

特異測度による連続関数の一様近似とその応用

関 口 健 東北学院大学教養学部

塩 田 安 信 秋田大学教育学部

1. 序

本稿では、Hata-Yamaguti[1] で扱われている問題、差分方程式系および Lebesgue の特異関数と高木関数を関係づける公式、をマルチンゲールの考え方に基づいて考察する。

2. 主結果

$I = [0, 1]$ の 2 進分割を $n = 0, 1, \dots$ に対し

$$I(n, j) = [j2^{-n}, (j+1)2^{-n}], \quad j = 0, \dots, 2^n - 2,$$

$$I(n, 2^n - 1) = [(2^n - 1)2^{-n}, 1]$$

とし、 σ -加法族の増加列を

$$\mathcal{F}(n) = \sigma(I(n, j); j=0, \dots, 2^n - 1), \quad n = 0, 1, \dots$$

とする。また I 上の関数 R, ϕ を

$$R(x) = 1_{I(1,0)}(x) - 1_{I(1,1)}(x),$$

$$\phi(x) = 2x \bmod 1$$

とおく。各 r ($0 < r < 1$) に対し、 I 上の確率測度 $\mu(r)$ で

$$\mu(r)(I(n+1, 2j)) = r \mu(r)(I(n, j)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$\mu(r)(I(n+1, 2j+1)) = (1-r) \mu(r)(I(n, j)), \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

を満たすものが一意に存在することは知られている。これは de Wijs のフラクタルと呼ばれているもので、 $r = 1/2$ のとき通常の Lebesgue 測度で、それ以

外の場合は連続な特異測度である。 また

$$L(r, x) = \mu(r)([0, x])$$

は、いわゆる Lebesgue の特異関数である。 更に、

$$S(r, x) = \int_0^x 2R / \{1 + (2r-1)R\} d\mu(r)$$

$$S(r, n, x) = S(r, \phi^n(x)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$S(r, n, j, x) = S(r, n, x) 1_{I(n, j)}(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$$

とし、 I 上の連続関数の全体を $\mathcal{C}(I)$ で表す。

定理 2.1 $f \in \mathcal{C}(I)$ は次のように一意に展開される。

$$f(x) = f(0) + (f(1) - f(0))L(r, x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} c(r, f, n, j) S(r, n, j, x),$$

ここで、右辺は一様収束の意味であり、

$$c(r, f, n, j) = f((2j+1)2^{-n-1}) - (1-r)f(j2^{-n}) - rf((j+1)2^{-n}), \\ n = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

注意 $(S(1/2, n, j, x))_{n, j}$ は Schauder 基だから、上の定理は Schauder 展開の一般化になっている。

定理 2.2 各 $x \in I$ について

$$f(x) = a + bL(r, x) + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)S(r, n, x)$$

が収束するならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} |c(n)| < \infty$ であり、普遍定数 K が存在して

$$|a| + |b| + \sum_{n=0}^{\infty} |c(n)| \leq K \|f\|_{\infty}$$

注意 上の定理は、 $r = 1/2$ のとき、畑－山口の結果である。

定理 2.1, 定理 2.2 から直ちに次の定理が導かれる。これは、畑－山口の結果が、 $r \neq 1/2$ の場合も正しいことをいっている。

定理 2.3 数列 $(c(n)), n=0, 1, \dots$, が与えられたとき、差分方程式系

$$\begin{aligned} f((2j+1)2^{-n-1}) - (1-r)f(j2^{-n}) - rf((j+1)2^{-n}) &= c(n), \\ n &= 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \end{aligned}$$

が解 $f \in \mathcal{C}(I)$ をもつための必要十分条件は $\sum_{n=0}^{\infty} |c(n)| < \infty$ である。

