

# 物性論的にみた砂の力学的挙動

村 山 朔 郎

## ごあいさつ

このたびは多くの時間をさいてこの講演会を設けていただき、誠に光栄に存じ厚く御礼申し上げます。退官を期に話をするようにとのことでありましたが、今迄行ってまいりましたことの締めくくりとして何かお話させていただくのが順当かと思いましたが、これからもいづらか勉強を続けたいと考えておりますので、これから行いたく考えておりますことのうち、現在進めていることの一部をのべさせていただくことに致します。

ここでのお話の概要は、現在の土質力学の現状、その中で今後開発せねばならないと思われる分野、その開発のための私案についてお話しすることにします。

土質力学の中でも特に土の材料力学は、まだ本格的な力学体系を整えるにいたっていないように思われますので、それをもとにして土や地盤の問題を解明するには内容に不足があるように思われます。土の材料力学の内容としてはその基本の中に、土の強度を含めた普遍的な応力・ひずみ関係の解明を加える必要があると考えられます。しかし土には砂や粘土があるように物性が多様であり、その力学特性も一層複雑でありまして、既成の弾性体や塑性体の力学では土本来の力学特性を扱うのに不十分であります。そのため土のような摩擦要素をもった材料に適した新たな力学体系を作る必要がありますが、それにはまずその力学体系を作るための手法から工夫していかなければならないと思われます。その一つの試みとして、ここでは土を粒子からみなおして、例えば砂では、砂は不規則な形状・寸法の摩擦法則に従う固体粒子の集合体とする前提から砂粒子の微視的挙動を物性論的に考察することと統計力学的な手法を用いることにより砂の応力・ひずみ特性を組立ててみようと考えました。現在の見通しでは、この手法によって砂だけでなく粘土の特性についても解けるかと考えていますが、なお一層の努力が必要と思っております。

本日はこの試みの一つとして、偏差応力をうけたときの砂の応力・ひずみ特性の解析についてお話したいと思えます。これはまだ荒削りのところもあり、この場の話題としてふさわしいかどうか分かりませんが、研究室を去る一学徒の卒業論文としてお聞きいただき、今後のご指導とご鞭撻を賜わることができれば誠に幸と存じます。

- 目 次：1. 土質力学の生い立ちと現状  
2. 土の材料力学の今後  
3. 砂の応力・ひずみ特性の解析

## 1. 土質力学の生い立ちと現状

### 1.1 土質力学の内容

一般に土質力学といわれているものを内容からみると、土自身の力学特性を扱ういわば土の材料力学と土からなる構造体の力学を扱う土の構造力学の2分野に大別することができる。このほかに多様な土の性質を

---

注：本文は、昭和50年2月4日に防災研究所で行った退官記念講演をまとめたものであるが、講演の際時間の制約から略述した部分は本稿をまとめるとき加筆した。

規定していくための土の材料学がある。土の材料力学は、土を形成する土粒子の集合体、すなわち土の粒子骨格の強度や応力・ひずみ・時間関係などの力学特性を解明するものであるが、土は水・ガスに対しては porous medium でもあるので、浸透や透水などこれら物質の土中移動に対して土の示す力学特性についての問題もある。一方土の構造力学は、材料力学で求められた土の特性をもとにしてその boundary value problem を扱うものである。構造力学の対象としては、地盤の力学、斜面の安定、壁体にかかる土圧の問題や基礎工や地中構造物などの土以外の構造物との相互作用の問題などが挙げられる。

このような土質力学がわが国で広く研究されるようになったのは戦後に海外の文献が自由に入るようになってからではあるが、その後における研究者や技術者の努力によって、学問の分野にも技術の方面にも非常な発展をみるにいたった。しかしそれでもなお現在土、地盤の問題で多くの問題が解析的に解けないまま残されている。これは材料力学として土の力学特性はあまりに複雑であって、変形問題を解析的に取り扱いにくかったことがその理由の一つに挙げられよう。それでは土質力学の理論体系は、現在どのようにあるかをその生い立ちに遡ってみることにする。

## 1.2 土質力学の生い立ち

土質力学が、今のような理論的形態をとり始めたのは18世紀、1773年に Coulomb<sup>1)</sup> が提案した擁壁に作用する土圧論であろう。この時代にはまだ土が粒子からできているという概念は入れられず、すべり面で囲まれた楔型の滑動しようとしている土塊について、力のつり合いから土圧を求めたものであった。砂の性状、すなわち砂が粒子の集合体であることを含みとした土圧論が生れたのはそれから 100 年近い後の 1856 年に Rankine<sup>2)</sup> が求めた土圧論である。これらは土圧論といっているが、解の内容は塑性的破壊をした土塊がすべり落ちるのを防ぐための壁体の反力を求めて土圧としたものであって、すべり面で壊された土塊の塑性つり合いを構造力学的に解いたものである。また Coulomb の理論も Rankine の理論もある条件に対するすべり面を基準にした特解であって、実際の擁壁土圧に適合させるには種々の補正が必要となり、その補正法が長い間当時の研究者達の研究対象になっていた。

