

The Spectrum of Magnetic Schrödinger Operator on a Graph ～磁場付きラプラシアンをとおして見た離散スペクトル幾何～

Yusuke HIGUCHI¹ (樋口 雄介 : 昭和大学)
Tomoyuki SHIRAI² (白井 朋之 : 東京工業大学)

¹ Mathematics Laboratories, College of Arts and Sciences, Showa University

² Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. はじめに ～離散スペクトル幾何～.

近年, グラフを対象とした「離散スペクトル幾何」の研究が様々な見地から盛んになされている. これは一言で言ってしまえば, リーマン多様体上のラプラシアンのスペクトルと幾何学的不変量との関係を研究する「スペクトル幾何」の離散版ということになる. もちろん, リーマン多様体を「グラフ」に, ラプラシアンを「グラフ上のラプラシアン」に置き換えれば, 直ちに「舞台」は整うわけではあるが, しかし結果までがそのまま置き換わるわけではない. 「連続」と「離散」の類似が成立する場面もあれば, 全く違う様相が見られる場面もある. これは, 「離散」の「メッシュ」を細かくして「極限」に持って行けば「連続」の様相が見られるのでなんらかの関係があるだろう, という直観の一方で, 「極限」とそれに至るまでの「途中段階」では様相が異なるかもしれない, という感覚を持ち得ることからも, 想像に難くないであろう. すなわち, 「連続構造」への適用を意識しながら, 「離散構造」が秘めている独自の美しい世界を開拓することで, 「離散スペクトル幾何」は発展を続けているものと我々は信じている. さて本稿では, グラフ上での「離散磁場付きラプラシアン」(discrete magnetic Schrödinger operator) を考えて, そこでの我々が目標としている問題と, 現在のところまで我々が分かっていることを述べていきたい. なお本稿は我々の論文 [9,10,11] を基にしている.

2. 設定 ～離散磁場付きラプラシアン～.

ここでは簡単に我々の設定を述べることにする. グラフ G は連結な局所有限なものとし, $V(G)$ でグラフ G の頂点集合, $E(G)$ でグラフ G の(無向)辺集合を表す. $E(G)$ の元である各辺には2通りの向きを与えることが出来るので, $E(G)$ にすべての「向き」を与えた有向辺集合を $A(G)$ とする. さらに有向辺 e に対して, e の始点を $o(e)$,

終点を $t(e)$ と表し, e の「逆向きの辺」を $\bar{e}$ で表す. さて, $A(G)$ に対して正の実数値をとる関数 p を, G の各頂点 x において,

$$\sum_{e \in A_x(G)} p(e) = 1, \quad (2.1)$$

を満たすようにとる. ここで $A_x(G) = \{e \in A(G) | o(e) = x\}$ としている. このような関数 $p : A(G) \rightarrow \mathbf{R}^+$ を推移確率と呼ぶが, 我々は p に対して, 「対称」という仮定を常に置くものとする. それはつまり, ある正值実数値関数 (「対称測度」と呼ばれる) $m : V(G) \rightarrow \mathbf{R}^+$ があって,

$$m(o(e))p(e) = m(t(e))p(\bar{e}) \quad (2.2)$$

を全ての有向辺 $e \in A(G)$ に対して満たしているというものである. このような関数 m は p に対して存在すれば定数倍を除いて一意である.

次に, 有向辺の向きが反転すると値がマイナス倍になる有向辺上の関数からなる空間を

$$C^1(G, \mathbf{R}) = \{\theta : A(G) \rightarrow \mathbf{R} \mid \theta(\bar{e}) = -\theta(e)\} \quad (2.3)$$

と置き, $C^1(G, \mathbf{R})$ の要素を G 上の「1-form」と呼ぶ. これは後程見るように磁場に対する「ベクトルポテンシャル」ととらえられるものである. そこで, 一つ 1-form $\theta \in C^1(G, \mathbf{R})$ を固定し, 我々は次の形で「離散磁場付きラプラシアン」を定義する: $V(G)$ 上の複素数値関数 f に対して,

$$H_{\theta, G}f(x) = \sum_{e \in A_x(G)} p(e) \exp(\sqrt{-1}\theta(e)) f(t(e)) - f(x). \quad (2.4)$$

定義に見られる幾分の記号の繁雑さは, グラフ G が単純でなくてもよい～自分を結ぶ辺 (self-loop) を持っていたとしても良い, 2 頂点を結ぶ辺が 2 本以上 (multiple edge) あってもよい～という所からきている. さてこの作用素 $H_{\theta, G}$ は次のヒルベルト空間で非正定値な有界自己共役作用素であること, また, スペクトル集合 $\text{Spec}(-H_{\theta, G})$ は $[0, 2]$ の閉部分集合であることは簡単に調べられる:

$$\ell^2(V(G)) = \{f \in C^0(G) \mid \langle f, f \rangle_V < \infty\}. \quad (2.5)$$

ここでの内積は, $\langle f_1, f_2 \rangle_V = \sum_{x \in V(G)} f_1(x) \overline{f_2(x)} m(x)$ で定められている. ちなみに, 全ての有向辺上でゼロとなるような特殊な 1-form θ を考えると, $H_{\theta, G}$ は良く知られた次の形の「離散ラプラシアン」 Δ (cf. [3, 5, 6, 8]) となる:

$$\Delta f(x) = \sum_{e \in A_x(G)} p(e) f(t(e)) - f(x). \quad (2.6)$$

したがって $H_{\theta,G}$ は「摂動されたラプラシアン」ともとらえられるので、 $H_{\theta,G}$ 自身の持つ多種多様な性質を調べることはもちろんのこととして、 $H_{\theta,G}$ の $\theta = 0$ 近辺の挙動から、 Δ の今まで見えなかった性質をもとりだそう、というのが我々の目論みでもある。残念ながら現在のところはまだそれが成功しているとは言えないが。

