

# 高次元における軌道の数論的性質について (Arithmetic Properties of Orbits in Higher Dimensions)

By

安福 悠 (Yu YASUFUKU)\*

## Abstract

This note is an overview of recent extensions to higher-dimensions of Silverman’s result on finiteness of  $S$ -integral points in orbits of rational functions. These extensions show that when a self-map  $\phi$  on  $\mathbb{P}^N$  and a divisor  $D$  satisfy certain geometric conditions, the orbit points whose global heights come largely from local heights for  $S$  are Zariski-non-dense. The main results are obtained under assuming a deep Diophantine conjecture of Vojta, while we outline many specific examples for which this conjecture is unnecessary. The geometric conditions change depending on whether  $\phi$  is a morphism or merely a rational map.

## § 1. 背景と本論文の構成

数論的力学系とは、数論的な体  $k$  の上で定義された代数多様体  $X$  とその自己写像  $\phi$  を固定したとき、その  $n$  重合成  $\phi^{(n)} = \underbrace{\phi \circ \cdots \circ \phi}_{n \text{ 回}}$  の数論的な漸近性質を調べる、比較的新しい分野である。重要な研究対象としては、有理点  $P \in X(k)$  の軌道  $\mathcal{O}_\phi(P) = \{P, \phi(P), \phi^{(2)}(P), \dots\}$  がある。例えば、点  $P$  の軌道が有限集合のとき、 $P$  を前周期点といい、 $k$  上定義できる前周期点の個数の決定などが自然な問題となる。

本論文では、 $k$  を代数体、 $P \in \mathbb{P}^N(k)$  としたときに、 $P$  の軌道上の整数点が退化するか否かについて得られた結果 [11, 10] を紹介する。1次元においては、次の Silverman の定理が知られており [5]、ある特殊な幾何学的性質を満たさない限り、軌道の点が  $S$  整数からどんどん離れていくことを示唆する。

---

Received March 24, 2014. Revised August 11, 2014.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 37P55, 11J97, 37P15.

*Key Words:* Vojta’s Conjecture, Integer Points, Heights, Iteration of Maps, Integral points, orbits, higher-dimensional dynamics.

本研究は科学研究費 (若手 (B) 23740033) 及び日本大学理工学部基礎科学研究助成金の援助を受けた。

\*Department of Mathematics, Nihon University, College of Science and Technology, 1-8-14 Kanda-Surugadai, Chiyoda, Tokyo 101-8308, Japan.

e-mail: yasufuku@math.cst.nihon-u.ac.jp

© 2015 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

**定理 1.1** (Silverman).  $\phi \in \mathbb{Q}(z)$  を次数 2 以上の有理関数とする. また,  $S$  を有限個の素数とし,  $|\cdot|'_S$  で整数の  $S$  と素な部分とする.

- (i)  $\phi^{(2)}$  が多項式 (つまり  $\mathbb{Q}[z]$  の元) でないならば, 任意の  $P \in \mathbb{Q}$  に対し  $\mathcal{O}_\phi(P) \cap \mathbb{Z}$  は有限集合である.
- (ii)  $\phi^{(2)}$  が多項式でないと仮定し,  $P$  が前周期点でないとする. この時,  $\phi^{(m)}(P)$  を既約分数で  $a_m/b_m$  と書くと,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |b_m|'_S}{\log \max(|a_m|, |b_m|)} = 1.$$

つまり, 合成を繰り返すにつれて軌道の点の分母・分子の桁数が近づいていくと主張する.  $\phi$  を  $\mathbb{P}^1$  上の射とみて, Riemann–Hurwitz の公式を使うと, 2 重合成が多項式でないという条件は, どの  $\phi^{(n)}$  も  $\infty$  を完全分岐固定点 (つまり,  $(\phi^{(n)})^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ ) としないことと同値であると示せる. 従って, 幾何学的情報である完全分岐固定点の有無と, 軌道が漸近的に  $S$  整数から遠ざかるか否かという数論的情報が対応する.

本論文では, この定理を  $\mathbb{P}^N$  へ拡張した最近の結果 [11, 10] を紹介する. Silverman が定理の証明に使ったのはディオファントス近似の Roth の定理で, 高次元化は一般に非常に難しいとされている. 1 次元内では既約因子は点であり, 相異なる 2 点間には正の距離があるが, 2 次元以上となると, 当然のことながら既約因子が自己交叉したり特異点を持ったりすることが起こり, 近似論を一般に作るのが難しくなる. 現在  $\mathbb{P}^N$  上で証明されているものとしては, 因子を超平面に限定したもの (Schmidt の部分空間定理) や, 近似指数を大変強くすると例外集合に入ると言及するもの (Evertse–Ferretti [2]) など何種類かあるが, ここではディオファントス幾何の非常に深遠な予想の一つである Vojta (ボエタ) 予想を仮定して得られた理論的結果と, この予想を仮定しないですむ具体例を紹介する. 構成としては, 次の節で Vojta 予想, および必要となる高さ関数について復習する. 第 3 節では射影空間上の射に関して, Silverman の定理の拡張を述べる. 第 4 節では, 有理写像, つまり不定点を持つような写像への拡張を 2 種類紹介する. 最後の第 5 節では, 3・4 節で得られた結果の, Vojta 予想を仮定する必要のない具体例を挙げ, またこれらの具体例を通して今後の課題について触れる.

