma 3 より, $\tau(H_3)/\tau(P(G_3))$ は 3 によるぬ。また, Tamaya-number に関する Weil conjecture より, $\tau(H_3) = 1$ 。
 $\therefore \tau(P(G_3))$ は 3 のとりお 1 によるぬ。

従って, (G, p, V) は, $C(1), C(2), C(3)$ を同時にし, $Z_a = \tau Z_m$ なる関係式をみたす。

Q.E.D. //

§2: 井草の定理に対するある注意

§1 の中で, $C(2), C(3)$ を証明するのに (F) と (HW) を使ったが, $C(1)$ は (F) と G_3 の連結性だけで証明できた。この事実は, この § で説明することとおおりに関係ある。我々の得た結果として, 次のものがある。

Proposition A

k を数体, (G, P, V) を (F) をみたす, reductive k -regular P.V. とする。これが
 (a1): $\gamma_k = G_k$ (a2): G_k は, 連結 の条件をみたすとき, Z_m は
 収束し, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau(G_k) Z_m(\omega)$ が成立する。

⊙ 仮定 (a2) と (F) より, (C1) を得る。また仮定 (a1) と (C1) より,

$$1 \leq |G_A \setminus Y_A| \leq |G_k \setminus Y_k| = 1 \quad \therefore |G_A \setminus Y_A| = 1 \text{ となり, } Y_A = G_A \text{ となる。}$$

このとき, (C2), (C3) は自動的に成立し, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau Z_m$ が成立する。 //

この Proposition A の Corollary として次が得られる。

Corollary b : 井草の定理の中で, 条件 (HW) は不要である。

⊙ [I] の type (1) においては, $\gamma_k = GL_d(k) = G_0(k) I_d + GL_d(k) = G_k I_d$

であり, Proposition A より, 関係式 $Z_a(\omega) = \tau Z_m(\omega)$ が成立する。 //

§3 : [I] で扱われていない P.V. に関する Z_a と Z_m の関係について。

ここで, Universally transitive という概念を導入する。

定義 : k を数体とし, (G, P, V) を k 上定義された P.V. とする。

このとき, (G, P, V) の open orbit γ が universally transitive とは,

$\ell = |G_v \setminus \gamma_v| = 1$ for all $v \in \Sigma$ が成り立つことを言う。 //

以下では, [KKH] の Type I が全て, k -rational points γ_k が 1 つの G_k -orbit であることを示す。

I : Non-irreducible simple P.V.s with universally transitive open orbit の場合

Example 1

$G = GL_1 \times GL_m \ni g = (\alpha, A)$, $V = V(m) \oplus V(m)^* \ni x = (x_1, x_2)$ について.

$\rho(g)x = (Ax_1, \alpha^* A^t x_2)$ とする. このとき, (G, ρ, V) の相対不変式は.

$f(x) = f(x_1, x_2) = {}^t x_1 x_2$ とする. (G, ρ, V) の open orbit $Y = \{f(x, x_2) \neq 0\}$

の k -rational point での orbit 分解を以下で考える.

generic point として, $\xi = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ が与えられる, $\forall (x, y) \in Y(k)$ として

$(x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right)$ として, $(x, y) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right)$ として,

$x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ としてよい.

まず, G_k の作用で, $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) \mapsto \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} \right)$, $y_1' \neq 0$ になる.

$$\text{さらに, } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} * \\ * \end{matrix} \right) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right], \quad \alpha \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{y_2}{y_1} \\ \vdots \\ -\frac{y_m}{y_1} \end{pmatrix} \mid \begin{matrix} \circ \\ I_{m-1} \end{matrix} \right) \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right] = \alpha \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

こゝで, $\alpha = \frac{1}{y_1}$ とすれば,

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) \sim_{G_k} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ が得られる.}$$

$\therefore Y_k$ は 1 つの G_k -orbit である. //

Example 2

$(GL_1^m \times SL_m, \Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_1)$ は, 次の Example 3 に帰着される. //

Example 3

$G = GL_1^m \times GL(m) \ni g = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, A)$, $M(m, m+1) \ni X = (x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$

について, $p(g)X = (d_1 A x_1, d_2 A x_2, \dots, d_m A x_m, A x_{m+1})$ とする.

この (G, p, V) の基本相対不変式は, $f_i(x) = \det(x_1, x_2, \dots, \check{x}_i, \dots, x_{m+1})$

($i=1, 2, \dots, m+1$) の $m+1$ 個より, (G, p, V) は既約で faithful. とこで, $[G, G] = SL(m)$

は Simply connected であり, generic point として, $\xi = (\underbrace{e_1, e_2, \dots, e_m}_{I_m}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$ をとる.

$M_{m+1}(k) \supset Y(k) \ni \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1})$ をとる. その中の $\det(x_1, \dots, x_m) \neq 0$ なる $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ について, $A = (x_1, x_2, \dots, x_m)^{-1}$ とし, $Ax = (I_m | y)$, $y \neq 0$

とできる. こゝで, $y = {}^*(y_1, y_2, \dots, y_m)$ とする. ($\odot$ も $y_1 = 0$ だが, $y_1 = 0$ としても)

同様にして, $y_i \neq 0$ ($2 \leq i \leq m$) とできる. よて, $B = (y_1, y_2, \dots, y_m, \begin{pmatrix} y_1^{-1} \\ \vdots \\ y_m^{-1} \end{pmatrix})$

とおくと, $BAx = (I_m, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}) = \xi$ となり, $Y_k = G_k \xi$ となる. //

Example 4

$(GL_1 \times SL_{2m}, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1^{(2)} \otimes \Lambda_1^{(2)})$ について, 先づ $(GL_{2m}, \Lambda_2, Alt_{2m})$ の場合を
考えよう. $m=1$ のとき, $\begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} = X$ について, $p_f(X) = x$,

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & abx \\ -abx & 0 \end{bmatrix}$ より, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば,

$\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ となる.