上記の理論のもとになったすべり面は、土中のせん断面にほかならない。このようにせん断面が生じやすいのは土が、他の材料と比べて、自重が重い割にせん断強度が非常に低いことの表われであるといえる。土がせん断抵抗に弱い点は、土を相手に実際に設計や施工をするときつねに心にかかる点で、その後には作られた基礎の支持力や斜面の安定などの設計法がいずれも土のせん断強度を基準としていることから理解できよう。

そのためつきにはすべり面の成立を材料力学的に明らかにするため、土のせん断強度の研究に力が注がれるようになったのは当然のことである。砂に対しては、最初のうちはせん断強度の目安として、砂を堆積したときの自然斜面が示す最大傾斜角が測られ、息角（安息角）と称して用いられたが、せん断箱が工夫されてせん断試験ができるようになり、その結果内部摩擦角の概念が発見された。これは、あたかも固体摩擦のようにせん断面強度  $\tau_f$  がせん断面への垂直応力  $\sigma_n$  に正比例し、 $\tau_f = \sigma_n \cdot \tan \phi$  の関係が知られたからである。その比例定数  $\tan \phi$  は内部摩擦係数、 $\phi$  は内部摩擦角と称されている。ついで粘土の試験では、砂のような内部摩擦角のほかに、垂直応力  $\sigma_n$  の大きさに無関係な強度  $c$  が存在することが知れ、これを粘着力といい、粘土のせん断強度は、 $\tau_f = c + \sigma_n \cdot \tan \phi$  の形で示された。こうして  $c$  や  $\phi$  は土に固有な強度定数のようにみえたが、同一の土であっても試験前の土の取扱や試験条件が変るとこれらの値や性質が変化するので、実際の地盤内のせん断ではどのような値を用いるのか決めるにくくなった。

そのため  $c$  や  $\phi$  の内容を分析するため、土粒子の性質やせん断中の土の挙動についてさらに多くの研究がつけられた。土の粒子が角張っているほど、また密に填充された土ほどせん断強度が高いことは予想された通りであるが、せん断にともなう土の体積変化も強度に影響することが明らかになった。土は、1885年に Reynolds が見出したダイヤランシーの性質をもつ材料であって、応力・ひずみ特性はこの点でも弾性体と異っている。すなわち弾性体では、その体積変化は水圧のような周圧（平均主応力）によってのみ生じ、せん断力（偏差応力）では生じないとされているが、土ではせん断応力を加えると、せん断ひずみが進むにつ

れて体積の変化も生じる。しかも土のダイラタンシー特性は間げき比の大きいゆるい土はせん断にともない収縮し、高い密度の土は膨張するので、外圧に対して体積変化が行なう仕事量の授受分がせん断応力の仕事に加算されることとなり、せん断強度は土の内部摩擦に対する抵抗と、体積変化に対する抵抗とからなることになる。ダイラタンシーは間げき比の影響をうけるから、間げき比とダイラタンシーの関係や、等間げき比において  $c$  や  $\phi$  を評価しようとする1960年の Hvorslev<sup>3)</sup> の提案などの研究成果がみられるようになった。

土の間げきが水でみだされているいわゆる飽和土では、間げき水圧が土の体積変化で変化するので、ダイラタンシーの影響は一層複雑になる。粘土は透水性に劣るので、粘土中の間げき水は、せん断による体積変化に追従するほどの速さでは移動できないから、間げき水に水圧の変動量すなわち過剰間げき水圧が発生する。透水性とされている砂の場合でも、地震時のようにせん断応力の作用時間が短いときには、間げき水の移動が体積変化に追従できないので、やはり過剰間げき水圧が発生することがある。間げき水圧が増加するとき、すなわち正の過剰間げき水圧の場合は、過剰間げき水圧分だけ外圧が間げき水で支持されるから、それだけ土粒子自身にかかる外圧ひいては  $\sigma_n$  は減少し、その結果せん断強度  $\tau_f$  は低下する。反対に負の過剰間げき水圧が発生すると、粒子を引き寄せ土粒子にかかる  $\sigma_n$  が増大する結果せん断強度は増加する。このように、外圧を間げき水圧が支持する分と土粒子自身が支持する分とに分け、後者だけがせん断強度に有効応力—これを有効応力という—となることも明らかとなった。外圧は間げき水圧と有効応力の和であることを意識して、このようにみた外圧を全応力といっている。土の強度理論に有効応力の概念が導入され、せん断強度の構成が一層明確にされたのは、20世紀に入って1923年に Terzaghi<sup>4)</sup> によってである。ついでこれを受けて外圧とそこでのせん断によって生ずる間げき水圧とを関係づける間げき水圧係数の提案が、1954年 Skempton<sup>5)</sup> によってなされた。