## § 2. 高さ関数と Vojta 予想

この節では, 高さ関数及び Vojta 予想について紹介する. より詳しくは [1, 7, 8] を参照されたい.

$k$  を代数体,  $X$  を  $k$  上の射影代数多様体とし,  $D$  を  $k$  上定義される  $X$  の Cartier 因子とする. この時, Weil(大域) 高さ関数  $h_D : X(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}$  が定義できる. 重要な性質としては,  $D_1$  と  $D_2$  が線形同値の時ある定数  $C$  が存在して

$$|h_{D_1}(P) - h_{D_2}(P)| \leq C \quad \forall P \in X(\overline{\mathbb{Q}}),$$

及び次の Northcott の定理がある: 任意の定数  $C_1, C_2$  に対し,  $A$  を豊富な因子とすると

$$\{P \in X(\overline{\mathbb{Q}}) : h_A(P) \leq C_1, [\mathbb{Q}(P) : \mathbb{Q}] \leq C_2\} \text{ は有限集合.}$$

さらに,  $\phi: Y \rightarrow X$  が不定点を持たない射であるとき, ある定数  $C$  が存在して,

$$(2.1) \quad |h_{\phi^*D}(P) - h_D(\phi(P))| \leq C \quad \forall P \in Y(\overline{\mathbb{Q}}).$$

これらの性質からもわかるように, Weil 高さは幾何学的なものである.

これに対し局所高さは数論的である.  $v \in M_k$  を付値とし, effective な Cartier 因子  $D$  が局所的に  $f = 0$  で定義されるとき, 局所高さ  $\lambda_v(D, P)$  は基本的に  $-\log |f(P)|_v$  で定義される. 厳密には, 絶対値の正規化, 及び貼り合わせを適切に行う必要がある. 一般に, 局所高さは  $X(k) \setminus |D| \rightarrow \mathbb{R}$  の関数で, 点  $P$  が  $v$  進的に因子  $D$  に近い, つまり  $|f(P)|_v$  が 0 に近いほど, 大きい. 局所高さも (2.1) を満たす. また, ある定数  $C$  が存在し,

$$\left| h_D(P) - \sum_{v \in M_k} \lambda_v(D, P) \right| \leq C$$

が  $P \in X(k) \setminus |D|$  上で成り立つ.

具体例として,  $P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$  の時を考える. 整数  $a_i$  たちを最大公約数が 1 になるようにとって  $P = [a_0 : \cdots : a_N]$  と書ける. 因子  $D$  が斉  $d$  次  $\mathbb{Z}$  係数多項式  $F$  で定義されているとき,

$$h_D(P) = d \cdot \log \max_i |a_i|$$

$$\lambda_v(D, P) = \log \frac{(\max_i |x_i|_v)^d}{|F(P)|_v}$$

となる. ここで,  $v \in M_{\mathbb{Q}}$  がアルキメデス付値のときは通常絶対値,  $v$  が  $p$  進のときは,  $|p|_v = 1/p$  で正規化する. 特に,  $D = (X_i = 0)$ ,  $v$  が  $p$  進のときは,  $\lambda_v(D, P)$  は  $a_i$  の  $p$  部分の対数となる. したがって,  $S$  にアルキメデスを含めると,

$$(2.2) \quad \sum_{v \notin S} \lambda_v((X_i = 0), P) = \log |x_i|'_S$$

となる. また,

$$\lambda_{v_2}((X_0 = 0), [2^n : 1]) = n \log 2, \quad \lambda_{v_2}((X_1 = 0), [2^n : 1]) = 0$$

からもわかるように, 線形同値な因子でも局所高さは大きく違う. このように局所高さは本質的に数論的である.

ここまでの準備で, Vojta 予想を述べることができる. 以下では, 滑らかな代数多様体上の正規交叉因子とは, 重複度を持たないものとする (代数幾何では単純正規交叉とよく書かれる).

**Vojta (ボエタ) 予想** ([7, Main Conjecture (Conjecture 3.4.3)]).  $k$  を代数体,  $X$  を  $k$  上定義された滑らかな射影代数多様体,  $D$  を  $k$  上定義された正規交叉因子,  $K$  を標