一般の場合

$m-1$ まで J_{m-1} としたとする. 即ち, $X = \left[\begin{array}{c|c} J_{m-1} & X_2 \\ \hline -X_2 & X_3 \end{array} \right]$

(こゝで, $X \in Y$ について, $X = \left[\begin{array}{c|c} X_{m-1} & X_2 \\ \hline -X_2 & X_3 \end{array} \right]$ としたとき, $\text{rank } X_{m-1} = m-1$ とは. possible

が, G_k の作用は, 行や列の permutation として起るため $\text{rank } X_{m-1} = m-1$ の
場合に戻る (おしい.)

このとき,

$$2 \left\{ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_{m-1} & X_2 \\ \hline -^*X_1 & X \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} ^*A_1 & ^*A_3 \\ \hline ^*A_2 & ^*A_4 \end{array} \right\} \quad (\text{について, } A_i (1 \leq i \leq 4) \text{ を次の様に写す,})$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -^*X_2 J_m & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & X_2 \\ \hline -^*X_2 & X_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} I_m & J_m X_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\} := \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 0 & y \\ -y & 0 \end{smallmatrix} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right\} = J_{m+1} \quad \text{となり O.K.}$$

$(GL_1^2 \times GL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^{(*)} \oplus \Lambda_1^{(*)})$ については, 作用の仕方より, $(SL_2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$ と同型より, Example 7 の場合 に帰着される. 

Example 5

$(GL_1 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1)$ について, $\xi = \left(\left[\begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \right)$ が generic point であり, 表現空間の任意の k -rational point $X = \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline -^*y & 0 \end{array} \right]$ について,

これも, $X = \left[\begin{array}{c|c} X_1 & X_2 \\ \hline -^*X_2 & 0 \end{array} \right]$ と書いたとき, $\text{rank } X_1 = 2m$ とする. このとき,

$$\left\{ \begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -^*X_2 J_m & 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & X_2 \\ \hline -^*X_2 & 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} I_m & J_m X_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}. \quad \text{また, } \xi \text{ の isotropy 群 } H_\xi \text{ は,}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & \alpha \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}^* \left\{ \begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & \alpha \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c|c} J_m & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\} \text{ より, } H_\xi = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} Sp_m & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right] \right\}$$

となり, このことより $\left[\begin{array}{c|c} I_{2m} & -x \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} x \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} x-x \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right]$ となり, $G_k \xi = \gamma_k \xi$ となる. //

Example 6

$(GL_1^3 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^* \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1)^*)$ について, 表現空間は $V = V(m(2m+1)) \oplus V^*(2m+1) \oplus (V(2m+1)^* \oplus V(2m+1)^*)$ であり, $V \ni \tilde{x} = (\tilde{X}, y_1, (y_2, y_3)) = (\tilde{X}, X)$ とする.

$J' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & J \end{array} \right)_{2m}$ についての $\tilde{G} = GL_1^3 \times GL_{2m+1}$ の isothropy 群 H は,

$$H = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \alpha & 0 \\ \hline A' & A \end{array} \right) \in GL_{2m+1} : A \in Sp_m \right\}. \text{ かつ, } \forall X = \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ Z \end{pmatrix} \in M(2m+1, 3)_k$$

$$A \in Sp_m(k) \text{ について, } \left(\begin{array}{c|c} \alpha' & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right) X \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha' x_1, \alpha' x_2, \alpha' x_3) + BZ \\ AZ \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

と仮定する, 今 [KKH] の Proposition 2.9 より,

$$X \sim_{G_h} \begin{pmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ Z_0 \end{pmatrix} = X_0, \quad (z_1, z_2, z_3) \in k^3, \quad \text{つまり } Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow m+1$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_{2m}) \text{ s.t. } b_1 = -z_1, b_2 = z_1 + z_2 - z_3, b_{m+1} = -z_2, b_j = 0 \text{ for } j \neq 1, 2, m+1$$

$$\text{このとき, } \left(\begin{array}{c|c} 1 & B \\ \hline 0 & I_{2m} \end{array} \right) X_0 I_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ Z_0 \end{pmatrix}. \text{ かつ, } (X, \tilde{X}) \sim_{G_h} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \right)$$

Example 7

$(GL_1^2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1, V(2m) \oplus V(2m))$ について, $\Upsilon \subseteq P.V.(G, P, V)$ の open orbit $\subseteq L$. $\Upsilon_k \subseteq \Upsilon$ の k -rational points とする.

$$V(2m) \oplus V(2m) \ni X = (X_1, X_2) \text{ について.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & f(x) \\ -f(x) & 0 \end{pmatrix} = {}^*X J X = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{2m} \\ y_1, y_2, \dots, y_{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2m} \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^*x \\ {}^*y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Jx & Jy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^*Jy \\ {}^*Jx & 0 \end{pmatrix}$$

より, $f(x) = {}^*x J y$ か, (G, ρ, V) の相対不変式.