このとき、解 f は次のように表される。

$$f(x) = f(0) + (f(1) - f(0))L(r, x) + \sum_{n=0}^{\infty} c(n)S(r, n, x)$$

最後に、高木関数と Lebesgue の特異関数の関連付ける畑－山口の公式を一般化するために、次の記号を準備する。

$$\varrho(r, n, j) = \mu(r)(I(n, j))$$

$$T(r, 0, x) = L(r, x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$T(r, k+1, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^n-1} \varrho(r, n, j) U(r, k, n, j, x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$U(r, 0, x) = S(r, x),$$

$$U(r, k, x) = R(x)T(r, k, \phi(x)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$U(r, k, n, x) = U(r, k, \phi^n(x)), \quad k = 0, 1, \dots, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$U(r, k, n, j, x) = U(r, k, n, x) l_{1(n, j)}(x),$$

$$k = 0, 1, \dots, n = 0, 1, \dots, j = 0, \dots, 2^n - 1$$

定理 2.4 Lebesgue の特異関数 $L(r)$ は $r \in (0, 1)$ について、 $\mathcal{C}(I)$ -値解析関数であり、次が成り立つ。

$$\partial^k L(r, x) / \partial r^k = k! T(r, k, x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

3. 定理の証明

3.1 準備

以下 § 2 の記号をもちいる。また、 $\mu(r)$ に関する期待値を $E_r[\]$ で表す。 $0 < r < 1$, 複素数 ξ に対して

$$Z(r, \xi, 0) = 1,$$

$$Z(r, \xi, n) = \prod_{j=0}^{n-1} \{1 + 2(\xi - r)R \circ \phi^j / (1 + (2r-1)R \circ \phi^j)\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

とおく。次は容易に示せる。

命題 3.1.1 (i) $(1 + 2R \circ \phi^n / (1 + (2r-1)R \circ \phi^n), \mathcal{F}(n+1))$, $n = 0, 1, \dots$, は $\mu(r)$ に関するマルチンゲール差である。

(ii) $(Z(r, \xi, n), \mathcal{F}(n))$, $n = 0, 1, \dots$, は $\mu(r)$ に関するマルチンゲールである。

(iii) $0 < s < 1$ のとき、 $(Z(r, s, n), \mathcal{F}(n))$, $n = 0, 1, \dots$, は $\mu(r)$ に関する正直マルチンゲールであり、 $Z(r, s, n)d\mu(r)$ は $d\mu(s)$ に弱収束する。

注意 $Z(r, s, n)$ は $\mathcal{F}(n)$ 上に制限した $\mu(s)$ の $\mu(r)$ に関する Radon 微分である。また、マルチンゲール $(Z(r, \xi, n), \mathcal{F}(n))$, $n = 0, 1, \dots$, は

ξ が実数のときに限り L^1 -有界である。

補題 3.1.2 (i) $\int_1 g \, d\mu(r) = 0$ ならば

$$\int_0^x g \circ \phi^n \, d\mu(r) = 2^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} \{1 + (2r-1)R \circ \phi^j(x)\} \int_0^{\phi^n(x)} g \, d\mu(r)$$

(ii) h が $\mathcal{F}(n)$ -可測、 $E_r[g|\mathcal{F}(n)] = 0$ ならば

$$\int_0^x h g \, d\mu(r) = h(x) \int_0^x g \, d\mu(r)$$

証明 (i) ϕ が $\mu(r)$ に関する保測変換であるから、
 $\int_1 g \circ \phi^n \, d\mu(r) = 0$ となり、 $n = 1$ の場合に結果を示せばよい。
 $x \in I(1, 0)$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_0^x g \circ \phi \, d\mu(r) &= \int_{I(1,0)} 1_{[0, \phi(x)]}(\phi(y)) \mu(r, dy) \\ &= r \int_0^{\phi(x)} g \, d\mu(r) \end{aligned}$$

$x \in I(1, 1)$ のとき、

$$\begin{aligned} \int_0^x g \circ \phi \, d\mu(r) &= \int_{I(1,0)} g \circ \phi \, d\mu(r) + \int_{I(1,1)} g \circ \phi \, d\mu(r) \\ &= r \int_1 g \, d\mu(r) + (1-r) \int_0^{\phi(x)} g \, d\mu(r) \\ &= (1-r) \int_0^{\phi(x)} g \, d\mu(r) \end{aligned}$$

(ii) $x \in I(n, j)$ とし、 $I(n, j)$ の左側の区間を J とすると、

$$\begin{aligned}
\int_0^x hg \, d\mu(r) &= \int J hg \, d\mu(r) + \int 0 \times 1_{I(n,j)} hg \, d\mu(r) \\
&= \int J h E_r[g | \mathcal{F}(n)] d\mu(r) + h(x) \int_0^x 1_{I(n,j)} g \, d\mu(r) \\
&= h(x) \int_0^x g \, d\mu(r)
\end{aligned}$$