準因子,  $A$  を豊富な因子とする. また,  $S \subset M_k$  を有限部分集合とする. このとき, 任意の  $\epsilon > 0$  に対し, ある Zariski 閉な  $Z_\epsilon \neq X$  と定数  $C$  が存在し, 全ての  $P \in X(k) \setminus Z_\epsilon$  において次の高さ不等式が成り立つ:

$$(2.3) \quad \sum_{v \in S} \lambda_v(D, P) + h_K(P) < \epsilon h_A(P) + C.$$

この不等式は左辺が小さいと主張しており,  $S$  に属する  $v$  に対し,  $P$  が  $v$  進的にどのくらい  $D$  に近づけるかを制御している. 幾何的情報である標準因子が負であればあるほど, 近似する有理点が存在しうる. 逆に,  $K$  が big のときは, この不等式を成り立たせられないので, すべての  $k$  有理点が  $Z_\epsilon$  に入ることになり, Bombieri–Lang 予想を導き出せる.  $X = \mathbb{P}^1$  の時は,  $H$  を超平面とすると  $K = -2H$  なので, Vojta 予想は Roth の定理と同値になり, 代数的数の近似指数 2 に幾何学的解釈を与える. 一見しただけではわかりにくい, 非常に深遠な予想で,  $X = \mathbb{P}^N$  で  $D$  が超平面の和集合のときは Schmidt の部分空間定理と同値であり,  $X$  がアーベル多様体のときは, Faltings の定理そのものとなる. これら以外はほとんどまだ解決されていない.  $D$  は局所高さとして登場するため, 線形同値で動かせず, 例えば  $\mathbb{P}^2$  上の 2 次曲線と 2 本の直線の和集合の場合ですでに未解決である.

### § 3. $\mathbb{P}^N$ 上の射の軌道の数論的性質

この節と次の節で, Silverman の定理の  $\mathbb{P}^N$  への拡張 [11, 10] について概説する. 今後は, 特に断らない限り以下の記号を固定する.

- $\phi: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  は  $\overline{\mathbb{Q}}$  上定義される支配的な有理写像で, 次数  $d \geq 2$  (ここでの次数とは  $\phi^* \mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(d)$ )
- $D$  を  $\overline{\mathbb{Q}}$  上定義される  $\mathbb{P}^N$  の有効因子
- $k$  は代数体
- $S \subset M_k$  は有限部分集合
- $R_S$  は  $k$  の  $S$  整数の集合.
- $P \in \mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ ,  $\phi$  が  $\mathbb{Q}$  上定義されるときに  $\phi^{(m)}(P) = [a_0^{(m)} : \cdots : a_N^{(m)}]$  と書いたら,  $a_i^{(m)}$  たちは整数で最大公約数が 1 のものとする.

また,  $D$  に対し, **正規交叉部分**  $D_{\text{nc}}$  とは,  $D$  の  $\overline{\mathbb{Q}}$  上の全ての部分因子を考えその中で正規交叉となる最大次数のものを指すこととする. 該当するものが複数ある場合は, どれか一つを選ぶ. また, 自己写像  $\phi$  が明確なときは, 引き戻し  $(\phi^{(n)})^* D$  を  $D^{(n)}$  と書くことにし, この正規交叉部分を  $D_{\text{nc}}^{(n)}$  と書く.

この節では  $\phi$  が射の時, つまり不定点を持たないときの  $\mathbb{P}^N$  上の軌道の数論的性質についての結果を紹介する. まず, Silverman の定理の (i) の高次元版として次を得られた.

**定理 3.1** (cf. [11, Theorem 2]).  $\phi$  を射とする. ある自然数  $n$  に対して  $\deg D_{\text{nc}}^{(n)} > N + 1$  が満たされるとし,  $D_{\text{nc}}^{(n)}$  が代数体  $k$  上定義できるとする. このとき,  $D_{\text{nc}}^{(n)}$  についての Vojta 予想を仮定すると, 任意の  $P \in \mathbb{P}^N(k)$  に対して  $\mathcal{O}_\phi(P) \cap (\mathbb{P}^N \setminus D)(R_S)$  は Zariski 稠密ではない.

[9] の主定理では,  $D^{(n)}$  全体が正規交叉であることを仮定しており, この定理はその改良である. また, この定理の  $N = 1$  の時の仮定は, Silverman の定理と実は同じである. なぜならば,  $\phi^{(2)} \notin k[x]$  のときは, Riemann–Hurwitz の公式を使うと,  $\phi^{(4)}$  に少なくとも 3 箇所の極があることが言え, 逆に,  $\phi^{(2)} \in k[x]$  の時は, 当然どの  $n$  に関しても  $\phi^{(n)}$  の極は一箇所である.  $N = 1$  のときの Vojta 予想は Roth の定理として知られているので, 定理 3.1 は Silverman の定理 (i) と完全に同じとなる.

座標の桁数にまで言及した Silverman の定理 (ii) の高次元版に関しては, 同時に複数の多重合成を分析する形で得られている.

**定理 3.2** (cf. [10, Theorem 7]).  $\phi$  を射とする.  $n_1 < \cdots < n_\ell$  を自然数とし,  $D'$  を  $D^{(n_1)} + \cdots + D^{(n_\ell)}$  の正規交叉部分とする.  $k$  を  $D'$  の定義体を含む代数体とし,  $D'$  の Vojta 予想を仮定する. このとき, 任意の  $P \in \mathbb{P}^N(k)$  と  $\epsilon > 0$  に対し,

$$\left\{ \phi^{(m)}(P) : \frac{\sum_{v \notin S} \lambda_v(D, \phi^{(m+n_i-n_1)}(P))}{\deg(D)h(\phi^{(m+n_i-n_1)}(P))} \leq \frac{\deg D' - (N+1)}{(\deg D)(d^{n_1} + \cdots + d^{n_\ell})} - \epsilon \quad \forall i = 1, \dots, \ell \right\}$$

は Zariski 稠密ではない.