$$(\odot \quad {}^*X J X \longmapsto {}^*X \underbrace{{}^*A J A}_J X = {}^*X J X)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ について, } f(\xi) = 1 \neq 0. \therefore \xi \text{ は generic point に選べる.}$$

$$\text{このとき, } f = \{ \tilde{A} \in \mathfrak{g} \mid \tilde{A} \xi = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + A \xi = 0 \} = \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{sp}(m-1)$$

(\odot)

$$A \in \mathfrak{sp}(m) \text{ は, } A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & -{}^*A_1 \end{pmatrix}, B_1 = {}^*B_1, C_1 = {}^*C_1 \text{ と置ける.}$$

$$(A_1 \in \mathrm{GL}(m), B, C \in M(m))$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \\ c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} & -a_{11} & -a_{21} & \dots & -a_{m1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{2m} & -a_{22} & -a_{32} & \dots & -a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1m} & c_{2m} & \dots & c_{mm} & -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & b_{m1} \\ c_{11} & -a_{11} \\ c_{12} & -a_{21} \\ \vdots & \vdots \\ c_{1m} & -a_{m1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore a_{ii} = -\alpha = \beta$$

$$f \ni \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & A_1 & \vdots & B_1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & C_1 & \vdots & {}^*A_1^{-1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ により } f \cong \mathfrak{gl}_1 \oplus \mathfrak{sp}(m-1)$$

以下, これを使, $\mathbb{Z}$ orbit 分解を考える. Lie 環から, 1-parameter subgroup を作り, ξ が $\mathfrak{g}$ の generic point であること示そう.

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^*A \end{pmatrix}; {}^*B = B, {}^*C = C \right\} \text{ について.}$$

$$\exp \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^*A \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^*A \end{array} \right); A \in GL_m \right\} \subset Sp_m$$

$$\exp \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right); {}^*B = B \right\} \subset Sp_m$$

$$\exp \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left\{ \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline C & I_m \end{array} \right); {}^*C = C \right\} \subset Sp_m$$

このとき, これらを用いて Υ_k の generic point をとく (11). $f(X) = {}^*XJX$,
 $X = (x|y) \in \Upsilon_k$, $x \neq 0$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が基本相対不変式の1つで:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & {}^*A \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 \\ {}^*A^{-1}x_2 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline 0 & I_m \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + Bx_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B=I} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とし, } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix} \text{ とおく. } \left(\begin{array}{c|c} I_m & 0 \\ \hline -x_{m+1} \cdots -x_{2m} & I_m \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって, 先の generic point は, } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} \in \Upsilon_k, \quad f(X) = (1, 0, \dots, 0) \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_m \\ \hline I_m & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = y_{m+1}$$

$$\therefore f(X) = y_{m+1} \neq 0 \quad \therefore y_{m+1} = 1 \text{ とおす.}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & -y_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & -y_2 \cdots -y_m \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0-y_1 \cdots -y_m \\ \hline -y_{m+1} \cdots -y_{2m} & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \zeta$$

となり, 作用させた各行列は, G_k の元より, $\Upsilon_k = G_k \zeta$ とおす. //

Example 8

$(Spin_m \times GL_1, (\text{half-spin rep.}) \oplus (\text{the vector rep.}))$ にする.

$A \in \mathcal{O}(10) = \text{Lie}(Spin_{10})$ の半スピンの表現を $d\rho_1(A)$ とし, $\mathcal{O}(10) \oplus \mathfrak{gl}(1)$

$= \text{Lie}(\text{Spin}_{10} \times \text{GL}_1) \ni (A, \lambda)$ の表現は, [S-k] P.119~P.121 より,

$$d\rho_1(A) + \lambda I = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & -a_{15} \\ -a_{21} & a_2 + \lambda & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & -a_{25} \\ -a_{31} & a_{32} & a_3 + \lambda & a_{34} & a_{35} & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & -a_{35} \\ -a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 + \lambda & a_{45} & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & -a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & \lambda & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \\ \hline 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & a_{51} & \lambda - a_1 & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\ -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & a_{52} & -a_{12} & \lambda - a_2 & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & a_{53} & -a_{13} & -a_{23} & \lambda - a_3 & -a_{43} & -a_{53} \\ -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & a_{54} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & \lambda - a_4 & -a_{54} \\ -c_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|cccc|c} d_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & & & & & -a_{15} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & & & & & -a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & d_3 & a_{34} & a_{35} & & & & & -a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & d_4 & a_{45} & & & & & -a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & d_5 & & & & & 0 \\ \hline & & & & & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & 0 \\ & & & & & a_{51} & -a_{21} & -a_{31} & -a_{41} & -a_{51} \\ & & & & & a_{52} & -a_{12} & -a_{32} & -a_{42} & -a_{52} \\ & & & & & a_{53} & -a_{13} & -a_{23} & -a_{43} & -a_{53} \\ & & & & & a_{54} & -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & -a_{45} \\ & & & & & -a_{51} & -a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & 0 \\ \hline & & & & & -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & d_5' \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & 0 \\ & & & & -b_{12} & 0 & b_{23} & b_{24} & 0 \\ & & & & -b_{13} & -b_{23} & 0 & b_{34} & 0 \\ & & & & -b_{14} & -b_{24} & -b_{34} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & & & \end{array} \right) +$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \hline 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & & & \\ -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} & 0 & & & \\ -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} & 0 & & & \\ -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 & 0 & & & \\ \hline c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & & & \end{array} \right), \quad z = z', \quad \lambda = \frac{d_i + d_i'}{2} \quad (1 \leq i \leq 5)$$