さて、 $H_{\theta,G}$ に含まれる「磁場」について触れておこう。グラフ G における「道 (path)」とは、イメージ通りのものであるが、表現するなら、 $i = 1, \dots, n-1$ に対して $t(e_i) = o(e_{i+1})$ を満たす有向辺の列 $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ となる。また、path $c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ が $t(e_n) = o(e_1)$ (道の始点と終点の一致) を満たすとき、 c を「閉道 (closed path)」と呼ぶ。そこで、閉道 c に対する θ による「磁場 (magnetic flux)」を次の形で定義をする：

$$\int_c \theta = \sum_{i=1}^n \theta(e_i). \quad (2.7)$$

いわば、1-form θ を「電流」、閉道 c を「回路」と考えれば、 $\int_c \theta$ を「磁場」と呼んでも許されるだろう。さらに、次の補題が成立することをもって、この立場を認めていただくものとする：

Lemma 2.1 (ゲージ不変性) (cf. [9,17]). G 上、 p は与えられ固定されているものとする。 θ_1 と θ_2 を G 上の 2 つの 1-form とするとき、もし、 G の各閉道で、 θ_1 と θ_2 の磁場が 2π を法として等しかったならば、 H_{θ_1} と H_{θ_2} はユニタリ同値であり、 $\text{Spec}(-H_{\theta_1}) = \text{Spec}(-H_{\theta_2})$ が成立する。 ■

この磁場付きラプラシアンの設定は、E. Lieb and M. Loss [17] や T. Sunada [20] で見られるものと、本質的には同じである。

3. 例 $\sim \mathbf{Z}^2$ 上での磁場モデル。

なにはともあれ、具体例を見てみることにする。グラフ G を 2 次元正方格子 $\mathbf{Z}^2$ とし、 G の頂点集合 $V(G)$ を $V(G) = \{x = (m, n) \mid m, n \in \mathbf{Z}\}$ 、(無向) 辺集合 $E(G)$ を $E(G) = \{xy \mid x, y \in V(G), |x - y| = 1\}$ (ここで、 $|\cdot|$ はユークリッド距離を表す) とする。推移確率に関しては $\mathbf{Z}^2$ における等方的酔歩を表すものとして、任意の $e \in A(G)$ に対して、 $p(e) = 1/4$ と置いてしまおう。このとき対称測度 m は定数関数となる：

$$H_{\theta,G}f(x) = (1/4) \sum_{e \in A_x(G)} \exp(\sqrt{-1}\theta(e)) f(t(e)) - f(x). \quad (3.1)$$

また、 $A(G)$ の部分集合として $A_0(G) = \{e \in A(G) \mid t(e) - o(e) = (1, 0) \text{ or } (0, 1)\}$ で定める。このとき、 $\overline{A_0(G)}$ を $A_0(G)$ の逆向きの辺集合とおくと、 $A_0(G) \cap \overline{A_0(G)} = \emptyset$ で、 $A(G) = A_0(G) \cup \overline{A_0(G)}$ である。これは以下にみるように、与えられた「電流」である 1-form θ の表現を簡潔にする便宜上の定義である。さらに正方格子 $\mathbf{Z}^2$ の各「四

角面」の境界の長さ4の閉道を $c_{m,n}$ で表すものとする：つまり

$$c_{m,n} = (e_1, e_2, e_3, e_4), \quad (3.2)$$

ここで, $o(e_1) = (m, n)$, $o(e_2) = (m+1, n)$, $o(e_3) = (m+1, n+1)$, $o(e_4) = (m, n+1)$ としている.

ではいよいよ具体的に 1-form θ を与えてみよう.

例 3.1 一様磁場 ～古典的 Harper 作用素～. 次のような 1-form η をまず固定する：
 $o(e) = (m, n)$ である各 $e \in A_0(G)$ に対して,

$$\eta(e) = \begin{cases} -n, & \text{if } t(e) - o(e) = (1, 0), \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.3)$$

とおき, 各 $e \in \overline{A_0(G)}$ に対しては $\eta(e) = -\eta(\bar{e})$ とする. このとき, 1 パラメータ t を用いて $\theta(t) = t\eta$ とおくと, 全ての $c_{m,n}$ に対して,

$$\int_{c_{m,n}} \theta(t) = t \quad (3.4)$$

が成立する.

この例での $\theta(t)$ の与え方では, 式 (3.4) より $H_{\theta(t), G}$ は「一様磁場を持つ」と自然に考えることができ, したがって「古典的 Harper 作用素」と本質的に同じである. このとき, $\text{Spec}(-H_{\theta(t), G})$ は t に対して非常に敏感に変化する性質をもち, 次のようなことが良く知られている. 詳しくは [4, 7, 12] を参照されたい:

(1) $t/(2\pi)$ が有理数のときには, $\text{Spec}(-H_{\theta(t), G})$ は band 構造 (つまり, 有限個の閉区間の和集合) を持つ;

(2) $t/(2\pi)$ が Liouville 数のときには $\text{Spec}(-H_{\theta(t), G})$ は「カントール集合」となる. $\text{Spec}(-H_{\theta(t), G})$ を具体的に計算してみたいのはやまやまだが, ここにはしっかり「困難の壁」が待ち受けているのである. たとえば $t/(2\pi)$ が有理数のときには, 「原理的には $H_{\theta(t), G}$ の持つ周期性から「フーリエ級数」を用いた計算によって「求まる」わけであるが, その過程には大きいサイズの行列の固有値の厳密な計算が要求されるので, 直接的には「不可能」といえよう. そこで「一様磁場」は諦め, 次のような「2周期磁場」というモデルを考えてみる.