このようなせん断強度の研究によって、最初は全応力に対するみかけの強度定数であった  $c, \phi$  は、その間げき比依存性や土のもつダイラタンシー特性を考慮することによって、同一間げき比のもとにおける  $c, \phi$  (この  $c, \phi$  を  $c_e, \phi_e$  と記す) や、有効応力に対する強度定数  $c', \phi'$  に分析されるようになった。しかしこれらの強度定数そのものの本質についての分析に関しては、まだ結論に達するほど明らかでない。また同じ間げき比をもつ同じ土であっても、試料の試験前の履歴によっては必ずしも同じせん断強度とならないという報告もある。この原因は、間げき比の分布や粒子配列など粒子骨格の構造の相異によるものでないかといわれているが、土の構造とは何を指すかはまだ十分な解明には到っていないようである。こうして一世紀にわたるせん断強度の研究は、今日においてもまだ土質力学の主要課題として続けられている。

一方土の構造力学の分野をみると、土を弾性体または弾塑性体と仮定したいくらかの理論のほかは、やはり地盤において最も危険なせん断破壊を防ぐことを主眼として、基礎の支持力論や斜面の安定論が展開されてきた。これらの理論は、目標とする対象はそれぞれ異なっているが、いずれも土圧論のときと同様に、すべり面(せん断面)によって囲まれた塑性的破壊状態にある土塊のつり合い、すなわち塑性つり合いを唯一の力学条件として、限界状態における力の諸元を求めようとするには変わりはない。

故に塑性つり合いの問題は、せん断強度すなわち破壊条件式を与えて、すべり面を合理的に求めることに帰せられよう。このようなすべり面は、応力のつり合い式と破壊条件式とから数学的な解の存在は期待できるが、特別の場合のほかは具体的に解けないため、実用上はすべり面の形を近似したり、その位置を最小安全率になるよう試行で求めたりして、種々の近似や補正を用いて巧妙に実用的な理論を展開している。この際すべり面上の土のせん断強度定数は、せん断強度の特性からみれば、現地の土を用いてすべり面上における条件と同じ試験条件で、せん断試験をして得たものを用いればよいであろうが、通常は軟い粘土では正の過剰間げき水圧の発生を予期して、 $\phi$  を無視して  $c$  の特性のみを用いた取扱をしたり、すべり面付近の間げき水圧の推定がつく場合には、有効応力に対する強度定数  $\phi', c'$  によったりしている。しかし上記の間げき水圧の導入は、粒子骨格に加わる外圧すなわちいわば外力の境界値としての導入であって、ダイラタンシーによる間げき水圧の変動まで考慮した解は、Skempton の研究などにみられるほかは、わが国では広く用いられていないようである。

### 1.3 土の変形問題の意義

上述のように、せん断破壊を防ぐことを主眼とした研究や設計法がいろいろと展開されてきたことによって、昨今は地盤の破壊による災害はほとんど防げるようになった。しかし地中のすべり面は、これらの理論のように、すべり面の全域がつねに一斉に発生する場合のみとは限らないし、またすべり面の発生にいたるまでの地盤の状態には過渡的な地中の変形過程が影響したりして、上記の理論は実際現象と必ずしも一致するとは限らない。地中の応力状態に関係する問題、たとえば土圧分布の問題などは、構造力学でいう不静定問題に属するから、これらを解くにはどうしても土の応力・ひずみ関係を知らねばならない。

また今日造られる建造物は、それに接する地盤の破壊だけを防げばよいというほど単純なものでなく、地盤や基礎工の変形や不同沈下について厳しい要求がつけられることが多い。また斜面の安定やトンネルの掘削については、破壊時刻の予知など時間要素についての情報までも要望されている。このような変形やその時間的変量までを含めた構造力学は、今までのように強度だけを主体とした材料力学からは求めることができない状態である。はじめにのべたように現在の力学体系には、材料力学としての課題の一つである応力・ひずみの解明がないので、今後の要望を解析的に解くには限界にきているといえよう。

もっとも今迄の土質力学の理論の中にも沈下を扱ったものがあり、それは1925年に Terzaghi<sup>6)</sup> の解いた圧密理論である。しかしこの理論は、土から間げき水が絞り出されて、粘土の粒子骨格が収縮していく経時過程を、粒子骨格を弾性体とみなして解いたものであって、粒子骨格が示す非弾性特性までも考慮したものではなかった。そのため実際の粘土の圧密変形では、この理論解とちがった様相を示す場合があらわれ、この相異なる部分を2次圧縮と称して理論外に扱われてきた。その後粒子骨格を種々の粘弾性体に仮定して、2次圧縮を説明しようとする試みがなされたが、粘土特有のレオロジー特性を十分説明するほどではなかった。先般(1956年)来、柴田徹教授を中心に粘土のレオロジー特性を研究してきたのは、この解明のためである。この研究<sup>7)</sup>では、土の材料力学としては初めて rate process の考えを粒子構造の変形過程に導入することにより、理論的に線型粘弾性領域の粘土の挙動とクリープ破壊時間などを解析的に求めることができたが、まだ他の問題の解明が残っており、いまその研究を試みている状況である。