3.2 Schauder 基の一般化 (定理 2.1 の証明)

μ を I 上の連続な確率測度で各区間に対し $\mu(J) > 0$ を満たすものとする。
次の条件を満たす I の分割列 $J(n, j)$, $j = 0, \dots, k(n)$, $n = 0, 1, \dots$, を考える。

- (i) $J(n, j)$ は $j = k(n)$ 以外すべて半開区間である。
- (ii) $J(n+1, j)$, $j=0, \dots, k(n+1)$, は $J(n, j)$, $j=0, \dots, k(n)$, の細分である。
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{ |J(n, j)|; j=0, \dots, k(n) \} = 0$

更に、

$$\mathcal{G}(n) = \sigma(J(n, j); j=0, \dots, k(n)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

とおく。

命題 3.2.1 $\cup_n \mathcal{G}(n)$ 上の有限加法測度 ν が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{ |\nu(J)|; \text{区間 } J \in \cup_n \mathcal{G}(n), \exists J(n, j): J \subset J(n, j) \} = 0$$

を満たすとき、

$$Z(n) = \sum_{j=0}^{k(n)} \nu(J(n, j)) 1_{J(n, j)} / \mu(J(n, j)), \quad n = 0, 1, \dots,$$

とおけば、 $(Z(n), \mathcal{G}(n))$, $n = 0, 1, \dots$, は μ に関するマルチンゲールである。

更に、 $\int_0^x Z(n) d\mu$ は I 上で一様に連続関数 f に収束し、それは

$$f(0) = 0,$$

$$\nu(J(n, j)) = f(b(n, j)) - f(a(n, j)), \quad n = 0, 1, \dots, j = 0, \dots, k(n),$$

を満たす。ここで、 $a(n, j)$, $b(n, j)$ は $J(n, j)$ の端点で $a(n, j) < b(n, j)$ とする。

証明 $x \in J(n+p, j) \subset J(n, i)$ とし、 J を $J(n, i) \setminus J(n+p, j)$ の左側の区間とすると、

$$\begin{aligned} & \int_0^x Z(n+p) d\mu - \int_0^x Z(n) d\mu \\ &= \nu(J) + \nu(J(n+p, j)) \mu([0, x] \cap J(n+p, j)) / \mu(J(n+p, j)) \\ & \quad - \nu(J(n, i)) \mu([0, x] \cap J(n, j)) / \mu(J(n, i)) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^x Z(n+p) d\mu - \int_0^x Z(n) d\mu \right| \\ & \leq 3 \sup\{|\nu(J)|; \text{区間 } J \in \cup_1 \mathcal{G}(1), \exists J(n, j): J \subset J(n, j)\}. \end{aligned}$$

従って、 $\int_0^x Z(n) d\mu$ は I 上で一様収束する。

残りの部分は、 $Z(n)$ の定義から容易に示せる。

命題 3.2.2 任意の連続関数 f に対して、 μ に関するマルチンゲール

$(Z(n), \mathcal{G}(n))$, $n = 0, 1, \dots$, が存在し、 $\int_0^x Z(n) d\mu$ は I 上で一様に

$f(x) - f(0)$ に収束する。

証明 $U_n \mathcal{G}(n)$ 上の有限加法測度 ν を次から定まるものとする。

$$\nu(J(n, j)) = f(b(n, j)) - f(a(n, j)), \quad n = 0, 1, \dots, j = 0, \dots, k(n),$$

ここで、 $a(n, j), b(n, j)$ は $J(n, j)$ の端点で $a(n, j) < b(n, j)$ とする。

この ν は命題 3.2.1 の条件を満たすから、マルチンケール $(Z(n), \mathcal{G}(n))$ の存在がいえる。 また、かく $x \in I$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x Z(n) d\mu = 0$$

とすると、

$$\begin{aligned} \int_{J(n, j)} Z(n) d\mu &= \int_{J(n, j)} Z(n+p) d\mu \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_{J(n, j)} Z(n+p) d\mu = 0 \end{aligned}$$

だから $Z(n) = 0$ μ -a.e., $n = 0, 1, \dots$. 従って、一意性もいえる。

定理 3.2.3 $J(n, j)$ が 2 進分割、すなわち $I(n, j)$ とする。

$f \in \mathcal{G}(I)$ は次のように一意に展開される。

$$\begin{aligned} (3.2.1) \quad f(x) &= f(0) + (f(1) - f(0))L(\mu, x) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k(n)} c(\mu, f, n, j) S(\mu, n, j, x), \end{aligned}$$