例 3.2 2周期磁場モデル. 次のような 1-form η をまず固定する：
 $o(e) = (m, n)$ である各 $e \in A_0(G)$ に対して,

$$\eta(e) = \begin{cases} 1, & \text{if } t(e) - o(e) = (1, 0) \text{ and } n \text{ is even,} \\ -1, & \text{if } t(e) - o(e) = (1, 0) \text{ and } n \text{ is odd,} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (3.5)$$

とおき, 各 $e \in \overline{A_0(G)}$ に対しては $\eta(e) = -\eta(\bar{e})$ とする. このとき, 1 パラメータ t を用いて $\theta(t) = t\eta$ とおくと, 全ての $c_{m,n}$ に対して,

$$\int_{c_{m,n}} \theta(t) = \begin{cases} 2t, & \text{if } n \text{ is even,} \\ -2t, & \text{if } n \text{ is odd,} \end{cases} \quad (3.6)$$

が成立する.

式(3.6)より, この例での $\theta(t)$ の与え方が「2周期磁場」モデルと呼んでいる理由であるが, 「一様磁場」モデルと異なり, 連続場でのどのモデルに対応するかは明らかではない. 素朴にメッシュを細かくしていくと, 磁場は消えてしまうようにも思える一方で, 消えずになにか残る「変な」モデルの離散版とも思えてしまう. どうしても何か具体的なイメージを与えよ, ということなら, 「針金」で作った正方格子に「横方向」のみ, 一段ずつ「向き」が異なる大きさ t の「電流」を流したモデル, という程度でお茶を濁させていただくしかない. さて, このときはフーリエ級数を用いて $\text{Spec}(-H_{\theta(t),G})$ を厳密に求めることが出来て,

$$\begin{aligned} \text{Spec}(-H_{\theta(t),G}) = & \\ & \begin{cases} \left[1 - \left(\sqrt{1 + 1/\sin^2 t} \right)/2, 1 + \left(\sqrt{1 + 1/\sin^2 t} \right)/2 \right], & \text{if } 0 \leq |\cos t| \leq \alpha, \\ \left[(1 - |\cos t|)/2, (3 + |\cos t|)/2 \right], & \text{if } \alpha \leq |\cos t| \leq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる. ここで, $\alpha = (-1 + \sqrt{5})/2$ である. また, $H_{\theta(t),G}$ は絶対連続スペクトルしか持たないことも分かる. 一方で, G と θ の周期性に注目して, Figure 1 に見られるような有限グラフ M の上で $H_{\theta(t),G}$ と同様の作用素 $H_{\theta(t),M}$ を考え, そのスペクトル $\text{Spec}(-H_{\theta(t),M})$ を計算してみると次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{Spec}(-H_{\theta(t),M}) = & \\ & \{ (1 - \cos t)/2, (3 - \cos t)/2, (1 + \cos(t \pm \pi/3))/2, (3 + \cos(t \pm \pi/3))/2 \}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

ちなみに, M として Figure 1 のようなグラフを選んだのに必然性はなく, 言うならば「計算しやすく」しかも「比較的頂点数の多い」グラフを選んだに過ぎないことを断っておく. ただし, ここで G は M の被覆グラフでその被覆変換群は $\Gamma = 3\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ であり, $H_{\theta(t),M}$ の G へのリフトが $H_{\theta(t),G}$ となっている.

Figure 1 のグラフ G, M における「矢印」のある辺は矢印の向きに沿った向きに大きさ t の「電流」が流れていることを示し, 「矢印のない」辺には「電流が流れていない」ものとしている. さらに, スペクトルの底をそれぞれ, $\lambda_G(t) = \inf \text{Spec}(-H_{\theta(t),G})$ と

$\lambda_M(t) = \inf \text{Spec}(-H_{\theta(t), M})$ で定め、その t に関する挙動をそれぞれ横軸 t 縦軸 $\lambda(t)$ にグラフとして描いたものが Figure 1 の右側のものである。

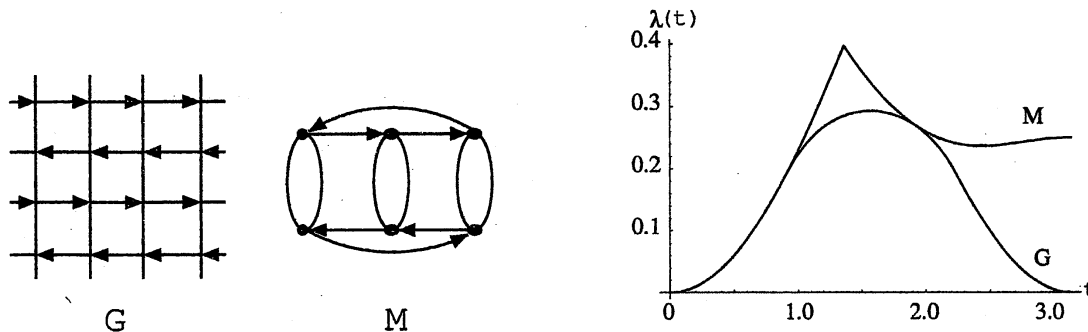


Figure 1. $G = \mathbb{Z}^2$ and M ; $\lambda_G(t)$ and $\lambda_M(t)$.

実は我々の「離散磁場付きラプラシアン」に関する研究が、この「2周期磁場」という具体例の計算から始まったと言っても過言ではない。そこで、この例に対する考察などを次の節で述べてみようと思う。

4. 例 3.2 に対する考察と問題設定.