上述したように、現在までの土質力学をみると、材料力学においても構造力学においても、その主目標をなすものは、土の破壊に重点をおいたものであって、変形問題に対しては、脱水圧密以外はほとんど理論的な解明がなされていない状態といえよう。このような状態にあるため、現在では土質力学を一貫した理論体系で記述することが困難であって、たとえば一般的な土のテキスト・ブックを開いてみても、各章間には理論的な連絡が少なく、通常最初に土の材料学、地盤調査法などの各章、つづいて土の材料力学として、せん断強度特性、圧密特性ならびに締固め特性の3章が相互にあまり関係もなくならび、透水問題の章がこれらの間に存在して記され、最後に構造力学分野の各論として土圧論、地中応力分布、支持力論、斜面安定などが、圧密理論や弾性論を除けば主に塑性つり合いを主体の理論として記されている。故に専門外の人からみれば、各章間の結びつきを理解しにくいことも多いかと思われる。

ここでは今までの土質力学の概況をのべたが、要するに今までの研究は、土・地盤として最も警戒されていた破壊の防止にその主力を傾けてきたものとみられよう。その功績は今日十分認められるところであるが、さらに現状を改善するためにも、また今後の問題の解明のためにも、何らかの改革をせねばならない時にきていると思われる。

## 2. 土の材料力学の今後

### 2.1 土の構成式の意義

土質力学はこれからますます各方向に発展するであろうが、そのうち材料力学の分野として発展が必要と思われる方向を考えたいと思う。

土の構造力学の分野のうち、今なお理論的な解析が困難な問題を挙げてみると、その中にはいわゆる不静定問題として解かねばならないような地中の応力分布に関する問題、変形や不同沈下のようなひずみ分布に

関する問題、またそれらの経時変化や破壊にいたる過程に関しての時間的な問題などがある。これらの問題は、地盤が破壊する以前の現象を扱うものであるから、従来のような破壊時点のみを対象としたせん断強度の考察だけでは解くことができない。しかも日常接する地盤の問題の中にはたとえばビルディングや石油タンクの不同沈下のように一この種の問題も決して少なくない。

上述の問題は、いずれも土の変形が関与している問題であり、また土の変形は、粘土のように時間や温度に依存する場合もあるから、土の材料力学としては、せん断強度だけでなく、一般的にはこれに応力・ひずみ・時間・温度の間の関係を含めて、外力、変形、時間と破壊を同時に論ぜられるような広範かつ普遍的な土の力学特性を解明する必要がある。この必要性は、ここにのべるまでもなく、当然のことであるが、今までその解明に到らなかったことは、土の様相が非常に多様であり、その力学特性があまりにも複雑であったからである。しかし前に挙げた土の構造力学の問題は、土質力学としては基本的な問題であり、これらの問題を boundary value problem として orthodox な方法で解くためには、その基礎の位置を占める材料力学としては、どうしてもこの複雑な土の力学特性の解明を期待しなければならない。もし土の力学特性が分り、それが構造力学に適用されたときには、土質力学はほかの力学のように一貫した体系にととのえられ、土のいろいろの力学現象の間にも深いつながりが示されるのではないかと思われる。

すなわち土の応力・ひずみ関係などの力学特性式は、地盤内の応力・ひずみを解くための構造力学には不可欠の条件である。地盤中の応力やひずみを解析するには、field equation すなわち応力やひずみの場のつり合い式や適合条件式とそれらの境界条件だけでは解に必要な方程式の数が不足しているので、ほかに土の物質定数あるいは物質関数を含んだ場の量の関係式が必要である。土の力学特性式は、ここに必要としている関係式に該当するものである。故にこの特性式は、所要の場の量を含み、かつ解を得るのに必要なだけの数の関係式から成立たねばならない。

地盤の場に対する解析の計算には通常の解析的な方法のほかにも種々の方法があるであろうが、最近ではコンピューターの発達によって、面倒な計算もかなり遂行できるようになった。そのソフト・ウェアとしては1960年に Clough が開発した有限要素法は、土に対しても有力なものの一つであろう。この際には、土の力学特性式は、コンピューターの in put となるものであるから、地中におこる土の種々の状態に十分適合するような普遍性の高いものでなければならない。ある限られた実験で求めた特定条件のもとでしか成立しないような力学特性式を、コンピューターの in put に入れ、コンピューターの計算能力を信じるあまり、その out put として出された地盤の応力・ひずみなどまでも信じることがないようにせねばならない。このように in put がよくないために、折角求めた out put が役に立たない場合を、先日会った米人は garbage in, garbage out! (ごみを入れたらごみが出た) といっていた。

故に土の応力・ひずみ関係などの力学特性式は、普遍性の高いことが要求される。土の応力・ひずみ関係は、従来からも研究され、それを実験式にまとめているものもあるが、それが特定条件下の関係であれば、その普遍性は必ずしも十分とはいえないであろう。土の力学特性式に普遍性が必要なわけは、普遍性がなければそれだけ解の正確さをそこうだけでなく、土のような履歴依存性のある材料では、土の中で経過するかも知れない重要かつ致命的な現象の発生を見のがすかも知れないからである。また力学特性式の普遍性を高めるためには、土のもつ複雑な物性をできるだけ多く、その式の中に格納できるものであることも望まれるところである。