$z = z'$, $\left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)^2 = 0$ より, 1-parameter subgroup は,

$$\exp t \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = I + t \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I & tB \\ \hline 0 & I \end{array} \right), \quad \text{同様に (7).}$$

$$\exp \lambda \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline c & 0 \end{array} \right) = I + \lambda \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline c & 0 \end{array} \right) = I + \lambda \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline c & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \lambda c & I \end{array} \right)$$

とあることは注意して、 $\lambda = \lambda^* (10000 \ 10000)$ かつ、 $G_k \lambda = \gamma_k z$

また、この2以下で示す。 $(\lambda_1 \neq 0, \lambda_6 \neq 0)$ と仮定する。

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccccc} 1 & & & & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_6} & \frac{\lambda_3}{\lambda_6} & \frac{\lambda_4}{\lambda_6} & 0 & \\ & 1 & & & -\frac{\lambda_2}{\lambda_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1 & & -\frac{\lambda_3}{\lambda_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 1 & -\frac{\lambda_4}{\lambda_6} & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_1} & \frac{\lambda_3}{\lambda_1} & \frac{\lambda_4}{\lambda_1} & 0 & 1 & & & & \\ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & & & \\ -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 1 & & \\ -\frac{\lambda_4}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \\ \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ \lambda_9 \\ \lambda_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \lambda_1 + \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_5 \\ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \lambda_1 + \frac{\lambda_4}{\lambda_1} \lambda_1 + \lambda_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_{10} \end{pmatrix}, \text{ また、}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} \text{circle} & 0 & & & \text{circle} & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ \hline a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ \hline -a_{51} & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\exp \lambda(\cdot)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline \lambda a_{51} & & & & 1 & & & \\ \lambda^2 a_{51}^2 & & & & \lambda a_{51} & 1 & & -\lambda a_{51} \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -\lambda a_{51} & & & & & & & \end{array} \right)$$

について、

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline \frac{\gamma_5}{\gamma_1} & & & & 1 & & & \frac{\gamma_5}{\gamma_1} \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline \frac{\gamma_5}{\gamma_1} & & & & & & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_5 + \frac{\gamma_5}{\gamma_1} \gamma_{10} \\ \gamma_6 + \frac{\gamma_5}{\gamma_1} \gamma_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_5 + \gamma_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{10} \end{pmatrix}, \text{ ただし、} z_1 \neq 0 \text{ (28110)}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & \frac{z_{10}}{z_1} & & & 1 & & & \\ & \frac{z_{10}^2}{z_1^2} & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このとき, $a_1 = \frac{1}{2}(\log \sqrt{\frac{z_1}{z_6}})$, $\lambda = -\log \sqrt{z_1 z_6}$ とし, $e^{d_1} = \frac{1}{z_1}$, $e^{d_1'} = \frac{1}{z_6}$ とし, $\text{diag}[\frac{1}{z_1} * * * *, \frac{1}{z_6} * * * *]$ を $^*[z_1, 0000 \ z_6, 0000]$ にほじく, $\gamma_k = G_k$ とする。

Example 9

$(GL_5 \times Spin_{10}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1)$, $\Lambda_1 = \text{half spin rep.}$ について, $(GL_5 \times Spin_{10}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1)$ について, γ_k が 1 つの G_k -orbit がどうかを確かめる。

$$V = V(16) = \{1, e_i e_j, e_i e_j e_k e_l \mid (1 \leq i < j < k < l \leq 5)\}$$

$$= \{1, e_1 e_2, e_1 e_3, e_1 e_4, e_1 e_5, e_2 e_3, e_2 e_4, e_2 e_5, e_3 e_4, e_3 e_5, e_4 e_5, e_1 e_2 e_3 e_4, e_1 e_2 e_3 e_5,$$

$$e_1 e_2 e_4 e_5, e_2 e_3 e_4 e_5\}. \quad A \in \mathcal{O}(16) \text{ について.}$$

$$1) \quad dP_1(A) \cdot 1 = -\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{2} + \sum_{i < j} b_{ij} e_i e_j$$

$$2) \quad dP_1(A) e_k e_l = \sum_{i \neq k} a_{ik} e_i e_l - \sum_{i \neq l} a_{il} e_i e_k + \frac{a_k + a_l}{2} e_k e_l - \sum_{s \neq k, l} \frac{a_s}{2} e_k e_l e_s \\ + \sum_{i < j} b_{ij} e_i e_j e_k e_l - c_{kl} \quad (k < l)$$

$$3) \quad dP_1(A) e_k e_l e_m e_n = a_{sk} e_s e_l e_m e_n - a_{sl} e_s e_k e_m e_n + a_{sm} e_s e_k e_l e_n \\ - a_{sn} e_s e_k e_l e_m + \frac{a_k + a_l + a_m + a_n - a_s}{2} e_k e_l e_m e_n \\ - c_{kl} e_m e_n + c_{km} e_l e_n - c_{kn} e_l e_m - c_{lm} e_k e_n + c_{ln} e_k e_m - c_{mn} e_k e_l$$

$i = 7$, $1 \leq k < l < m < n \leq 5$ あり, $\{s, k, l, m, n\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ かつ

これより, 次のような表現を得る.