前節において有限グラフ M を登場させたのは、有限グラフのときと無限グラフのときとの比較をするためである。有限グラフならば、 $t=0$ のとき、すなわち単なるラプラシアンの最小固有値は 0 であり、かつ、単純 (多重度が 1) であることは良く知られており、さらに摂動論より $t=0$ の近傍で最小固有値が t に関して解析的に動く、ということも分かる。しかもある点で「最小固有値」と「第 2 固有値」がこれみよがしに「劇的」に入れ替わることも想像出来る。実際この $\lambda_M(t)$ においても、式 (3.8) からそうなっていることが分かる。一方無限グラフに対してだと、 $t=0$ のときに一般には「スペクトルの底」は固有値にはならず、したがって既存の摂動論は使えず、それゆえ「スペクトルの底」が t とともにどういう挙動をするのかも明らかではない。とはいえ有限グラフのときの挙動からの類推で、「ある周期性を持つ $H_{\theta, G}$ 」に関しては $\lambda_G(t)$ は t に関して $t=0$ 近傍で「なめらか」で、ある点で「劇的」な関数の「入れ換え」があるだろう、と素朴に予想していた。ところで式 (3.7) はその予想に肯定的に答えているようだが、実際に関数の「入れ換え」がなされている点 $t_c = \arccos((-1 + \sqrt{5})/2)$ について調べてみると、 $t=t_c$ において $\lambda_G(t)$ が連続なのはある程度当然としても、意外にも $\lambda'_G(t_c)$ が存在して $\sqrt{\alpha}/2$ という値をとっているのである。Figure 1 の右図における「なめらかさ」はここから来ている。さらに図に乗って $\lambda''_G(t_c)$ を調べてみると今度は存在しない。まとめると、

Claim 4.1. $-\pi/2 < t < \pi/2$ における例 3.2 の $\lambda_G(t)$ は、 $0 < |t| < t_c$ または $t_c < |t| < \pi/2$ において解析的であり、また、 $t=t_c$ において 1 階微分可能であるが 2

階微分可能ではない。

グラフ G として三角格子や六角格子などで、例 3.2 と同様の「電流」を「交互」に流した具体例の計算もしてみたが、やはり似たような現象が見られた。詳しくは我々の論文 [9,10] を参照していただきたい。

正確な言葉遣いではないかも知れないが、ここで我々は上記の現象から「 t_c を 2 次の相転移点」と呼ぶことにする。そこですぐさま素朴に次の問題を我々なりに提起した。

Problem 4.2.

- (1) $t = t_c$ で見られた上記の現象の「物理的」意味は何か？
- (2) $t = t_c$ で見られた上記の現象の有無を G の幾何不変量と「磁場」の言葉で表現できないか？
- (3) 上記で見られたのは「2 次の相転移」であるが、「3 次以上の相転移」が存在するのか、そういう例を簡単に作れるのか？

提起はしてみたものの、Problem 4.2 はさすがに「大風呂敷」を広げすぎている感は否めない。この問題の解決は今後の課題として、そこで我々は早々に現実的な問題設定をすることとなる。

Problem 4.3. 周期構造を持つグラフ G と作用素 $H_{\theta,G}$ に対して、例 3.2 での t_c に対応する θ の「臨界点」を特徴づけよ。

ある固定した 1-form η と 1 パラメータ t を用いて、 $\theta = t\eta$ としたある有限グラフ M 上の作用素 $H_{\theta,M}$ を考える。そのときに上記の問題を言い替えると、 M の被覆グラフである無限グラフ G 上の $H_{\theta,M}$ のリフトである $H_{\theta,G}$ の $\lambda_G(t)$ が $[0, t]$ で解析的であるような最大の t を特徴づけよ、ということになる。戦略としては、 M の有限被覆の列を考える、などがあるが、残念ながら現在のところ、まだ未解決である。被覆変換群が一般のときは難しいと思われるので、とりあえずはそれをアーベル群と限定しても何らかの解決を試みたいものである。

さて、我々はまた問題設定をする必要が生じた。そこで再び式 (3.7) と (3.8), および Figure 1 を眺めてみる。まず、 $0 \leq t \leq 2\pi$ において $\lambda_G(t)$ と $\lambda_M(t)$ は、 $0 \leq t \leq t_c$ で一致し $t = \arccos((\sqrt{5} - \sqrt{13})/4)$ で接するものの、それ以外の t では $\lambda_G(t) < \lambda_M(t)$ となっている。したがってこのことから、ある程度一般に「 $\lambda_G(t) \leq \lambda_M(t)$ 」が言えるのではないか、という感触 (かなり大胆だが) を得る。とはいえ、 $t = 0$ での知られている結果 ([21])

Fact 4.4 ([21]). G を有限グラフ M の正規被覆とし、その被覆変換群を Γ とする。このとき、 $\lambda_M(0) \leq \lambda_G(0)$ である。また等号成立の必要十分条件は「 Γ の従順性」である。

を考慮すると、一般の変換群に対しては成り立たないので、成立するのは変換群が「従順 (amenable)」のときに限られるのではないかと、いうさらなる感触も得る。ちなみに群 Γ が「従順」といわれるのは、 Γ 上の有界実関数による実 Banach 空間 $L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Gamma)$ に対して、次を満たす有界線形汎関数 m が存在するときである：

- (1) $m(1) = 1$ が成立；
- (2) $f \geq 0$ ならば $m(f) \geq 0$ が成立；
- (3) $(\sigma \cdot f)(\mu) = f(\sigma^{-1}\mu)$ と定めたときに、全ての $\sigma \in \Gamma$ と全ての $f \in L_{\mathbb{R}}^{\infty}(\Gamma)$ に対して $m(\sigma \cdot f) = m(f)$ が成立。

アーベル群は従順であり、2つ以上の生成元からなる自由群は従順でないことは良く知られている事実である。さらに詳しいことに関しては [3,13,22] などに任せることにする。