$\ell = 1$  の場合は [11] で既に得られていた. 勿論,  $D'$  のように複数の多重合成の情報を使って, 「 $S$  の外の部分の高さの割合が小さいような  $\phi^{(m)}(P)$  の集合は退化する」という結論を得るほうが理想ではあるが, まだ解決していない. また, (2.2) より,  $D = (X_N = 0)$ ,  $k = \mathbb{Q}$  とすれば, 軌道の点の最後の座標の  $S$  と素な部分の桁数がそれなりに多いことを言及しており, Silverman の定理の (ii) の主張の類似である. ただ, 桁数の比が 1 になるとは主張していない. 実は高次元では, 1 になるとは限らず, このような具体例については最後の節で紹介する.

#### § 4. 高次元の有理写像の場合

次に  $\phi$  を射とは仮定せずに, 不定点を持つ  $\mathbb{P}^N$  の有理写像としたときに, 3 節の定理の類似を二種類試みる. 前節では, 射という仮定により, 高さ不等式  $h(\phi(P)) \geq dh(P) - C$  が成り立ち, 軌道の点の高さの増加測度を保証できた. 逆にいえば, このような形の高さ不等式さえ得られれば, 類似の結果を得られる. そこで, Lee [4] が最近得た高さ不等式を使うのが, 有理写像への拡張の第一弾である.

**定義 4.1** (Lee).  $\phi: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  を, ある超平面  $H$  に全ての不定点が含まれるような支配的な有理写像とする.  $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^N$  を不定点を解消する, 滑らかな部分多様体沿いのモノイダル変換の合成とし,  $\psi: V \rightarrow \mathbb{P}^N$  を解消された射とする:

$$\begin{array}{ccc} V & & \\ \pi \downarrow & \searrow \psi & \\ \mathbb{P}^N & \dashrightarrow \phi & \mathbb{P}^N \end{array}$$

このとき, **D-ratio**  $r(\phi)$  とは,  $\mathbb{Q}$  因子  $\frac{r}{\deg \phi} \psi^* H - \pi^* H$  が,  $H$  の固有変換  $\tilde{H}$  と  $\pi$  の例外因子たちの非負係数線形結合と線形同値になるような最小の  $r$  のことである.

つまり,  $\tilde{H}$  と  $\pi$  の例外因子たちを  $\text{Pic } V$  の基底ととり,  $\pi^* H$  と  $\psi^* H$  の係数比較をする. この D-ratio は超平面  $H$  の取り方, 及び不定点解消に使うブローアップの取り方に依存する. ここでは, 次の高さ不等式 [4, Theorem A]

$$(4.1) \quad \frac{r}{\deg \phi} h(\phi(P)) > h(P) - C \quad \forall P \in \mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}}) \setminus H$$

を使って, 前節の結果を拡張する.

**定理 4.2** (cf. [11, Theorem 5]).  $\phi: \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  を  $\overline{\mathbb{Q}}$  上定義できる支配的な有理写像とし, またある超平面  $H$  が全ての不定点を含むとする.  $\phi$  の次数  $d \geq 2$  とし,  $r$  を D-ratio とし,  $e_n = \deg(\phi^{(n)})$  とする. また,  $\phi, D, D_{\text{nc}}^{(n)}$  の定義体を含む代数体を  $k$  とする.  $D_{\text{nc}}^{(n)}$  に関する Vojta 予想を仮定すると,  $\mathcal{O}_\phi(P) \cap H = \emptyset$  を満たす任意の  $P \in \mathbb{P}^N(k)$  と  $\epsilon > 0$  に対し,

$$(4.2) \quad \left\{ \phi^{(m)}(P) : \frac{\sum_{v \notin S} \lambda_v(D, \phi^{(m)}(P))}{\deg(D) h(\phi^{(m)}(P))} \leq 1 - \left( e_n - \frac{\deg D_{\text{nc}}^{(n)} - (N+1)}{\deg(D)} \right) \left( \frac{r}{d} \right)^n - \epsilon \right\}$$

は Zariski 稠密ではない.

Lee は, 射の場合  $r = 1$  を満たすと示しており [4, Proposition 4.5], この時  $e_n = d^n$  となるので, (4.2) は, 定理 3.2 の  $\ell = 1$  の場合と完全に一致する. (4.2) の不等号の右辺が 0 より大きいとき, つまり

$$(4.3) \quad e_n - \frac{\deg D_{\text{nc}}^{(n)} - (N+1)}{\deg(D)} < \left( \frac{d}{r} \right)^n$$

のとき,  $P$  の軌道と  $(\mathbb{P}^N \setminus D)(R_S)$  の共通部分が退化すると分かり, この条件も  $\phi$  が射のときは定理 3.1 と一致する. D-ratio が大きくなるほど, より高い次数の正規交叉部分がないと軌道の整数点の退化が言えないということである.