このような土の力学特性は、土のどこから生ずるかについて考えてみる。土はその骨格、すなわち粒子骨格を構成している物質は、いずれも大小不規則な鉱物の微粒子である。しかし構成粒子が同じ土であっても、その応力・ひずみ特性は必ずしも同一ではなく、いろいろの挙動があらわれる。また反対に、構成粒子の物質が多少相異していても、その応力・ひずみ挙動に大差がない場合もある。たとえば、鉱物の微粒子からできている通常の砂を、この微粒子に近い寸法組成のガラス片の粒子からなる集合体におきかえても、両者の組成や粒子配列状態が近似している場合には、両者の応力・ひずみ特性は非常によく似ている。しかし両者について応力・ひずみの量的関係までも詳細に測定すると、そこに粒子の物質の差を見出すことがある。故

に土のような微粒子からなる材料の特性や挙動は、これを構成する粒子自身の物性によるところも多少はあるが、それよりもむしろ土における主体をなす特性は、粒子の配列状態や外圧下における粒子の挙動に起因するものであることがわかる。すなわち土のような材料の力学特性は、この材料を構成している粒子自身の種類や物性によるよりは、むしろこの材料の構成粒子の構成状態に支配される特徴がある。

このような、構成要素自身の種類や物性によるよりは、構成要素の構成状態に支配される特性は、他の単一物質にもみられる。たとえば光の吸収とか旋光性（物質内で偏光面が回転する現象）は、分子内の原子の種類や数にはあまり関係せず、おもに分子内における原子の結合状態によって著しく影響されるといわれている。このような物質の微視的な構成状態、すなわち micro structure によって支配される外作用とその応答との関係を、一般に構成特性 (constitutive property) といい、その量的関係式を構成式 (constitutive equation) といっている。

上述の場合、土の粒子と物質の原子は、それぞれの構成体に加えられる外作用とその応答との関係に機能上の類似性をもっている。故に物質に対して用いられた構成式という言葉は土に対しても使うようにして、土の外作用に対する応答関係を土の構成式といっている。

土に与えられる外作用は、種々の温度のもとで与えられる外力や変形、またはその時間的変量であるのが通常であるから、土の構成式は、一般には stress-strain-time-temperature の関係式となり、そのパラメーターに土の物質定数や物質関数が用いられるものとなる。故に土の構成式という言葉は、前述した土の macro な力学特性式と形式的には同様なものとなるが、ただこれと異なるところは、その式が micro な内部構成を意識して、この考察の上に立ったものであることの含みをもつときに限って使われる言葉といえよう。

土の構成式は、種々の立場から解明しようとする試みが最近ようやくみられるようになってきつつあるが、まだ応力・ひずみの広い範囲にわたって統一的に示されるほどにはなっていないようである。このような状態にあるためか、土質力学の国際会議においては、次の会議には構成式の特別部会 (Specialty Session) がもたれることになった。土質力学の国際会議は、最近は 4 年ごとに開かれており、Mexico City, Moscow につづいて第 9 回の会議が 1977 年 7 月に東京で開かれることとなった。このとき初めての試みとして、構成式に関する特別部会が予定され、また、はからずもその部会の organizer に筆者が指名され、誠にその責任の重大さを感じている。なお co-organizer には、Cambridge 大学の Schofield 教授が指名されている。これを機会に構成式の一層の発展と、この構造力学への適用の進展が期待されるところである。

## 2.2 土の構成式の研究

土の構成式を解明するための方法論は、現状では、次の 2 つに大別されるようである。

(1) 第 1 の方法は、土内部の粒子の構造や挙動にはあまり深く立入らず、土の巨視的な応力・ひずみ現象の中から普遍的な関係を、土の内部状態を考慮しつつ抽出し、それを合成して土の構成式を求めようとする、いわば現象論的な方法である。

(2) 第 2 の方法は、土の粒子レベルの微視的な内部機構を解析して、それにもとづいた micro な局所特性を求め、その累積として土の macro な構成式を誘導しようとする、いわば物性論的な考察による方法である。

第 1 の方法では、弾性理論や塑性理論またはエネルギー理論などすでに体系化された既成理論を導入する余地が多く、また普遍性のある実験結果をその一部に入れることもできる利点がある。この方法に属する研究の代表的なものは、後に詳述する Cambridge 学派といわれる 1963 年に Roscoe および Schofield らによって提出された理論がある。

第 2 の方法では、今までに土のような形・大きさ・配列の不規則な摩擦性微粒子からなる材料の構成式を求める力学体系がなかったので、土の構成式を求めようとする、まず土に適した解析の手法から新たに案出していかねばならない困難がある。しかしもしこの困難をのり切れれば、粒子レベルの微視的考察を基本とするものだけに、土粒子間の内部機構の本質により多く近づきうる可能性があるように思われる。そのため筆者の立場としては、この第 2 の方法によることとした。その考え方を弾性状態にある砂に適用した試み