$$d\ell_1(A) = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} A_1 & -C_{12} & -C_{13} & -C_{14} & -C_{15} & -C_{23} & -C_{24} & -C_{25} & -C_{24} & -C_{35} & -C_{45} \\ b_{12} & A_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} & & & \\ b_{23} & a_{32} & A_3 & & & & & & -C_{24} & -C_{35} & -C_{45} \\ b_{14} & a_{42} & & A_4 & & & & & -a_{14} & -a_{15} & C_{24} & C_{25} & -C_{45} \\ b_{15} & a_{52} & & & A_5 & & & & a_{13} & -a_{15} & -C_{23} & C_{25} & C_{35} \\ b_{23} & -a_{31} & & & & A_6 & & & a_{13} & a_{14} & -C_{23} & -C_{24} & -C_{34} \\ b_{24} & -a_{41} & & & & & A_7 & & -a_{24} & -a_{25} & -C_{14} & -C_{15} & -C_{45} \\ b_{25} & -a_{51} & & & & & & A_8 & a_{23} & -a_{25} & -C_{13} & -C_{15} & C_{35} \\ & & & & & & & & a_{23} & a_{24} & C_{13} & C_{14} & -C_{34} \\ \hline b_{34} & -a_{41} & a_{31} & -a_{42} & a_{32} & & & & A_9 & a_{45} & -a_{35} & -C_{12} & -C_{15} & -C_{25} \\ b_{35} & -a_{51} & a_{31} & -a_{52} & a_{32} & & & & a_{54} & a_{10} & a_{34} & C_{12} & C_{14} & C_{24} \\ b_{45} & & -a_{51} & a_{41} & -a_{52} & a_{42} & & & -a_{53} & a_{43} & a_{11} & & -C_{12} & -C_{13} & -C_{23} \\ & b_{34} & -b_{24} & b_{23} & b_{14} & -b_{13} & & & b_{12} & & a_{12} & a_{45} & -a_{35} & a_{25} & -a_{15} \\ & b_{35} & -b_{25} & b_{23} & b_{15} & -b_{13} & & & b_{12} & & a_{14} & a_{15} & a_{35} & -a_{44} & a_{14} \\ & b_{45} & -b_{25} & b_{24} & b_{15} & -b_{14} & & & b_{12} & & -a_{13} & a_{42} & a_{14} & a_{23} & -a_{13} \\ & & b_{45} & -b_{35} & b_{34} & & & & b_{15} & -b_{14} & b_{13} & a_{52} & -a_{42} & a_{32} & a_{15} & a_{12} \\ & & & b_{45} & -b_{35} & b_{34} & & & b_{25} & -b_{24} & b_{23} & -a_{51} & a_{41} & -a_{31} & a_{21} & a_{16} \end{array} \right)$$

但し,

$$A_1 = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_3 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_4 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5)$$

$$A_5 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_6 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 - a_4 - a_5)$$

$$A_7 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)$$

$$A_8 = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 - a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_9 = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{10} = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_{11} = \frac{1}{2}(-a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{12} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5)$$

$$A_{13} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_5)$$

$$A_{14} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{15} = \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$A_{16} = \frac{1}{2}(-a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$i = 7$.

$$\lambda = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_1 e_2 + \lambda_3 e_1 e_3 + \lambda_4 e_1 e_4 + \lambda_5 e_1 e_5 + \lambda_6 e_2 e_3 + \lambda_7 e_1 e_4$$

$$+ \lambda_8 e_2 e_5 + \lambda_9 e_3 e_4 + \lambda_{10} e_3 e_5 + \lambda_{11} e_4 e_5 + \lambda_{12} e_1 e_2 e_3 e_4 + \lambda_{13} e_1 e_2 e_3 e_5$$

$+ \lambda_{14} e_1 e_2 e_4 e_5 + \lambda_{15} e_1 e_3 e_4 e_5 + \lambda_{16} e_1 e_3 e_4 e_5$ とおく。

$X_0 = (1 + e_1 e_2 e_4 e_5) = {}^*(1, 0, \dots, 0, \underset{12}{1}, 0, 0, 0, 0) \in V(16)$ 一般点

で, isotropy algebra $\mathcal{G}_{X_0}$ は, $\mathcal{G}_{X_0} = \mathcal{H}(1) \oplus \mathcal{O}(7) \oplus V(8)$, $= {}^*V(8)$

は Vector 群の Lie 環で 8 次元のもの。よって, isotropy 群は, $(GL(1) \times Spin_7)(G_a)^8$

$$P(GL(1) \times Spin_7) X_0 = GL(1) \times Spin_7 / (GL(1) \times Spin_7)(G_a)^8$$

以下で, $\forall \lambda \in Y$ かつ, $GL(1, k) \times Spin_7(k)$ の作用で, ${}^*(1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, 0, 0)$ にうつることをみよう。このとき, $(\lambda_{12} \neq 0, \lambda_{13} \neq 0, \lambda_7 \neq 0$ とおいた)

$${}^* \left[I + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} \right) (E_{1,1} + E_{2,12} + E_{5,15} + E_{8,16}) \right] \left[I + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_7} \right) (-E_{3,1} + E_{5,11}) \right] \left[I + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{13}} \right) (-E_{4,12} - E_{5,13}) \right] \left[I + \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_7} \right) (-E_{1,1} - E_{2,12}) \right] \\ \left[I + \left(\frac{\lambda_5}{\lambda_7} \right) (-E_{7,7} - E_{8,10}) \right] \left[I + \left(\frac{\lambda_6}{\lambda_7} \right) (-E_{2,2} - E_{5,13}) \right]$$