次に有理写像への拡張の 2 種類目を考える. D-ratio を用いる方法は, 高さ不等式を射影空間全体 (厳密には  $H$  を除いた部分) で成り立たせようとしているので,  $r$  が大きくなり, (4.3) を満たしにくい. また, ある超平面に不定点が全て含まれている必要があるのも制約である. 定理 3.2 などの拡張に関しては, 高さ不等式を点  $P$  の軌道上でさえ得られれば十分なので,  $P$  の軌道の高さだけを使う方が意味自然である.

最近 Silverman によりこれに関する概念である **数論的度数** (arithmetic degree) が導入された [6]. 不定点と軌道が交わらないような点  $P$  に対し, 数論的度数  $\alpha_\phi(P)$  とは

$$\alpha_\phi(P) = \limsup_{m \rightarrow \infty} h(\phi^{(m)}(P))^{1/m}$$

と定義される. つまり, 軌道の点の漸近的数論的複雑さを捉えようとしており, 既に様々な研究結果が得られている. これを用いて, 定理 3.2 の次のような拡張が得られた.

**定理 4.3** (cf. [10, Theorem 12]).  $\phi : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  を  $\overline{\mathbb{Q}}$  上定義される次数  $d \geq 2$  の支配的な有理写像とする. 自然数  $n$  は,  $\deg(D_{\text{nc}}^{(n)}) > (N+1)$  を満たすとし,  $\phi$  と  $D_{\text{nc}}^{(n)}$  の定義体を含む代数体を  $k$  とする.  $P \in \mathbb{P}^N(k)$  の軌道が不定点集合と交わらないとし,  $\alpha = \alpha_\phi(P)$  とおく. また, 数列  $\{a_m\}$  を  $h(\phi^{(m)}(P)) = (\alpha a_m)^m$  で定義する. さらに,

$$(4.4) \quad c = 1 - \frac{\deg(\phi^{(n)}) \cdot \deg(D) - \deg(D_{\text{nc}}^{(n)}) + (N+1)}{\alpha^n \deg(D) \liminf_m a_{m+n}^{m+n}/a_m^m}$$

とする. この時,  $D_{\text{nc}}^{(n)}$  に関する Vojta 予想を仮定すると, 任意の  $\epsilon > 0$  に対して,

$$(4.5) \quad \left\{ \phi^{(m)}(P) : \frac{\sum_{v \notin S} \lambda_v(D, \phi^{(m)}(P))}{\deg(D) h(\phi^{(m)}(P))} \leq c - \epsilon \right\}$$

は Zariski 稠密ではない.

この定理について何点か付記する.

- (i) 前出の結果同様,  $c > 0$  ならば,  $P$  の軌道と  $(\mathbb{P}^N \setminus D)(R_S)$  の共通部分が退化すると分かる. 従って,  $P$  の軌道の (大域) 高さの漸近的性質が分かることで,  $S$  に属する  $v$  の  $v$  進的情報を得られ, 定理 4.2 のように射影空間全体での高さ関数の情報は必要ない. この有益さを表す例は例 5.4 で紹介する.
- (ii)  $\deg(\phi^{(n)})$  が  $\alpha^n$  より十分小さいとき, (4.4) によると,  $c > 0$  となる. ただし,  $P$  の軌道の高さについてある程度正確に知らない限り,  $\liminf_m a_{m+n}^{m+n}/a_m^m$  を制御できず, 一般の具体例を扱うのはあまり現実的ではない.
- (iii)  $\{a_m\}$  がいずれ単調増加になるならば,  $\liminf$  の部分を 1 に置き換えて  $c$  を定義しても, 同じ結果が成り立つ [10, Theorem 10].

- (iv) **力学的次数**  $\delta_\phi$  は,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\deg(\phi^{(n)}))^{1/n}$  で定義される.  $\phi$  が射の場合は  $\delta_\phi = d$  なので,  $\delta_\phi$  は  $\phi$  がどれだけ射から離れているかを計る一つの指標で, 特に複素力学系で盛んに研究されてきた. (4.4) によると,  $n \rightarrow \infty$  につれ,  $\deg D_{\text{nc}}^{(n)}$  が  $\deg(D)\delta_\phi^n$  に近ければ近いほど,  $c$  が 1 の近くになり, 殆どの軌道の点に関し, 高さのほぼ全てが  $S$  の外の局所高さから来ることを導ける.

## § 5. 具体例の紹介

この節では, Vojta 予想を仮定せずに扱える具体例についてまとめて紹介する. Vojta 予想の特別な場合として, 整数点に限定した Lang-Vojta 予想がある. これは,  $\mathbb{P}^N$  の場合,  $N+2$  個以上の既約成分を持つ因子に関しては証明されているので, これを用いて具体例を作る方法もあるが [11, Proposition 2, Example 3], ここでは, 射影空間上の線形因子に関する Vojta 予想と同値である Schmidt の部分空間定理を用いる具体例に焦点をあてる. まず定理 3.2 の例を二つ述べる. 最初は  $\ell = 1$  の場合である.