したがって、まとめて次の問題を提起する：

Problem 4.5. G をある有限グラフ M の正規被覆とし、その被覆変換群を Γ とする。また、 $H_{\theta,G}$ を $H_{\theta,M}$ の G へのリフトとする。このとき、 Γ が従順ならば任意の 1-form θ に対して $\lambda_G(\theta) \leq \lambda_M(\theta)$ が成立するか？ここで $\lambda_G(\theta) = \inf \text{Spec}(-H_{\theta,G})$, $\lambda_M(\theta) = \inf \text{Spec}(-H_{\theta,M})$ としている。

さて、Problem 4.3 で提起した $\lambda_G(t)$ の t に関する解析性についての問題は、いわば「解析性を保証するような原点を含む最大のボールの半径」というものである。式 (3.7) を見る限り、興味がそうなるのは非常に自然であるが、ふと客観的に考えると、「一般に原点近傍で解析性を保証するようなボール」がとれるかどうか、我々には自明でないことに気づいた。もちろん前述したように、有限グラフの場合は摂動論を用いることで「一般に正しい」ということが分かるのだが、無限グラフに対しては、たとえば連続スペクトルの底が摂動によってどういう挙動をするのか、自明ではない。そこで、我々は次の問題を提起した。

Problem 4.6. 一般の無限グラフ G 上の $H_{\theta,G}$ に対して、 $\theta = 0$ では θ に関して「何階の微分可能性」まで保証されているのか？

ところが、いわゆる Harper 作用素での「Hofstadter's butterfly」の絵をぼんやり眺めてみると、どうも原点での微分可能性すら成り立たない感触を得てしまう。したがってやはりここでも「周期性」の条件を与えた問題を提起することとなる。

Problem 4.7. G をある有限グラフ M の正規被覆とし、また $H_{\theta,G}$ を $H_{\theta,M}$ の G へのリフトとする。このとき、 $-H_{\theta,G}$ のスペクトルの底 $\lambda_G(\theta)$ は $\theta = 0$ の近傍で θ に関して解析的であるといえるか？

Problem 4.6 も Problem 4.7 も、「臨界点」から離れた「原点」を対象にしているた

め、本来の目標から遠く離れた感は否めない。しかし、目標に向かった第一歩だと受け止めていただけたら幸いである。

次節では、我々にとっての現実的問題 Problem 4.5, 4.6, 4.7 に対して得られた結果などを、問題の定式化をこめて紹介する。

5. 現在のところの結果.

まず最初に、周期性の仮定のない無限グラフ G に対しての Problem 4.6 に対する「我々の答え」を述べておこう。 $-H_{\theta,G}$ のスペクトルの底 $\inf \text{Spec}(-H_{\theta,G})$ を $\lambda_G(\theta)$ で表す。

Proposition 5.1 ([9]). G を無限グラフとする。このとき任意の θ に対して、 $\lambda_G(\theta) \geq \lambda_G(0)$ が成立する。さらに、 $C^1(G, \mathbf{R})$ でノルムを $\|\theta\|_\infty = \sup_{e \in A(G)} \theta(e)$ で与えたときの、全ての有界な 1-form からなる Banach 空間を $\ell_\infty^1(G, \mathbf{R})$ としたとき、 $\lambda_G : \ell_\infty^1(G, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ は連続となり、また $\theta = 0$ で Fréchet 微分可能、具体的には $\lambda'_G(0) = 0$ となる。 ■

上記の結果から、有界な 1-form の範囲で動く限り、 $\theta = 0$ での微分可能性までは保証された。ちなみに例 3.2 は、原点近傍で有界な 1-form で表現されているので、この結果を適用(?)できる。しかし一方で例 3.1 (Harper 作用素) は、原点近傍でも有界な 1-form で表現できないので、この結果を適用できない。(実は t を止める毎には有界な 1-form で表現しなおすことはできるのだが、そうしてしまうとパラメータ t の意味がなくなる。) 詳しいことは我々の論文 [9] などを見て頂くことにするが、証明で使っている道具は、非常に「基本的」なものしかない。逆に言うと、一般のグラフを相手にしているためにそのようなものしか「使えない」。それが故の「困難さ」が壁となり、2階以上の微分可能性などについては、我々にはなにをしていいのかすら良く分からないことになってしまった。そこで、前節でも宣言したように、「周期性」の条件を課す。以下の議論では特にことわらない限り次に述べる 2つ (Assumption 1 および Assumption 2) を仮定しているものとする：

Assumption 1 (グラフに対する周期性). グラフ $G = (V(G), A(G))$ には有限生成の自己同型群 Γ があって、自由に作用 (すなわち、任意の頂点 $x \in V(G)$ 、任意の有向辺 $e \in A(G)$ 、そして任意の Γ の元 $\sigma (\neq 1)$ に対して、 $\sigma x \neq x$ および $\sigma e \neq \bar{e}$ を満たす) している。さらに、 Γ による G の商グラフ $M = \Gamma \backslash G$ は有限グラフである。

Assumption 2 (作用素に対する周期性). グラフ $G = (V(G), A(G))$ 上の作用素 $H_{\theta,G}$ に関係する関数 p, m そして θ は Γ -作用に関して不変である。

この2つの条件の下では、グラフ G は有限グラフ M の正規被覆グラフととらえることができ、その被覆変換群は Γ となっていて、さらにこのとき、自然な射影 $\pi : G \rightarrow M$

の下, G 上の作用素 $H_{\theta,G}$ は M 上の作用素 $H_{\theta,M}$ のリフトになっている. このことが前節でもさんざん述べたような, 「周期性」に対する正確な定式化である.