による変形を経て,

$${}^*(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6) \longrightarrow {}^*(\lambda_1, 0, \dots, 0, \lambda_7, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{16})$$
 とできる。

$$\text{これに, } \left[I + \frac{\lambda_1}{\lambda_{12}} (-E_{1,1} - E_{2,12} - E_{5,15} - E_{8,16}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_7} (-E_{3,1} - E_{5,11} - E_{14,4} - E_{16,7}) + \frac{\lambda_3}{\lambda_{13}} (-E_{4,12} - E_{5,13} - E_{16,7}) \right]$$

を作用させると, ${}^*(\lambda, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{16})$ と得る。

$$\text{さらに, } \left[I + \frac{\lambda_4}{\lambda_{12}} (-E_{5,12} - E_{15,11}) + \frac{\lambda_5}{\lambda_{12}} (-E_{8,2} - E_{16,12}) + \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}} (-E_{10,9} - E_{13,12}) + \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{12}} (-E_{11,9} - E_{12,12}) \right]$$

を作用させると, ${}^*(\lambda_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \lambda_{12}, 0, 0, 0, 0)$ と得る。

このとき, $a_4 = \log \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1}$, $a_5 = \log \frac{1}{\lambda_1 \lambda_{12}}$ とおけば,

$$e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}} = \frac{1}{\lambda_1}, \quad e^{\frac{a_4 - a_5}{2}} = \frac{1}{\lambda_{12}}$$

$$\therefore \text{diag} \left[\frac{1}{\lambda_1}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 + a_5}{2}}, \right. \\ \left. e^{\frac{-a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 - a_5}{2}}, e^{\frac{-a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 - a_5}{2}}, \frac{1}{\lambda_{12}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}}, e^{\frac{a_4 + a_5}{2}} \right]$$

(= 1 に表われる e^x は全て k の元。と見た) を作用させると,

$${}^*(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$$

以上のことより，決り成り立つ。

Theorem C

Universally transitive open orbits をもつ既約 G は 11 単純正則根付質ベクトル空間は，次の 9 つで，それらは全て open orbit γ の k -rational point γ_k が 1 つの G_k -orbit より，関係式 $Z_n(w) = \tau Z_m(w)$ をみたす。

$$(1) (GL_1 \times GL_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^*)$$

$$(2) (GL_1^m \times GL_m, \Lambda_1 \oplus \overbrace{\dots \oplus \dots}^m \oplus \Lambda_1)$$

$$(3) (GL_1^m \times GL_m, \Lambda_1 \oplus \overbrace{\dots \oplus \dots}^m \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^{(*)})$$

$$(4) (GL_1^2 \times GL_{2m}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1^{(*)} \oplus \Lambda_1^{(*)})$$

$$(5) (GL_1 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1)$$

$$(6) (GL_1^3 \times GL_{2m+1}, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 \oplus (\Lambda_1 \oplus \Lambda_1)^{(*)})$$

$$(7) (GL_1^2 \times Sp_m, \Lambda_1 \oplus \Lambda_1)$$

$$(8) (GL_1^2 \times Spin_m, (\text{a half-spin rep.}) \oplus (\text{the vector rep.})) \text{ with } m=8,10$$

$$(9) (GL_1^2 \times Spin_{10}, \Lambda \oplus \Lambda) \text{ with } \Lambda = \text{the even half-spin rep.}$$

II: 2-Simple non-irreducible regular P.V. with universally transitive open orbit property の場合

Example 10

$(GL_1 \times GL_1 \times GL_2, \Lambda_2 \oplus \Lambda_1 + (\Lambda_1 + \Lambda_1)^{(*)} \oplus 1)$ に ついて，表現空間は．

$$V = V(1_0) \oplus V(2) \oplus (V(5) \oplus V(5))^* \cong \mathcal{A}(5) \oplus \mathcal{A}(5) \oplus (\mathbb{K}^5 \oplus \mathbb{K}^5) \text{ 等}$$

作用は, $g = (\alpha, A, B) \in (GL_1 \times GL_5 \times GL_5)$ と $\tilde{x} = ((X, Y), \underbrace{(y, y)}_Z) \in V$
 s.t. ${}^*X = -X$, ${}^*Y = -Y$, $y, y \in \mathbb{K}^5$ により.

$$p(g)\tilde{x} = ((AX{}^*A, AY{}^*A){}^*B, A^{-1}[y, y] \begin{pmatrix} 1 \\ (d) \end{pmatrix}) \text{ となる.}$$

このとき, generic point は, [KKH] の proposition 3 より,

$$\tilde{x}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \bigcirc & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} \bigcirc & \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right) \right\} \text{ 等. } \tilde{x}_0 \text{ の isotropy 群 } H_{\tilde{x}_0} = \{1\}$$

$\begin{array}{c} \text{X}_0 \\ \text{Y}_0 \\ \text{Z}_0 \end{array}$

となる. 以下で, Y_k の G_k -orbit が解を与える.

1st. step

${}^*\tilde{A}_0 Z = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ となるように, $\tilde{A}_0 \in GL_5(k)$ をとり, $(\tilde{A}_0 X {}^*\tilde{A}_0, \tilde{A}_0 Y {}^*\tilde{A}_0)$ を
 改めて, (X, Y) とおく.