**例 5.1** (cf. [11, Example 1]).  $\phi = [Y^4 + Z^4 : X^3(X + Y + Z) : YZ^3] : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  は射である. また,  $D = (Z = 0)$  とすると,  $D^{(2)} = (X^3(X + Y + Z)Y^3Z^9 = 0)$ ,  $D_{\text{nc}}^{(2)} = (XYZ(X + Y + Z) = 0)$  となるので, Vojta 予想の代わりに Schmidt の定理を使う. 定理 3.2 より,

$$(5.1) \quad \left\{ \phi^{(m)}(P) : \frac{\log |a_2^{(m)}|'_S}{\log \max(|a_0^{(m)}|, |a_1^{(m)}|, |a_2^{(m)}|)} \leq \frac{1}{16} - \epsilon \right\}$$

が退化する. また, Schmidt の部分空間定理の場合, 不等式を満たさない集合は**同じ代数体上**定義される超平面に含まれるとわかっている (一般の Vojta 予想の場合, 例外集合の形状までは分からない). よって,  $\mathbb{Q}$  上の直線に  $P$  の軌道の点が無限回乗らない事を示せれば, (5.1) が退化するというだけでなく, (予想を一切仮定せずに) 有限集合だとまでわかる. 例えば,  $P = [100 : 2000 : 1]$  の時は, Faltings の定理を使うことでこれを示すことができる.

**例 5.2** (cf. [10, Example 8]). 続いて,  $\ell = 2$  の具体例を紹介する.  $F_1 \in \mathbb{Q}[X, Y, Z]$  を斉 3 次  $\mathbb{Q}$  係数多項式で, 4 点  $[0 : 1 : 0]$ ,  $[0 : 1 : -1]$ ,  $[1 : 0 : 0]$ ,  $[1 : 0 : -1]$  で非零とする. また,  $F_1$  は  $\overline{\mathbb{Q}}$  上既約で,  $F_1 = 0$  は  $[1 : -1 : 0]$  を通り, 尖点であるとする. この時,  $\phi = [Z^2(X + Y + Z) : F_1 : XY^2]$  は  $\mathbb{P}^2$  上の射であり,  $D = (Z = 0)$  とすると,  $\phi^*(D)$  は  $XY^2 = 0$  で定義され,  $(\phi^{(2)})^*(D)$  は  $Z^2(X + Y + Z)F_1^2 = 0$  で定義されるので,  $D_{\text{nc}}^{(1)} = (XY = 0)$  かつ  $D_{\text{nc}}^{(2)} = (Z(X + Y + Z) = 0)$  となる.  $D_{\text{nc}}^{(1)}$  も  $D_{\text{nc}}^{(2)}$  も次数 4 未満だが,  $D^{(1)} + D^{(2)}$  には  $D' = (XYZ(X + Y + Z) = 0)$  が含まれるので, 定理 3.2 と

Schmidt の部分空間定理を用いると

$$\left\{ \begin{aligned} &\phi^{(m)}(P) : \frac{\log |a_2^{(m)}|'_S}{\log \max(|a_0^{(m)}|, |a_1^{(m)}|, |a_2^{(m)}|)} \leq \frac{1}{12} - \epsilon \\ &\text{及び } \frac{\log |a_2^{(m+1)}|'_S}{\log \max(|a_0^{(m+1)}|, |a_1^{(m+1)}|, |a_2^{(m+1)}|)} \leq \frac{1}{12} - \epsilon \end{aligned} \right\}$$

が退化することが予想を仮定せずに分かる.

次は定理 4.2 の具体例である.

**例 5.3** (cf. [11, Example 8]).  $i = 0, \dots, 3$  に対し,  $M_i = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 - X_i$  とし,  $\phi: \mathbb{P}^4 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$  を

$$\left[ M_0 \prod_{j=1}^{d-1} L_{0,j} : M_1 \prod_{j=1}^{d-1} L_{1,j} : M_2 \prod_{j=1}^{d-1} L_{2,j} : X_0^{d-2} X_1 X_2 : M_3 \prod_{j=1}^{d-1} L_{3,j} \right]$$

で定義する. ここで,  $L_{i,j}$  たちは次の 4 つの性質を満たす線形形式とする:

- (1)  $L_{i,j}$  たちの  $X_4$  の係数は非零で,  $\{L_{0,1}, \dots, L_{2,d-1}, M_0, M_1, M_2\}$  は一般の位置にある (つまりどの 5 つも線形独立である).
- (2) 任意の  $i = 0, \dots, 2$  に対し,  $\{P : L_{0,j_0}(P) = 0\} \cap \dots \cap \{P : L_{3,j_3}(P) = 0\}$  は  $X_i = 0$  と交わらない.
- (3) 任意の  $i = 0, \dots, 2$  と  $k = 0, \dots, 3$  に対し,  $X_i = M_k = 0$  が定義する  $\mathbb{P}^2$  上では  $\bigcap_{\ell \neq k} \{P : L_{\ell,j_\ell}(P) = 0\}$  は空集合.
- (4) 任意の  $i = 0, \dots, 2$  と  $k, m \in \{0, \dots, 3\}$  に対し (但し  $k \neq m$ ),  $X_i = M_k = M_m = 0$  で定義される  $\mathbb{P}^1$  上では  $\bigcap_{\ell \neq k, m} \{P : L_{\ell,j_\ell}(P) = 0\}$  は空集合.