ここで、右辺は一様収束の意味であり、

$$L(\mu, x) = \mu([0, x]),$$

$$S(\mu, n, j, x)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x \{1_{I(n+1, 2j)} / \mu(I(n+1, 2j)) \\ &\quad - 1_{I(n+1, 2j+1)} / \mu(I(n+1, 2j+1))\} d\mu, \end{aligned}$$

$$n = 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots, 2^n - 1.$$

$$\begin{aligned} c(\mu, f, n, j) &= f((2j+1)2^{-n-1}) \\ &\quad - \{ \mu(I(n+1, 2j+1))f(j2^{-n}) \\ &\quad - \mu(I(n+1, 2j))f((j+1)2^{-n}) \} / \mu(I(n, j)), \\ n &= 0, 1, \dots, j = 0, 1, \dots, 2^n - 1. \end{aligned}$$

証明 命題 3.2.2 から f に対応するマルチンゲールを $(Z(n), \mathcal{F}(n))$, 有限加法的測度を ν とする。このとき、

$$\begin{aligned} \int_0^x Z(0) d\mu &= \int_0^x \nu(I) / \mu(I) d\mu = (f(1) - f(0))L(\mu, x), \\ \int_0^x (Z(n+1) - Z(n)) d\mu &= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_0^x \{ \nu(I(n+1, 2j))1_{I(n+1, 2j)} / \mu(I(n+1, 2j)) \\ &\quad + \nu(I(n+1, 2j+1))1_{I(n+1, 2j+1)} / \mu(I(n+1, 2j+1)) \\ &\quad - \nu(I(n, j))1_{I(n, j)} / \mu(I(n, j)) \} d\mu \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} [\{ \mu(I(n+1, 2j+1))\nu(I(n+1, 2j))1_{I(n+1, 2j)} \\ &\quad - \mu(I(n+1, 2j))\nu(I(n+1, 2j+1)) \} / \mu(I(n, j))] \cdot \\ &\quad \int_0^x \{ 1_{I(n+1, 2j)} / \mu(I(n+1, 2j)) \\ &\quad - 1_{I(n+1, 2j+1)} / \mu(I(n+1, 2j+1)) \} d\mu \\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} c(\mu, f, n, j) S(\mu, n, j, x) \end{aligned}$$

だから、 f は (3.2.1) の様に展開される。また、一意性は、命題 3.2.2 の一意性から容易に示せる。

定理 3.2.3 において、 $\mu = \mu(r)$ のときが、定理 2.1 である。 実際、

$$c(\mu(r), f, n, j) = c(r, f, n, j)$$

であり、補題 3.1.2 より

$$\begin{aligned} & S(\mu(r), n, j, x) \\ &= \int_0^x \{(1_{I(n+1, 2j)} / r) - (1_{I(n+1, 2j+1)} / (1-r))\} d\mu(r) / \mu(I(n, j)) \\ &= \int_0^x 2R \circ \phi^n / \{1 + (2r-1)R \circ \phi^n\} d\mu(r) 1_{I(n, j)}(x) \cdot \\ & \quad \prod_{j=0}^{n-1} \{2 / (1 + (2r-1)R \circ \phi^j(x))\} \\ &= S(r, n, j, x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, 2^n - 1. \end{aligned}$$

3.3 Sidon 型の定理 (定理 2.2 の証明)

命題 3.3.1 各 $x \in I$ で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) S(r, n, x)$$

が収束するならば、 $\sum_{n=0}^{\infty} |c(n)| < \infty$.