さて, 次は前節の Problem 4.5 に対する我々の答えであるが, ここはそのまま肯定的に解決した:

Theorem 5.2 ([10]). 群 Γ が従順ならば, 任意の 1-form θ に対して $\text{Spec}(L_{\theta,M}) \subset \text{Spec}(L_{\theta,G})$ が成立する. したがって, このとき $\lambda_G(\theta) \leq \lambda_M(\theta)$ が成立する. ■

証明における主要な鍵は, P. Sy and T. Sunada [21] で見られる表現論を用いた道具である. M 上での $-H_{\theta,M}$ の λ に付随する固有関数 f を G 上にそのままリフトしただけの関数 $\tilde{f}$ では, ただの $(-H_{\theta,G} - \lambda)\tilde{f} = 0$ の「有界な」解でしかなく, もちろん $\ell^2(V(G))$ の元ではない. そこで, f を上記の道具を用いて「うまく」リフトすること, そして Γ の従順性により, $\|(-H_{\theta,G} - \lambda)\tilde{f}_n\|_V^2 / \|\tilde{f}_n\|_V^2$ を $n \rightarrow \infty$ でゼロに向かうような $\ell^2(V(G))$ の元である $\tilde{f}_n$ の列が作れる, という仕組みである. 詳しくは論文 [10] を参照されたい.

ところで, 今述べたことから, 特に以下のことが気になる:

- (1) (周期性を仮定していない一般の) 無限グラフ G 上で $(-H_{\theta,G} - \lambda)f = 0$ に有界な解があるときに, λ が $\text{Spec}(-H_{\theta,G})$ に入るための G の (幾何的) 条件は何か? 逆に $\lambda \in \text{Spec}(-H_{\theta,G})$ に対して $(-H_{\theta,G} - \lambda)f = 0$ に有界な解がある条件は何か?
- (2) Theorem 5.2 の証明では「表現論」的テクニックを用いたが, Γ をもっと制限することにより, さらに詳しい情報の得られるテクニックがあるのでは? たとえば Γ がアーベル群ならどうか?

まず(1)に関しては, 「 $(-H_{\theta,G} - \lambda)f = 0$ に有界な解があるならば $\lambda \in \text{Spec}(-H_{\theta,G})$ 」が成り立つとき $H_{\theta,G}$ は「Weak Bloch property」を持つ, さらに「 $(-H_{\theta,G} - \lambda)f = 0$ に有界な解があることと $\lambda \in \text{Spec}(-H_{\theta,G})$ は同値」が成り立つとき $H_{\theta,G}$ は「Bloch property」を持つ, と一般にいわれる. リーマン多様体上のラプラシアンの場合, これらに関しては T. Kobayashi, K. Ono and T. Sunada [14] によって議論されている. その離散的および磁場的類似としての「Weak Bloch Property」に関しては, 我々は [9] においてグラフの「境界増大度」という幾何不変量を用いて特徴付けができ, 「Bloch property」に関しては「周期条件」を課した上で, ([14] でも問題提起されているように, Γ が従順のときまで一般化されると信じているが) Γ がアーベル群のときの成立は確認した ([11]). 「Bloch property」に関してはあらためて後程述べるが, 「道具」としては (2) と密接な関係がある.

次に (2) に関しては, Γ がアーベル群とすると「ユニタリ指標群」を用いることができ, それゆえより詳しい情報をとりだせることとなる. これはリーマン多様体においては [14] などで見られる手法であるが, その離散版が M. Kotani, T. Shirai and

T. Sunada [15] によってグラフ上の酔歩の解析に応用された。そこで我々はそれを「磁場付き」の場合に適用することによって、前節の Problem 4.7 に対する「我々の答え」が次の様に得られることとなった。

Theorem 5.3 ([10]). *Assumption 1 と Assumption 2 の下でしかも群 Γ がアーベル群のとき、 $\lambda_G(\cdot)$ は $0 \in C^1(M, \mathbf{R})$ の近傍で解析的であり、 $\nabla \lambda_G(0) = 0$ となる。とくに、 θ が「調和 1 形式 (harmonic 1-form)」, すなわち任意の M の頂点 x において $\sum_{e \in A_x(M)} p(e)\theta(e) = 0$ が成立するならば、次のような表現が得られる：*

$$\text{Hess} \lambda_G(0)(\theta, \theta) = \frac{2}{\text{Vol}(M)} d(\theta, T_1 \hat{\Gamma})^2, \quad (5.1)$$

ここで、 $\text{Vol}(M) = \sum_{x \in V(M)} m(x)$ であり、また $\hat{\Gamma}$ は Γ のユニタリ指標群、 $T_1 \hat{\Gamma}$ は自明な指標 $\mathbf{1}$ における接空間であり、そして $d(\theta, T_1 \hat{\Gamma}) = \inf \{ \|\theta - \eta\|_A \mid \eta \in T_1 \hat{\Gamma} \}$ である。ちなみに、 $C^1(M, \mathbf{R})$ 上のノルム $\|\cdot\|_A$ は

$$\|\theta\|_A = \frac{1}{2} \sum_{e \in A(M)} |\theta(e)|^2 m(o(e)) p(e).$$

ように定められている。■

ここでは $T_1 \hat{\Gamma}$ を「調和 1 形式」空間の部分空間と同一視している。証明に関する詳細は [10] に任せることにするが、式 (5.1) は実際に計算可能で、様々な具体的な例に対する計算方法も [10] で見られることを付け加えておく。

Theorem 5.3 の結論から、「臨界点」はユニタリ指標群の言葉でつかまるのでは、とか、一般の群 Γ についての「解析性」は、というところに自然と興味が向くが、残念ながら現在のところ我々には未解決である。

さて、最後に「Bloch property」について述べることでこの節を締めさせていただく。

Theorem 5.4 ([11]). *Assumption 1 と Assumption 2 の下でしかも群 Γ がアーベル群のとき、 $H_{\theta, G}$ は Bloch property を満たす： $-H_{\theta, G}$ の ℓ^∞ -固有値の集合と ℓ^2 -スペクトルの集合は一致する。■*

ここも詳しくは [11] に任せるが、Theorem 5.2 より「Weak Bloch property」はすぐに分かる。残り部分に関する作戦は、 $\lambda \in \text{Spec}(-H_{\theta, G})$ のときはその λ を固有値にもつユニタリ指標とそれに付随する「twisted magnetic Laplacian」が存在して、その固有関数を用いて $-H_{\theta, G}$ の有界な関数を作れる、というものになっている。もちろんこれを保証しているのが、Theorem 5.3 の証明でも鍵となった「ユニタリ指標群を用いた道具」である。

6. その他.