2nd. step

$$(*) \quad {}^*A^{-1}[y, y] \begin{pmatrix} 1 \\ (d) \end{pmatrix} = (e_4, e_5) = \begin{pmatrix} \bigcirc \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline \bigcirc & \begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix} \end{array} \right)$$

に注意して, (X, Y) が G_k の作用で, (X_0, Y_0) に移ることを示す.

$$X = \left(\begin{array}{c|c|c} X_1 & 0 & X_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -{}^*X_2 & 0 & X_4 \end{array} \right) \text{ は } * \text{-type の } A_1 \text{ で } p(A_1)X = \tilde{A}_1 X {}^*\tilde{A}_1 = X' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & I_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -I_2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

となる. $\tilde{A}_1 Y {}^*\tilde{A}_1 = Y'$ に, X' を変換する B の右からの作用

を考え, $Y' = \begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * & 0 \\ * & * & 0 & * & * \\ 0 & * & * & 0 & * \\ * & 0 & * & * & 0 \end{pmatrix}$ としよ.

このとき, 第3行と, 何倍かして, 第1, 2行に加えて, 3行を

ある行列を $\tilde{A}_1$ とし、かつ、

$$\tilde{A}_1 X'^* \tilde{A}_1 = X' = X'', \quad \tilde{A}_1 Y'^* \tilde{A}_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{array} \right) = Y'' \text{ とおす.}$$

このとき、適当な $\tilde{A}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} I_2 & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{array} \right)$ を作用させて、

$$\tilde{A}_2 X''^* \tilde{A}_2 = X'' = X', \quad \tilde{A}_2 Y''^* \tilde{A}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = Y^{(1)} \quad (\text{rank } Y = 4 \text{ より})$$

とおく。 $\tilde{A}_3$ を 2 行と 4 行に加えられた行列とおく。

$$\tilde{A}_3 X'^* \tilde{A}_3 = X', \quad \tilde{A}_3 Y^{(1)*} \tilde{A}_3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \text{ とおき, } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ を右から}$$

作用させれば, $(\tilde{A}_3 X'^* \tilde{A}_3, \tilde{A}_3 Y^{(1)*} \tilde{A}_3)^* B = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}$

ここで、今までの $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4$ は全て $*$ -type より、

$$^*(\tilde{A}_4 \tilde{A}_3 \tilde{A}_2 \tilde{A}_1)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha'_0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ とおす. } B = \begin{bmatrix} 1 & (\frac{1}{\alpha}) \end{bmatrix} \text{ を作用させ、} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha'_0 \\ 0 \end{bmatrix}^* B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とできる。

Example 11

$(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda^{(2)} + \Lambda_1^{(2)}))$ の表現空間は、

$$V = V(2m) \otimes V(2m) \oplus (V(2m)^{(*)} \oplus V(2m)^{(*)}) \cong M(2m, 2m) \oplus (V(2m)^{(*)} \oplus V(2m)^{(*)}),$$

作用は、 $V \ni \tilde{x} = (X, (y_1, y_2))$ と $g = (\alpha, \beta, A, B) \in GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m}$ により、

$$P(g) \tilde{x} = (AX^*B, \alpha^* y_1^* B, \beta y_2^* B) \text{ とおす.}$$

$$\mathfrak{z} = \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ "generic point" } z, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \end{pmatrix}, \quad A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & B \\ \hline C & {}^*A_1^{-1} \end{array} \right) \text{ s.t. } {}^*B = B$$

$${}^*C = C \text{ により, } \begin{pmatrix} I_m & B_1 B_2 \\ {}^*A_2 B_2 & {}^*A_2 B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ C_1 C_2 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ 0 & x_7 \\ 0 & x_8 \end{pmatrix} \text{ とできる. さらに,}$$

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ x_8 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \end{pmatrix}, \text{ また,}$$

$$B = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ \vdots & \vdots \\ z_m & z_{m+1} \\ \vdots & \vdots \\ z_{2m} & z_{2m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & 1 \\ 0 & \vdots \end{pmatrix} \text{ とできるから, 最初の段階で, } X \text{ を } X^*B \text{ と書き直しておけばよい.}$$

Example 12

$(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1)$ の表現空間は, $V = V(2m) \otimes V(2m+1) \otimes V(2m)$

で, 作用は, $V \ni \tilde{x} = (\tilde{X}, y)$, $\tilde{X} \in M(2m, 2m+1)$, $y \in V(2m)$ と,

$G = GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1} \ni (\alpha, A, B)$ により, $\rho(g)\tilde{x} = (A\tilde{X}^*B, Ay)$

とある.

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_5 & \vdots & \vdots \\ x_2 & x_6 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_3 & x_7 & \vdots & \vdots \\ x_4 & x_8 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

と仮定しよう. ($\odot \tilde{A}_1 \in Sp_m$ の作用で, そうできる.)

さらに,

$$\begin{pmatrix} A_{m-1} & B_{m-1} \\ \vdots & \vdots \\ C_{m-1} & {}^*A_m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ \vdots & \vdots \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{m-1} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_5 \\ x_2 & x_6 \\ \vdots & \vdots \\ x_3 & x_7 \\ x_4 & x_8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とできる.}$$

$\tilde{A}_1 \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$ と改め, $\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2m} \end{pmatrix}$ とするとき, $\tilde{A}_2$ の $\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$ の部分を λ の様にしてやればよい,

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{m-1} & a & B_{m-1} & b \\ \hline a' & a & *b & b \\ \hline C_m & c & *A_{m-1} & c' \\ \hline *a & c & *a' & -a \end{array} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{m-1}y_1 + a y_2 + B_{m-1}y_3 + b y_4 \\ a'y_1 + a y_2 + b y_3 + b y_4 \\ C_m y_1 + c y_2 + *A_{m-1}y_3 + c' y_4 \\ c y_1 + c y_2 + *a' y_3 - a y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{となるように.}$$

a, b, c, a', b, c を $\mathbb{Z}$ へ送る.