は、1962年に日本材料試験協会（現在の材料学会）の土質材料の力学に関する講演会でのべたが、それを発展させ、線型粘弾性状態の粘土と弾性状態の砂に適用した例を、1964年にフランスにおける土のレオロジーのシンポジウムに発表し、さらに塑性および破壊状態への拡張を1969年のメキシコにおける第7回土質力学国際会議に提出した<sup>8)</sup>。これらはまだ荒削りのものであるため、その後も改良を行ない体系化をはかっているが、その一部として砂の応力・ひずみ特性の解析を後にのべる予定である。

このような粒子の形・大きさ・配列の不規則性を考慮して、土の構成式を求めようとする試みはこの研究を始めた頃にはみられなかったが、粒子レベルの微視的考察によって砂の強度またはダイラタンシー特性を解析しようとした研究としては、次のものが挙げられる。

1957年には Newland と Allely<sup>9)</sup> は、砂粒子はせん断時には粒子どうしの接触面をいわゆる摩擦斜面として滑動するとして、砂のせん断強度と残留強度（せん断破壊後あらわれる定常せん断状態のときの強度）のちがいを、粒子接点の移動時における摩擦斜面の傾斜角の差異から説明しようとした。

1962年に Rowe<sup>10)</sup> は、等大径の丸棒または等大径の球が、規則配列している集合体を想定し、その主応力比とダイラタンシーの関係などを求めた。すなわち、粒子どうしの接触面の傾斜角や粒子間摩擦のほかに、粒子の幾何学的配列を示す係数を加えて、粒子間の力のつり合いから、この集合体の構成特性の一部であるせん断応力・ダイラタンシー特性を求めた。さらに不規則な粒子配列の場合に対しては、粒子間のすべりによって生ずる内部仕事量が最小になるように、粒子どうしの接触面が再配列されるとして、規則配列について求めた関係を拡張した。

わが国では、1965年および1969年に最上教授<sup>11)</sup>が、砂の粒子状態を示すのに確率論的な手法を導入して砂の力学特性を求めた。すなわち、砂の力学特性を支配するものは、砂の間げき比とその分布であるとして、砂の間げき比を確率変量とする体系と考え、このような状態確率をもつ体系において、外部仕事が内部エントロピーの生成になるときを砂の降伏条件として破壊時における力学特性を求め、またエントロピーの推移に対応する砂の状態変化を考察した。

以上のうち、Newland と Allely や Rowe の研究結果には、実際の砂の特性と十分に一致しないところがあるが、その理由として考えられることは、実際の砂にみられるような粒子構成における不規則性が、十分導入されていないためと思われる。

微視的立場に立って土の構成式を求めようとする試みは、その後（1970, 1971, 1973年）に松岡助教授<sup>12)</sup>が、さきに筆者が確率変量に採用した内部摩擦の最大稼働面に対する粒子接面の方向角や粒子間力を、各種径の丸棒を混合した集合体や、その他の粒子からなる試料をせん断変形させた状態で実測し、その実測結果を基礎にして砂の応力・ひずみ特性を誘導した。これは粒子レベルでの微視的実測をもとにした一つの構成式であって、砂が塑性状態にある場合に対しては、実験事実をかなりよく説明することができた。

このように土の構成式を、応力・ひずみの広い範囲にわたって理論的に求めようとした研究はきわめて少ない。

つぎに第1の方法の代表的な研究としてさきに紹介した Cambridge 学派の理論すなわち Cambridge Original Energy Theory の基本的な考え方をのべておく。

Cambridge Original Energy Theory は1963年に K. H. Roscoe, A. N. Schofield and A. Thurairajah<sup>13)</sup>により原形が提案された。これは原理的には正規圧密粘土に対してのみ成り立つ理論であったが、その後1968年に A. N. Schofield and P. C. Wroth<sup>14)</sup>により理論的に体系化され、過圧密粘土や砂質土に対しても適用可能なものになった。この理論は Hvorslev によって提案された  $e$ - $\tau$ - $\sigma'$  空間上 ( $e$ : 間げき比,  $\tau$ : せん断応力,  $\sigma'$ : 有効垂直応力) で粘土の力学的挙動を説明しようとする考え方を破壊時だけでなく変形の全過程に対して拡張した1958年の K. H. Roscoe, A. N. Schofield and P. C. Wroth の研究<sup>15)</sup>を定量的に表現し、さらに1951年に D. C. Drucker により提案された normality の考え方を適用して土の応力-ひずみ関係を導いたものである。