この節は「その他」として、当初の目標とは違った立場の結果を述べてみることにする. ここでは前節の Assumption 1 と Assumption 2 に加えて, 群 $\Gamma = H_1(M, \mathbf{Z})$ を仮定する. このとき, G は M の極大アーベル被覆, または, ホモロジー普遍被覆であると言われる. 非常に特殊な状況ではあるが, その「極大性」がいろいろな情報を与えてくれるのである.

Theorem 6.1 ([11]). グラフ G がある有限グラフ M の極大アーベル被覆であるとき, 任意の 1-form $\theta \in C^1(M, \mathbf{R})$ に対して, $H_{\theta, M}$ のリフトである $H_{\theta, G}$ はラプラシアン $\Delta_G = H_{0, G}$ とユニタリ同値である. さらに, 任意の 1-form $\theta \in C^1(M, \mathbf{R})$ に対して, $\text{Spec}(-H_{\theta, M})$ は $\text{Spec}(-\Delta_G)$ の部分集合である. ■

Proposition 6.2 ([11, 16]). グラフ G がある有限グラフ M の極大アーベル被覆であるとき, G は 2 部グラフ, つまり長さが奇数の閉道がないグラフとなる. ■

Proposition 6.3 ([11]). グラフ G がある有限グラフ M の極大アーベル被覆であるとき, M 上の対称とは限らない任意の推移確率 $p: A(M) \rightarrow \mathbf{R}^+$ に対して, その G へのリフトである $\tilde{p}$ はかならず対称になる. ■

いずれも証明自体は非常に簡潔であるが, ここでは省略させていただく. さて, ここで Theorem 6.1 の一風変わった応用例を紹介しよう. ここより先, 推移確率を任意の有向辺 $e \in A(G)$ に対して

$$p(e) = (\deg_G o(e))^{-1} \quad (6.1)$$

と定めてしまう. これは 3 節の例と同じく, G 上の等方的酔歩を表すものであり, 対称測度 m は任意の頂点 $x \in V(G)$ に対して $m(x) = \deg_G x = \#A_x(G)$ とおけることは明らかであろう. このとき $V(G)$ 上の関数 f に対して, $H_{\theta, G}$ は具体的に

$$H_{\theta, G}f(x) = (\deg_G x)^{-1} \sum_{e \in A_x(G)} \exp(\sqrt{-1}\theta(e)) f(t(e)) - f(x), \quad (6.2)$$

と書け, 同時に G 上のラプラシアン Δ_G は具体的に

$$\Delta_G f(x) = (\deg_G x)^{-1} \sum_{e \in A_x(G)} f(t(e)) - f(x), \quad (6.3)$$

と書ける. このラプラシアンはいろいろある「離散的ラプラシアン」の中でも標準的なものの一つとして知られている (cf.[1, 5, 6, 8]). ところでグラフ G に Assumption 1 を仮定すると, このラプラシアンは自動的に Assumption 2 を満たすことになる.

Conjecture 6.4 ([11]). グラフ G がある有限グラフ M の極大アーベル被覆であるとき, $\text{Spec}(-\Delta_G) = [0, 2]$ が成立するだろう.

これは [14] の中に見られるリーマン多様体のラプラシアンに対する問題の一つの離散版として, 我々が [11] の中で掲げた予想である. 現在のところ未解決であるが, Theorem 6.1 を使った「部分的解決」を次に紹介する:

Proposition 6.5 ([11]). *Conjecture 6.4* の仮定に加えて, 任意の頂点 $x \in V(G)$ に対してその次数 $\deg_G x$ が偶数であるとする. このとき $\text{Spec}(-\Delta_G) = [0, 2]$ が成立する.

この証明はもともと簡潔だが, 簡単に触れてみることにする.

Outline of Proof. 「有限グラフの任意の頂点の次数が偶数である」という条件は, そのグラフが「オイラー閉道を持つ」ことと同値であること (cf. [1,2]) を知っている方も多いであろう. 言い替えると, この条件とそのグラフが「一筆書き」できることが同値なのである. よって商グラフ M は「一筆書き」できることになり, その一筆書きに (向きもこめて) 沿った各有向辺に大きさ α の「電流」を流してみる. これはまさしくある 1-form θ を与えたことになっている. そして「一筆書き」を使って与えていることから, 全ての頂点 $x \in V(M)$ に対して

$$\#\{\theta(e) = \alpha \mid e \in A_x(M)\} = \#\{\theta(e) = -\alpha \mid e \in A_x(M)\} = (\deg_M x)/2 \quad (6.4)$$

が成り立っていることを容易に確認できる. そこで全ての頂点上で値 1 をとる $V(M)$ 上の定数関数を $\mathbf{1}$ で表すと, 先程定めた 1-form θ に対して式 (6.4) より,

$$\begin{aligned} -H_{\theta, M}\mathbf{1}(x) &= -(\deg_M x)^{-1} \sum_{e \in A_x(M)} \exp(\sqrt{-1}\theta(e)) \mathbf{1}(t(e)) + \mathbf{1}(x) \\ &= 1 - (\deg_M x)^{-1} \cdot (\deg_M x)/2 \cdot (\exp(\sqrt{-1}\alpha) + \exp(-\sqrt{-1}\alpha)) \\ &= (1 - \cos \alpha)\mathbf{1}(x) \end{aligned} \quad (6.5)$$

が得られ, すなわち値 $1 - \cos \alpha$ が $-H_{\theta, M}$ の固有値になっていることが分かる. したがって値 α の任意性と Theorem 6.1 からの $1 - \cos \alpha \in \text{Spec}(-\Delta_G)$ とにより結論が得られることとなる. ■

ここで注目すべきなのは, 「オイラー閉道」という「グラフ理論」の言葉を用いて「離散スペクトル幾何」の世界が開かれたということである. これはまた「グラフ理論」のさまざまな結果を用いると, さらに多種多様な世界が開かれる可能性があることを示唆している.