$L_{i,j}$  たちを一般の位置に取れば全 4 条件を満たすことが分かり, 例えば

$$L_{i,j} = \sum_{m=0}^4 ((d-1)i + 2 + j)^m X_m$$

が一例である.

$L_{i,j}$  が満たす条件から,  $[0 : 0 : 0 : 0 : 1]$  が唯一の不定点だと分かり, この点を一度ブローアップすると, 不定点は解消する.  $H = (X_3 = 0)$  とすると,  $\pi^* H = \tilde{H} + E$  かつ  $\psi^* H = d\tilde{H} + (d-1)E$  となるので, D-ratio は  $\frac{d}{d-1}$ . 一方,  $(\phi^{(2)})^* H$  は  $M_0^{d-2} M_1 M_2 \prod_j L_{0,j}^{d-2} \prod_j L_{1,j} \prod_j L_{2,j} = 0$  で定義されるので,  $3d$  個の独立な超平面を含む. よって  $n = 2$  での (4.3) は

$$d^2 - 3d + 5 < (d-1)^2$$

となり,  $d \geq 5$  の時は満たされる. 従って, 定理 4.2 と Schmidt の部分空間定理を用いると,  $a_3^{(m)}$  が全ての  $m$  において非零のような  $P$  の場合, 任意の  $\epsilon > 0$  に対し,

$$\left\{ \phi^{(m)}(P) : \frac{\log |a_3^{(m)}|'_S}{\log \max_i |a_i^{(m)}|} \leq \frac{d-4}{(d-1)^2} - \epsilon \right\}$$

は退化する.

最後に定理 4.3 の具体例である.

**例 5.4** (cf. [10, Example 11]).  $\phi = [256X^2 : (X+Y)(X+2Y+Z) : YZ]$  と  $\mathbb{P}^2$  上で定義すると,  $[0:0:1]$  だけを不定点と持つ有理写像となる.  $\deg \phi^{(n)} = 2^n$  であり,  $(\phi^{(2)})^*(Z=0)$  は  $(X+Y)(X+2Y+Z)YZ=0$  で定義されるので, 線形独立な 4 本の直線となる. ここで,  $P = [4:1:1]$  とすると,  $\phi^{(m)}(P)$  の第一座標は常に 2 のべき乗で, 残り 2 座標は奇数である. 従って,  $\phi^{(m)}(P)$  の高さを正確に計算でき,

$$a_m^m = \frac{h(\phi^{(m)}(P))}{2^m} = \frac{((1+2+\cdots+2^{m-1}) \cdot 8 + 2^m \cdot 2) \log 2}{2^m}$$

となり,  $\liminf_m a_{m+n}^{m+n}/a_m^m = 1$  である. 定理 4.3 と Schmidt の部分空間定理より,

$$\left\{ \phi^{(m)}(P) : \frac{\log |a_2^{(m)}|'_S}{\log \max(|a_0^{(m)}|, |a_1^{(m)}|, |a_2^{(m)}|)} \leq \frac{1}{4} - \epsilon \right\}$$

が退化すると分かる.

終わりに, 関連する具体例及び今後の課題について述べる. 以下では  $H$  を超平面とする. 定理 3.1 によると,  $\deg H_{\text{nc}}^{(n)} > N+1$  となる  $n$  が存在すれば, (Vojta 予想の下) 軌道上の  $S$  整数点は退化する. 逆に,  $\phi$  のある多重合成が多項式ならば, どの  $n$  に対しても  $\deg H_{\text{nc}}^{(n)} = 1$  となり, また軌道上の整数点が無限個になることも可能である. そこで, 中間の値である,  $2 \leq \max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} \leq N+1$  となる  $\phi$  の場合の軌道上の整数点についてが疑問となる. これに関しては, [11] や [10] の末尾でも触れたように, 様々な可能性がありまだ理解されていない.

例えば,  $\phi = [F_0(X, Y, Z) : F_1(Y, Z) : F_2(Y, Z)] : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  を考える. つまり,  $F_1, F_2$  は  $Y$  と  $Z$  だけの斉次多項式とすると,  $\phi^{(n)}$  も同じ性質を持つので,  $H = (Z=0)$  とすると,  $H^{(n)}$  は  $[1:0:0]$  を通る直線の和集合と  $\mathbb{Q}$  上ではなり, どの  $n$  に対しても  $\deg H_{\text{nc}}^{(n)} = 2$  となる. この場合,  $\phi|_{(X=0)}$  の 2 重合成が多項式でない限り, ある定数  $c > 0$  が存在し,

$$(5.2) \quad \left\{ \phi^{(m)}(P) : \frac{\sum_{v \notin S} \lambda_v(H, \phi^{(m)}(P))}{h(\phi^{(m)}(P))} < c \right\}$$

が退化すると (Vojta 予想を仮定せずに) 示せる [10, Proposition 15]. 点  $P$  の後半 2 座標が  $\phi|_{(X=0)}$  の前周期点でないならば, (5.2) は有限となる. しかしながら, うまく

$F_0, F_1, F_2$  を選ぶと, この  $c$  に明確な上界があり, 1 に近づけられない. よって, 1 次元における Silverman の定理 (ii) を高次元化する場合, 何らかの条件を設けないと, 極限を 1 にすることはできない. このような例は, 一般の高次元でも作れ, また同じように  $\max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} = 3$  の例も構築できる [10, Section 6].