証明 $a \in I$ を次のように定める。

$$c(n) < 0 \Leftrightarrow \phi^n(a) \in I(2, 0) \cup I(2, 3)$$

$$c(n) \geq 0 \Leftrightarrow \phi^n(a) \in I(2, 1) \cup I(2, 2)$$

このとき、 $\phi^n(1-x) = 1 - \phi^n(x)$ に注意すると、

$$c(n)\{S(r,n,a)-(1+(2r-1)R \circ \phi^n(a))/2\} > 0,$$

$$c(n)\{S(r,n,1-a)-(1+(2r-1)R \circ \phi^n(1-a))/2\} > 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

だから

$$(3.3.1) \quad c(n)\{S(r,n,a) + S(r,n,1-a)\} \geq c(n), \quad n = 0, 1, \dots$$

$\delta > 0$ とし

$$N(\delta) = \{n; |S(r,n,a)-(1+(2r-1)R \circ \phi^n(a))/2| < \delta \text{ または } |S(r,n,1-a)-(1+(2r-1)R \circ \phi^n(1-a))/2| < \delta \}$$

とおくと、

$$(3.3.2) \quad c(n)\{S(r,n,a) + S(r,n,1-a)\} \geq 2\delta |c(n)| + c(n), \quad n \notin N(\delta)$$

更に、 $\delta > 0$ を十分小さくとると

$$(3.3.3) \quad i, j \in N(\delta), \quad i \neq j \text{ ならば } |i - j| \geq 3$$

また $1/3$ が ϕ の周期 2 の周期点であることから、

$$(3.3.4) \quad f(1/3) + f(2/3) = \sum c(n)\{S(r,1/3) + S(r,2/3)\}$$

従って (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4) により

$$\begin{aligned} f(a) + f(1-a) \\ \geq 2\delta \sum_{n \notin N(\delta)} |c(n)| + \{f(1/3) + f(2/3)\} / \{S(r,1/3) + S(r,2/3)\} \end{aligned}$$

だから

$$(3.3.5) \quad \sum_{n \notin N(\delta)} |c(n)| < \infty$$

(3.3.3) より、次の条件 (i), (ii) を満たすように $b \in I$ を定めることができる。

(i) $n \in N(\delta)$ のとき、

$$c(n) < 0 \Leftrightarrow \phi^n(a) \in I(2,0) \cup I(2,3)$$

$$c(n) \geq 0 \Leftrightarrow \phi^n(a) \in I(2,1) \cup I(2,2)$$

$$(ii) \phi^n(b), \phi^{n+1}(b) \in I(2,0) \cup I(2,3) \Rightarrow \phi^{n+2}(b) \in I(2,1) \cup I(2,2)$$

条件 (ii) より、 $1/4, 3/4$ は $\{\phi^n(b); n=0,1,\dots\}, \{\phi^n(1-b); n=0,1,\dots\}$ の極限点とならないから、十分小さな $\eta > 0$ をとれば、

$$|S(r,n,b) - (1+(2r-1)R \circ \phi^n(b))/2| > \eta,$$

$$|S(r,n,1-b) - (1+(2r-1)R \circ \phi^n(1-b))/2| > \eta, \quad n = 0,1,\dots,$$

を満たすようにでき、更に条件 (i) を用いて、

$$c(n)\{S(r,n,b) + S(r,n,1-b)\} \geq 2\eta |c(n)| + c(n), \quad n \in N(\delta)$$

とできる。従って、(3.3.5) に注意すれば、結論を得る。

上の命題から、定理 2.2 の前半がいえる。次に、

$$E = \{f \in \mathcal{C}(I); \text{各 } c(r,f,n,j) \text{ は } j \text{ に無関係}\},$$

$$\mathcal{L} = \{(d(n))_{n=0,1,\dots}; \sum |d(n)| < \infty\}$$

とおく。E は一様ノルムで Banach 空間であり、

$$(d(n))_n \mapsto d(0)+d(1)L(r,x)+\sum d(n+2)S(r,n,x)$$

で与えられる、 $\mathcal{L}$ から E への連続線形写像は、定理 2.1 より単射であり、命題 3.3.1 より全射となる。従って、Banach の定理より定理 2.2 の後半もいえる。

3.4 畑-山口の公式の一般化 (定理 2.4 の証明)

補題 3.4.1 $0 < r < 1, D = \{\xi : \text{複素数}; |\xi| < 1, |\xi - 1| < 1\}$ とし、

$$F(r, \xi, n, x) = \int_0^x Z(r, \xi, n) d\mu(r), \quad \xi \in D, x \in I, n = 0, 1, \dots,$$

とおくとき、次が成り立つ。

$$(i) \sup\{|F(r, \xi, n, x)|; x \in I\} \leq 1 + |\xi - r| / \{1 - \max(|\xi|, |\xi - 1|)\}, \quad n=0, 1, \dots,$$