Proposition 6.5 は「偶正則な有限グラフの極大アーベル被覆に関して Conjecture 6.4 の結論部分は成立」ということを含んでいるが、せめて「正則な有限グラフの極大アーベル被覆」に関して片付けてみたいというのは自然な成行きであろう。ここで、「(偶, 奇) 正則」グラフとは、「全ての頂点の次数 $\deg_G x$ が (偶数, 奇数の) 定数」であるようなグラフのことである。実際同じ様な議論をすることにより「奇正則な有限グラフの極大アーベル被覆」に対してある程度正しいことが [11] において分かっている。ちなみにそこでも違った「グラフ理論」の概念(“因子”)が鍵となっている。よってこの節の締めくくりとして、「解決への扉を叩き続けるために」という意味もこめた「非常に現実的」な次の問題を掲げておく。

Problem 6.6. グラフ G がある有限正則グラフ M の極大アーベル被覆であるとき, $\text{Spec}(-\Delta_G) = [0, 2]$ が成立することを示せ。もしくは反例を挙げよ。

7. 最後に.

ここまで我々の研究の流れに沿っていろいろと書かせていただいた。もちろん勉強不足や恥ずべき部分が大いに暴露されてしまうことは覚悟のうえである。しかし様々なご批評やご指摘をいただけたら幸いである。

そして最後に、「繰り込み群の数理科学での応用」という研究集会での講演の機会を我々に与えてくださった研究代表者の伊東恵一さんに感謝の意を表したい。

REFERENCES

- [1] B. Bollobás, *Graph theory - an introductory course*, Springer-Verlag, 1985.
- [2] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theory with its applications*, Macmillan, 1976.
- [3] R. Brooks, *Combinatorial problems in spectral geometry*, in the Proc. of Taniguchi Symp. “Curvature and topology of Riemannian manifolds” 1985 Lecture Note in Math. **1201** (1986), 14–32.
- [4] M. D. Choi, G. Elliott and N. Yui, *Gauss polynomials and the rotation algebra*, Invent. Math. **99** (1990), 225–246.
- [5] J. Dodziuk and L. Karp, *Spectral and function theory for combinatorial Laplacians*, A.M.S. Contemporary Mathematics **73** (1988), 25–40.
- [6] J. Dodziuk and W. S. Kendall, *Combinatorial Laplacians and isoperimetric inequality*, in “From local times to global geometry, control and physics” K. D. Elworthy ed., Pitman Research Notes in Mathematics Series **150** (1986), 68–74.
- [7] P. G. Harper, *Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field*, Proc. Phys. Soc. London **A68** (1955), 874–878.
- [8] Yu. Higuchi, *Boundary area growth and the spectrum of discrete Laplacian*, preprint.
- [9] Yu. Higuchi and T. Shirai, *Weak Bloch property for discrete magnetic Schrödinger operators*, preprint.
- [10] Yu. Higuchi and T. Shirai, *The spectrum of magnetic Schrödinger operators on a graph with periodic structure*, to appear in J. Funct. Anal.
- [11] Yu. Higuchi and T. Shirai, *A remark on the spectrum of magnetic Laplacian on a graph*, to appear in the proceedings of TGT10, Yokohama Math. J.
- [12] D. R. Hofstadter, *Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields*, Phys. Rev. **B14** (1976), 2239–2249.

- [13] D. A. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, *Funct. Anal. Appl.* **1** (1968), 63–65.
- [14] T. Kobayashi, K. Ono and T. Sunada, *Periodic Schrödinger operators on a manifold*, *Forum Math.* **1** (1989), 69–79.
- [15] M. Kotani, T. Shirai and T. Sunada, *Asymptotic behavior of the transition probability of a random walk on an infinite graph*, *J. Funct. Anal.* **159** (1998), 664–689.
- [16] M. Kotani and T. Sunada, *Jacobian tori associated with a finite graph and its abelian covering graphs*, to appear in *Advances in Apply. Math.*
- [17] E. Lieb and M. Loss, *Fluxes, Laplacians and Kasteleyn's theorem*, *Duke Math J.* **71** (1993), 337–363.
- [18] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, *J. Differ. Geom.* **2** (1968), 1–7.
- [19] M. C. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. IV*, Academic Press, New York, 1978.
- [20] T. Sunada, *A discrete analogue of periodic magnetic Schrödinger operators*, in “Geometry of the spectrum” P. Parry, R. Brooks, C. Gordon ed., *Contemporary Mathematics* **173** (1994), 283–299.
- [21] P. W. Sy and T. Sunada, *Discrete Schrödinger operators on a graph*, *Nagoya Math. J.* **125** (1992), 141–150.
- [22] R. J. Zimmer, *Ergodic Theory and Semi-simple Groups*, Birkhäuser, Boston, 1984.

MATHEMATICS LABORATORIES, COLLEGE OF ARTS AND SCIENCES, SHOWA UNIVERSITY, 4562
 KAMIYOSHIDA, FUJIYOSHIDA, YAMANASHI 403-0005, JAPAN
E-mail address: `higuchi@cas.showa-u.ac.jp`

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, OH-OKAYAMA, MEGURO
 -KU, TOKYO 152-8551, JAPAN
E-mail address: `shirai@math.titech.ac.jp`