この理論は、土をひずみ硬化またはひずみ軟化をともなして塑性的に変形する弾塑性材料としてとりあつ

かったもので、時間要素を入れていないため、その適用範囲は無限に小さな変形速さで変形する場合、すなわちたとえばクリープ終了時のような場合に対してだけに限られる。後述のような理論上の仮定から求められた state boundary surface (状態曲面) と呼ばれる  $e$ - $q$ - $p$  空間内の曲面 ( $e$ : 間げき比,  $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ ,  $p = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)$ ) の内部に  $e$ - $q$ - $p$  で定義される点 (state point) がくるときその土は弾性的であるとし、state boundary surface 上にその点がある場合、土は弾塑性状態にあると約束しており、state boundary surface の外側に state point がくことはありえないとしている。土の等方圧縮過程では主応力差  $q$  が常にゼロであるから、上述の約束は  $e$ - $p$  の 2 次元空間で考えることとなる。等方圧縮については state boundary surface と  $e$ - $p$  平面との交線は、従来の実験結果から知られている処女圧密曲線に相当するから、すべての膨潤曲線は処女圧密曲線の左側 ( $p$  の低い側) にある。ゆえにこの理論では、膨潤曲線の部分は弾性状態にある土を示し、正規圧密状態すなわち処女圧密曲線上に state point があるときには非回復な体積変化を持つ弾塑性状態を示す。さらに処女圧密曲線の右側に state point が存在することはできない。このようにして state boundary surface は処女圧密曲線を含む  $e$ - $q$ - $p$  空間上の曲面であることが知られる。

等方圧縮された後さらに過圧密にされた土は膨潤曲線上にあり、上述の約束では弾性状態にあることになる。このような土に  $q$  を加えてせん断すると、state point は膨潤曲線から出発して  $e$ - $q$ - $p$  空間内に一つの軌跡を描くことになるが、この理論では state point が state boundary surface にぶつかるまでは、すなわち弾性範囲内では土の弾性的な体積変化は  $p$  の増減だけによってきまり  $q$  の変化の影響をうけないと仮定している。この仮定はこの理論の最も非現実的な仮定であり、実験データとの不一致の最大の原因であるが、その修正は未だだれも提案していない。前述したように等方圧縮過程での土の弾性的な成分は膨潤曲線の特徴によって表わされ、さらに土の  $e$  の変化のうち回復可能な弾性成分が主応力差  $q$  によらないという仮定を用いると、state boundary surface 内の state point はすべて膨潤曲線を含み、しかも  $q$  に無関係な曲面上に拘束されなければならないことになる。このような条件の曲面は  $e$ - $p$  平面に垂直に立つ曲面であって、この曲面を elastic wall と呼んでいる。一方膨潤曲線はその土が過去にうけた先行圧密荷重によって  $e$ - $p$  平面上に無限に描くことができる。したがってその膨潤曲線上に直立する elastic wall もその土のうけた先行圧密荷重によって無限に層状に存在することになる。

膨潤曲線上にある過圧密土 (正規圧密土は  $O.C.R. = 1$  の過圧密土といえるのでここでは広義に過圧密土と呼ぶことにする) に主応力差  $q$  を加え、さらに平均主応力  $p$  を増減させると state point は elastic wall 上をはいのぼって行き、ついに state boundary surface に到達する。ここに到達した後は elastic wall から state boundary surface にのりかえ、さらに state boundary surface 上を動いて最終的には破壊 (critical state) に達する。したがって elastic wall と state boundary surface とが交わる場所がその土の弾性限界になるわけである。この弾性限界は  $e, q, p$  の関数である state boundary surface を示す式と  $e, p$  の関数である elastic wall を示す式とから  $e$  を消去して得られる  $p$  と  $q$  だけの関数を含む式となり、この式を initial yield condition in the stress space いわゆる yield function といい、この関数で示される曲面を yield surface (降伏曲面) という。ゆえに弾性限界を与える降伏曲面はその土のうけた先行圧密荷重によって変化することになる。

さらに state boundary surface は破壊状態も含まなければならない。破壊条件は実験結果によれば、正規圧密粘土では破壊包絡線として  $q$ - $p$  平面上では原点を通り  $p$  軸と  $M$  の傾き ( $\tan \phi'$  に対応する) をなす直線となりこれを critical state line といっている。

Cambridge Original Energy Theory では上述の理論体系を背景にしているが、さらに yield function の決定とひずみの式の誘導のため次の消散エネルギーの仮定と降伏曲面に対する associate flow rule 成立の仮定を用いている。

state boundary surface では、土は弾塑性体として扱われるから、非回復な変形を生じることに消費される非負の消散エネルギーが存在するはずである。いま簡単のため、 $\sigma'_2 = \sigma'_3$  の三軸圧縮を想定した場合には、このときの外圧  $p, q$  は  $p = (\sigma'_1 + 2\sigma'_3)/3$ ,  $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ 、また  $p, q$  による塑性ひずみ成分については添字  $p$  をつ