$$\tilde{A}_2 \tilde{A}_1 X = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{m-1} & z_1 & 0 & z_1 z_2 \\ \hline 0 & z_2 & 0 & z_1 z_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & z_3 & I_{m-1} & z_1 z_3 \\ \hline 0 & z_4 & 0 & z_1 z_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{に } GL_{2m+1} \text{ の右からの作用での別変換より} \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & z_2 & 0 & z_1 z_2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & z_4 & 0 & z_1 z_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

とできる. さらに, y_0 を変えたい, Sp_m の作用と GL_{2m+1} の作用で.

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} I_{m-1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{m-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} I_m & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_m & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{とできる.}$$

Example 13

$(GL_1^3 \times Sp_m \times GL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))$ の表現空間及び

その元は, $V(2m) \otimes V(2m+1) \oplus V(2m) \otimes (V(2m+1) \oplus V(2m+1))^{(*)} \cong$

$M(2m, 2m+1) \oplus V(2m) \otimes (V(2m+1) \oplus V(2m+1))^{(*)} \ni (X, x, (y_1, y_2))$ で,

作用は, $p(g) \tilde{x} = (\alpha A x^* B, \beta A x, (*B y_1, *B y_2) \begin{pmatrix} 1 & p \end{pmatrix})$ で

generic point は, $\tilde{x}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

1st. step.

$$\tilde{B}_0 \in GL_{2m+1} \text{ s.t. } \tilde{B}_0 \cdot y = \begin{pmatrix} y_1 & y'_1 \\ \vdots & \vdots \\ y_{2m-1} & y'_{2m-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{s.t. rank} = 2m-2$$

とL. 2h 2x2x7 y とおく。

2nd. step

$$\tilde{A}_0 \in Sp_m \text{ s.t. } \tilde{A}_0 \cdot X^* \tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{s.t. rank} = 2m-2 \text{ である。 既知。}$$

$$X = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \quad \text{s.t. rank} [y, y_4] = 2m \text{ と仮定して。}$$

3rd. step

以下, Example 12 と同様の变形で, $Y_k = Gk$ がわかる。

Example 14

$(GL_1 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))$ は generic isotropy 群が, SL_2 に含まれることより, I の Example 81 に帰着され $Y_k = Gk$ となる。

Example 15

$(GL_1 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1))$ も, generic isotropy 群が SL_2 に含まれることより, I の Example 81 に帰着され, $Y_k = Gk$ となる。

まとめると.

Theorem b

Universally transitive open orbits をもつ, 既約でない 2-simple 正則 P.V. は, 以下の (1) ~ (6) で, それは, 上記の議論により, $\gamma_k = G_k^3$ となるから, Proposition A より, $Z_a(\omega) = \tau(G_3) Z_m(\omega)$ という関係式をもつ。

- (1) $(GL_1 \times GL_5 \times GL_2, \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + (\Lambda_1^* + \Lambda_1^*) \otimes 1)$
- (2) $(GL_1^2 \times Sp_m \times GL_{2m}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1^{(*)} + \Lambda_1^{(*)}))$
- (3) $(GL_1 \times Sp_m \times GL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1)$
- (4) $(GL_1^3 \times Sp_m \times GL_{2m+1}, \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1)^{(*)})$
- (5) $(GL_1^2 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1))$
- (6) $(GL_1^3 \times Spin_{10} \times GL_2, (a \text{ half-spin rep.}) \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes (\Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1)) //$

最後に.

木村達雄先生には, この内容を完成させる際, P.V. に関する計算法など数多くの事を教しえていただきました, いさゝくはげましていただきました。ここに感謝の意を表します。 //

[参考文献]

- [B]: A. Borel: Some finiteness properties of adèle groups over Number field: I.H.E.S. 1963, 101-12
 [J]: J-I. Igusa: Zeta distributions associated with some invariants
 American J. Math. 106 (1984), 1013 — 1032

- [K1]: T. Kimura; 根元均質ベクトル空間の研究, 数学 32 (1980), 97-118
- [K2]: ; 特異点の解消と Igusa local zeta function の計算
(京大数理研講究録 1987)
- [KKH]: T. Kimura, S. Kasai and H. Hosokawa; Universal transitivity of simple and 2-simple prehomogeneous vector spaces,
Extrait des annales de L'institut Fourier Tome XXXVIII - Fascicule 2 (1988)
- [Sa 1]: F. Sato; Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II; A convergence criterion, Tôhoku Math. J. 35 (1983), P. 77-P. 99
- [Sa.2]: ; 東京大学に於ける根元均質ベクトル空間の講義ノート (1988)
- [S-K]: M. Sato and T. Kimura; A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, Nagoya Math. J. 65 (1979), 1-55
- [S-S]: M. Sato and T. Shintani; 根元均質ベクトル空間の理論, 数学の歩み 15 (1970)
- [Se]: J. P. Serre; Local fields, Springer GTM 67
- [T]: J. Tate; Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions
Algebraic number theory, Academic Press, 1967, P. 305 ~ P. 342
- [W1]: A. Weil; Adèles and algebraic groups, Institute for advanced study
Princeton, N.J. 1961
- [W2]: ; Fonction zeta et distributions, collected papers Vol. III. 158-163