

Some theorems on invariance of property C under open mappings and closed mappings

久留米工業高等専門学校

菰田智恵子 (Chieko Komoda)

1 はじめに

この小論は、埼玉大学の木村孝先生との共同研究である。

この小論では、空間はすべて正規空間とし、写像はすべて連続で全射とする。

はじめに、この小論で考える概念の定義を述べる。まず、被覆次元の partition による同値命題を無限次元に拡張した A -weakly infinite-dimensional 及び、 S -weakly infinite-dimensional の定義を述べる。

定義 1.1. (Engelking [4] 参照) 空間 X に対し、

X : A -weakly infinite-dimensional (以下、 A -w.i.d. と略記する)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of pairs of disjoint closed subsets of } X$
 $\exists \{L_i : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of closed subsets of } X$
 s.t. L_i : a partition between A_i and B_i ($i \in \mathbb{N}$) , $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \emptyset$

X : S -weakly infinite-dimensional (以下、 S -w.i.d. と略記する)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of pairs of disjoint closed subsets of } X$
 $\exists \{L_i : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of closed subsets of } X$
 s.t. L_i : a partition between A_i and B_i ($i \in \mathbb{N}$) , $\bigcap_{i=1}^n L_i = \emptyset$ for some n

次に、被覆次元の Ostrand による特徴付けを無限次元に拡張した C -space 及び、finite C -space の定義を述べる。

定義 1.2. 空間 X に対し、

X : C -space (Addis and Gresham [2])

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \{G_i : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of open covers of } X$
 $\exists \{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of } X$

$$\text{s.t. } \mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i \in \mathbb{N}), \quad \underline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_i : \text{cover of } X}$$

X : *finite C-space* (Borst [3])

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \{\mathcal{G}_i : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of finite open covers of } X$

$\exists \{\mathcal{H}_i : i \in \mathbb{N}\} : \text{a sequence of collections of pairwise disjoint open subsets of } X$

$$\text{s.t. } \mathcal{H}_i < \mathcal{G}_i \quad (i \in \mathbb{N}), \quad \underline{\bigcup_{i=1}^n \mathcal{H}_i : \text{cover of } X \text{ for some } n}$$

A-w.i.d., S-w.i.d., C-space, finite C-space の関係については、「S-w.i.d. $\implies$ A-w.i.d.」が成り立つことは明らかである。また、「コンパクト空間 X に対して、 $X : S\text{-w.i.d.} \iff X : A\text{-w.i.d.}$ 及び $X : C\text{-space} \iff X : \text{finite } C\text{-space}$ 」が成り立つことも明らかである。さらに、「C-space $\implies$ A-w.i.d.」及び「finite C-space $\implies$ S-w.i.d.」が成り立つことが知られている。しかしながら、コンパクト距離空間に対してさえも、「C-space $\iff$ A-w.i.d.」となるかどうか知られていない。

2 有限次元 dim に関する写像定理

有限次元に関する古典的な写像定理として次が知られている。

Raising Mapping Theorem

定理 2.1. (Hurewicz [5] 1927 年)

$$f : X \longrightarrow Y : \text{closed}$$

$$X, Y : \text{separable metric}$$

$$\exists k \geq 1 \text{ s.t. } |f^{-1}(y)| \leq k \text{ for every } y \in Y$$

$$\implies \dim Y \leq \dim X + (k - 1)$$

Zarelua は 1969 年に上の定理を $X, Y : \text{normal}$ に拡張した。

Lowering Mapping Theorem

定理 2.2. (Hurewicz & Wallman [7] 1941 年)

$$f : X \longrightarrow Y : \text{closed}$$

$$X, Y : \text{separable metric}$$

$$\exists k \geq 1 \text{ s.t. } \dim f^{-1}(y) \leq k \text{ for every } y \in Y$$

$$\implies \dim X \leq \dim Y + k$$

Skljarenko は 1962 年に上の定理を $X : \text{normal}, Y : \text{paracompact}$ に拡張した。さらに、Pasynkov は 1965 年に $X : \text{normal}, Y : \text{metacompact}$ に拡張した。しかしながら、 $Y : \text{normal}$ に拡張できないことが知られている。

3 A -weakly infinite-dimensional space と C -space に関する写像定理

この説では、無限次元に関する写像定理を考えたい。

Raising Mapping Theorem

A -w.i.d. に関しては、Polkowski が 1983 年に次の定理を証明した。

定理 3.1. (Polkowski [9])

$f : X \rightarrow Y : \text{closed}$

$X : \text{countably paracompact}$

$\exists k \geq 1 \text{ s.t. } |f^{-1}(y)| \leq k \text{ for every } y \in Y$

$X : A\text{-w.i.d.} \implies Y : A\text{-w.i.d.}$

我々は、 C -space に関しても同様な結果が成り立つことを証明した。

定理 3.2.