(ii) 各 r, n に対して、 $F(r, \xi, n)$ は D 上の $\mathcal{O}(I)$ -値解析関数で、 $n \rightarrow \infty$ としたとき広義一様収束する。

従って、 $\partial^k F(r, \xi, n) / \partial \xi^k, k=1, 2, \dots$, も D 上で $n \rightarrow \infty$ としたとき広義一様収束する。

証明 (i) 補題 3.1.2 から

$$\begin{aligned} F(r, \xi, n+1, x) &= F(r, \xi, n, x) + \int_0^x Z(r, \xi, n) 2(\xi - r) R \circ \phi^n / \{1 + (2r-1)R \circ \phi^n\} d\mu(r) \\ &= F(r, \xi, n, x) + 2^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} \{1 + (2\xi - 1)R \circ \phi^j(x)\} \cdot \\ &\quad \int_0^{\phi^n(x)} 2(\xi - r) R / \{1 + (2r-1)R\} d\mu(r) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} |F(r, \xi, 1, x)| &\leq 1 + |\xi - r|, \\ |F(r, \xi, n+1, x)| &\leq |F(r, \xi, n, x)| + |\xi - r| \max(|\xi|, |\xi - 1|) \end{aligned}$$

従って、

$$|F(r, \xi, n, x)| \leq 1 + |\xi - r| / \{1 - \max(|\xi|, |\xi - 1|)\}$$

(ii) 補題 3.1.2 から

$$\begin{aligned}
& F(r, \xi, n+1, x) - F(r, \xi, n, x) \\
&= 2^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} \{1 + (2\xi - 1)R \circ \phi^j(x)\} \int_0^{\phi^n(x)} \{Z(r, \xi, 1) - 1\} d\mu(r)
\end{aligned}$$

だから, (i) を用いて

$$\begin{aligned}
& |F(r, \xi, n+1, x) - F(r, \xi, n, x)| \\
&\leq \max(|\xi|, |\xi - 1|) n [2 + |\xi - r| / \{1 - \max(|\xi|, |\xi - 1|)\}]
\end{aligned}$$

補題 3.4.2

$$\begin{aligned}
& D(r, k, n, x) \\
&= \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \int_0^x \prod_{l=1}^k \{2R \circ \phi^{i_l} / (1 + (2r - 1)R \circ \phi^{i_l})\} d\mu(r), \\
&\quad k = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots,
\end{aligned}$$

とおくとき、次が成り立つ。

- (i) $\|T(r, k)\|_{\infty} \leq \{1 - \max(r, 1 - r)\}^{-k}, k = 0, 1, \dots,$
(ii) $\|T(r, k) - D(r, k, n)\|_{\infty} \leq \text{Const}(k) n^k \max(r, 1 - r)^n, k = 1, 2, \dots$

証明 (i) は容易に示せる。 補題 3.1.2 を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
& |T(r, 1, x) - D(r, 1, n, x)| \leq \max(r, 1 - r)^{n+1} / \{1 - \max(r, 1 - r)\}, \\
& |T(r, k+1, x) - D(r, k+1, n, x)| \\
&\leq \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} 2^{-j} \prod_{l=0}^{j-1} \{1 + (2r - 1)R \circ \phi^l(x)\} U(r, k, j, x) \right| \\
&\quad + \left| \sum_{j=0}^n 2^{-j} \prod_{l=0}^{j-1} \{1 + (2r - 1)R \circ \phi^l(x)\} R \circ \phi^j(x) \cdot \right. \\
&\quad \left. |T(r, k, \phi^{j+1}(x)) - D(r, k, n - j - 1, \phi^{j+1}(x))| \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \max(r, 1-r)^{n+1} \|T(r, k)\|_{\infty} / \{1 - \max(r, 1-r)\} \\ + \sum_{j=0}^n \max(r, 1-r)^j \|T(r, k) - D(r, k, n-j-1)\|_{\infty}$$

となり、(ii) を得る。

命題 3.1.1 と補題 3.4.1 より、

$$\partial^k L(r, x) / \partial r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} k! D(r, k, n, x)$$

だから、補題 3.4.2 から定理 2.4 を得る。

参考文献

- [1] M.Hata and M.Yamaguti, The Takagi function and its generalization.
Japan J.Appl.Math., 1(1984), 183-199.