次に,  $\max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} = N+1$  の場合を考察する.  $\phi = [X_0^3 : X_0 X_1^2 : \cdots : X_{N-1} X_N^2] : \mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^N$  とし,  $H = (X_N = 0)$  とすると,  $H_{\text{nc}}^{(1)}$  は  $X_{N-1} X_N = 0$  で定義され,  $H_{\text{nc}}^{(2)}$  は  $X_{N-2} X_{N-1} X_N = 0$  で定義される. 続けていくと,  $n \geq N$  に対しては  $H_{\text{nc}}^{(n)} = (X_0 \cdots X_N = 0)$  となることがわかる.  $\phi$  は単項式写像であり,  $\mathbb{P}^N$  の有理写像であると同時に,  $\mathbb{G}_m^N$  上の代数群としての射とみることもできる. ここで  $P = [2^N : 2^{N-1} : \cdots : 2 : 1]$  とし, 軌道の点を最終座標 = 1 として書き, 残りの座標の  $\log_2$  をベクトルで書くと,  $\phi^{(m+1)}(P)$  と  $\phi^{(m)}(P)$  の間に行列による関係が現れる. この行列のジョルダン標準形を分析し,  $\mathbb{G}_m^N$  に関しての Lang 予想 (Laurent の定理 [3]) を使うと,  $P$  の軌道の点は全て  $(\mathbb{P}^N \setminus (X_N = 0))(\mathbb{Z})$  に入ること, また軌道が Zariski 稠密であることを導ける. 詳しくは, 類似の例 [11, Example 6] を参照されたい. この例からわかることは, 有理写像まで含めることにすると,  $\max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} = N+1$  を満たす写像で, ある点の軌道の整数点が Zariski 稠密になることがあるということである.

以上の二例からもわかるように,  $2 \leq \max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} \leq N+1$  の時は, 軌道の整数点が退化するかの判定にはさらに精密な条件が必要である. また, 一般の  $\mathbb{P}^N$  上で,  $\max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} = N$  を満たす射の作り方も分かっていない.  $\max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} = N+1$  を満たす射はないのではないかと推測されるが (1 次元の時も,  $\phi^{(2)}$  が多項式の時はいくつかの  $n$  で  $\deg H_{\text{nc}}^{(n)} = 1$  であり,  $\phi^{(2)}$  が多項式でないときは,  $\phi^{(4)}$  に最低でも 3 か所の極があることが Riemann–Hurwitz の公式から導ける), 未解決である. このように,  $2 \leq \max_n \deg H_{\text{nc}}^{(n)} \leq N+1$  の時はまだ理解できていないことが多いので, 完全不変部分多様体の有無などの条件を用いて解明していくのが今後の課題である.

**謝辞** 有益なコメントを下された査読者に感謝致します.

## References

- [1] Enrico Bombieri and Walter Gubler, *Heights in Diophantine geometry*, New Mathematical Monographs, vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [2] Jan-Hendrik Evertse and Roberto G. Ferretti, *A generalization of the Subspace Theorem with polynomials of higher degree*, Diophantine approximation, Dev. Math., vol. 16, SpringerWienNewYork, Vienna, 2008, pp. 175–198.
- [3] Michel Laurent, *Équations diophantiennes exponentielles*, Invent. Math. **78** (1984), no. 2, 299–327.
- [4] Chong Gyu Lee, *Maximal ratio of coefficients of divisors and an upper bound for height for rational maps*, arXiv 1002.3357, 2010.
- [5] Joseph H. Silverman, *Integer points, Diophantine approximation, and iteration of rational maps*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 3, 793–829.

- [6] ———, *Dynamical degree, arithmetic entropy, and canonical heights for dominant rational self-maps of projective space*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **34** (2014), no. 2, 647–678.
- [7] Paul Vojta, *Diophantine approximations and value distribution theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1239, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [8] ———, *Diophantine approximation and Nevanlinna theory*, Arithmetic Geometry (Cetraro, Italy, 2007), Lecture Notes in Mathematics, vol. 2009, Springer Verlag, Berlin, 2011, pp. 111–230.
- [9] Yu Yasufuku, *Vojta’s conjecture and dynamics*, Algebraic number theory and related topics 2009, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B25, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2011, pp. 75–86.
- [10] ———, *Deviation from  $S$ -integrality in orbits on  $\mathbb{P}^n$* , Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) **9** (2014), no. 4, 603–631.
- [11] ———, *Integral points and relative sizes of coordinates of orbits in  $\mathbb{P}^N$* , Math. Z. **279** (2015), no. 3-4, 1121–1141.