$f : X \rightarrow Y : \text{closed}$

$X : \text{countably paracompact}$

$\exists k \geq 1 \text{ s.t. } |f^{-1}(y)| \leq k \text{ for every } y \in Y$

$X : C\text{-space} \implies Y : C\text{-space}$

さらに、Polkowski は、先の 1983 年の論文で A -w.i.d. に関して次の定理を証明した。

定理 3.3. (Polkowski [9])

$f : X \rightarrow Y$

$X : \text{compact}$

$|f^{-1}(y)| < c \text{ for every } y \in Y$

$X : A\text{-w.i.d.} \implies Y : A\text{-w.i.d.}$

一方、 C -space に関しては、R. Pol が 1996 年に次の定理を証明した。

定理 3.4. (R. Pol [8])

$f : X \rightarrow Y$

$X : \text{compact metric}$

$|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$

$X : C\text{-space} \implies Y : C\text{-space}$

我々は、 C -space に関しても Polkowski の定理と同様な結果が成り立つことを証明した。

定理 3.5.

$$f : X \longrightarrow Y$$

$X : compact$

$$|f^{-1}(y)| < c \text{ for every } y \in Y$$

$$X : C\text{-space} \implies Y : C\text{-space}$$

Lowering Mapping Theorem

Hattori & Yamada は 1989 年に次の定理が成り立つことを証明した。

定理 3.6. (Hattori & Yamada [6])

(i) $f : X \longrightarrow Y : closed$

$X : countably\ paracompact$ あるいは $hereditarily\ normal$

$$f^{-1}(y) : A\text{-w.i.d. for every } y \in Y$$

$$Y : C\text{-space} \implies X : A\text{-w.i.d.}$$

(ii) $f : X \longrightarrow Y : closed$

$X : paracompact$ あるいは $hereditarily\ normal$

$$f^{-1}(y) : C\text{-space for every } y \in Y$$

$$Y : C\text{-space} \implies X : C\text{-space}$$

注. (1) (ii) より、 $X, Y : C\text{-space}$ で $X \times Y : paracompact$ あるいは $hereditarily\ normal$ であるとき、 $X \times Y : C\text{-space}$ となることがわかる。

(2)(i) において、‘ $f^{-1}(y) : C\text{-space}$ ’ を ‘ $f^{-1}(y) : A\text{-w.i.d.}$ ’ に置き換えられるか？

$A\text{-w.i.d.}$ に関する写像定理において、Polkowski は先の 1983 年の論文で、開写像でファイバーが有限である場合についても言及している。我々は、 $C\text{-space}$ に関しても、同様な結果が成り立つことを証明した。

Rising Mapping Theorem

Polkowski は、 $A\text{-w.i.d.}$ 及び $S\text{-w.i.d.}$ に関して次の定理を証明した。

定理 3.7. (Polkowski [9])

- (1) $f : X \longrightarrow Y : \text{open}$
 $Y : \text{countably paracompact}$
 $|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$
 $X : A\text{-w.i.d.} \implies Y : A\text{-w.i.d.}$
- (2) $f : X \longrightarrow Y : \text{open}$
 $X : \text{metacompact}$
 $|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$
 $X : S\text{-w.i.d.} \implies Y : S\text{-w.i.d.}$

我々は、 C -space 及び finite C -space に関しても、Polkowski の定理と同様な結果が成り立つことを証明した。

定理 3.8.

- (1) $f : X \longrightarrow Y : \text{open}$
 $Y : \text{countably paracompact and collectionwise normal}$
 $|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$
 $X : C\text{-space} \implies Y : C\text{-space}$
- (2) $f : X \longrightarrow Y : \text{open}$
 $X : \text{metacompact}$
 $|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$
 $X : \text{finite } C\text{-space} \implies Y : \text{finite } C\text{-space}$

Lowering Mapping Theorem

Polkowski は、 A -w.i.d. 及び S -w.i.d. に関して、次の定理を証明した。ただし、 S -w.i.d. に関する写像定理では、開写像に加えて閉写像であることも仮定している。

定理 3.9. (Polkowski [9])

- (1) $f : X \longrightarrow Y : \text{open}$
 $X : \text{countably paracompact}$
 $|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$
 $Y : A\text{-w.i.d.} \implies X : A\text{-w.i.d.}$
- (2) $f : X \longrightarrow Y : \underline{\text{open and closed}}$
 $Y : \text{metacompact}$
 $|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$

$$Y : S\text{-}w.i.d. \implies X : S\text{-}w.i.d.$$

我々は、 C -space 及び finite C -space に関しても、Polkowski の定理と同様な結果が成り立つことを証明した。ただし、finite C -space に関する写像定理では、Polkowski の定理と同様にして、開写像に加えて閉写像であることも仮定している。

定理 3.10.

$$(1) f : X \longrightarrow Y : \text{open}$$

$$X : \text{countably paracompact and collectionwise normal}$$

$$|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$$

$$Y : C\text{-space} \implies X : C\text{-space}$$

$$(2) f : X \longrightarrow Y : \text{open and closed}$$

$$Y : \text{metacompact}$$

$$|f^{-1}(y)| < \infty \text{ for every } y \in Y$$

$$Y : \text{finite } C\text{-space} \implies X : \text{finite } C\text{-space}$$

参考文献

- [1] P. Alexandroff, *Über abzählbar-fache offene Abbildungen*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 13 (1936), 295-299.
- [2] D. F. Addis and J. H. Gresham, *A class of infinite-dimensional spaces. Part : Dimension theory and Alexandroff's problem*, Fund. Math. 101 (1978), 195-205.
- [3] P. Borst, *Some remarks concerning C-spaces*, Preprint
- [4] R. Engelking, *Theory of Dimensions, Finite and Infinite*, Heldermann Verlag, 1995.
- [5] H. Hurewicz, *Über stetige Bilder von Punktmengen (Zweite Mitteilung)*, Proc. Akad. Amsterdam 30 (1927), 159-165.
- [6] Y. Hattori and K. Yamada, *Closed pre-images of C-spaces*, Math. Japonica 34(1989), 555-561.
- [7] H. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton, 1941.
- [8] R. Pol, *On light mappings without perfect fibers on compacta*, Tsukuba J. Math. 20(1996), 11-19.

- [9] L. Polkowski, *Some theorems on invariance of infinite dimension under open and closed mappings*, Fund. Math. 119(1983), 11-34.