けて体積ひずみの増分を  $dv^p$  ( $dv^p = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3$ ), 主ひずみの偏差成分の増分を  $d\varepsilon^p$  ( $d\varepsilon^p = (2/3) \cdot (d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)$ ), 一方これら塑性ひずみ増分のために消費された消散エネルギーの増分を  $dw$  とすると, 一般に

$$dw = p \cdot dv^p + q \cdot d\varepsilon^p \quad (1)$$

この理論では, 第一の仮定である消散エネルギーの仮定として,  $dw$  を次式のようなみかけ上  $dv^p$  の項をもたない式によって示されるものとする。

$$dw = M \cdot p \cdot d\varepsilon^p \quad (2)$$

ここに  $M$  は上述したように critical state line の  $p$  軸に対する傾きである。式(1), (2)より

$$\frac{dv^p}{d\varepsilon^p} = M - \frac{q}{p} \quad (3)$$

第二の Drucker が提示した associate flow rule の仮定では, 弾塑性体の載荷過程に対して, 降伏関数がそのまま塑性ポテンシャルになるので降伏曲面と塑性ひずみ増分の間には直交性 (normality) の関係が成立する。normality の考え方によれば, 主応力方向と主ひずみ増分方向が一致しているとき, すなわち降伏曲面上の一点が示す応力  $p, q$  の方向がそれぞれの応力によって生ずる  $dv^p, d\varepsilon^p$  の方向と一致しているとき,  $p, q$  によって生じる塑性ひずみ増分の方法は, 降伏曲面上の点  $(p, q)$  における法線の方向に一致する。降伏曲面上の点  $(p, q)$  における接線の方向は  $dq/dp$  であるから, 塑性ひずみの増分の方法  $d\varepsilon^p/dv^p$  は次式であらわされることとなる。

$$\frac{dq}{dp} = - \frac{dv^p}{d\varepsilon^p} \quad (4)$$

式(3), (4)より

$$\frac{dq}{dp} = - \left( M - \frac{q}{p} \right) \quad (5)$$

これを積分して  $q=0$  において  $p=p_v$  とおけば, 降伏関数は次式となる。

$$f \equiv p \cdot \exp\{q/(M \cdot p)\} = p_v \quad (6)$$

一方積分常数  $p_v$  は圧密実験によって, 間げき比  $e$  との間に次の関係があることが知られている。初期値を  $p_{v0}, e_0$  とすれば

$$\frac{e_0 - e}{1 + e_0} = (\lambda - \kappa) \cdot \ln(p_v/p_{v0}), \quad (\lambda: \text{圧縮指数}, \kappa: \text{膨潤指数}) \quad (7)$$

上式を微分して,  $-de/(1+e_0) = dv^p$  とおけば

$$dv^p = (\lambda - \kappa) \frac{dp_v}{p_v} \quad (8)$$

式(6)から明らかなように,  $p_v$  が増大すると左辺で示される降伏曲面も膨張する。一方外力の載荷によって生じる  $dv^p$  は式(6)の関数  $f$  の  $p$  による偏微分によって知られるが, この  $dv^p$  によって  $p_v$  も式(8)の示すように同時に増加する。ゆえに  $p_v$  は土のひずみ硬化を示すパラメータとしての意味をもつこととなる。なお式(6)に normality の関係を適用すれば, 前述のように応力と塑性ひずみ増分の関係が求められる。

以上でこの理論の概要をのべたが, ここで仮想した土は前述のように現実と相異なる弾塑性材料を対象としている。特に砂の場合は, 弾性範囲における  $p$  による体積変化も無視している。そのためこれら仮想材料を, 砂については Granta gravel, 粘土については Cam clay といって現実の砂や粘土と区別することがある。

いずれにしてもこの理論では、土のダイラタンシーは弾性状態にある場合は無視されていて、塑性状態の場合のひずみについてのみ考慮されていることとなる。

また塑性ひずみにおいては回復可能な弾性成分は  $q$  によらないとしているから、偏差応力を除荷しても回復ひずみが発生せず、偏差応力を載荷したことによって生じたひずみは全部永久ひずみとなって残留してしまう。そのためこの理論は、くり返し載荷の場合には適用できず、応力の単調増加の場合だけに限られる。そのためこの理論は除荷は対象にしていない。その上ここで仮想した材料は弾塑性材料であるから、前述のように、理論の適用範囲は、応力・ひずみが平衡に達している状態すなわち無限に小さい速さで変形する場合に限定されることとなる。

以上は Cambridge 学派の作った基礎理論の原論について概述し、またその中に含まれるいくつかの十分な点についても言及したが、土の構形式の考え方の全くなかった時に state boundary surface, elastic wall などの新たな概念からなる体系を想定し、それにもとづく解析を進めるという手法を開発したことは誠に立派な仕事であるといえよう。およそ学問は、真理の大綱をそなえた新たな手法が創造されたとき、それをもとにして新たな境地に大きな飛躍をするものである。新たな手法が、真理の大綱にそむくものでない限り、当初にいくつかの本質との小異があっても、今後の改良によってより精度のある体系に改めることができるであろう。

この理論も原論が提示されてから後、内外の多くの研究者によって原論の改良や拡大が行われつつある。たとえば筆者の周囲をみただけでも、足立紀尚助教授は粘弾塑性への拡張を、太田秀樹助教授は適用条件の一般化を、関口秀雄助手は時間要素の導入を行ないそれぞれ成果をあげている。

一方、第二の方法として筆者の開発した方法は、Cambridge 学派の原論の発表よりやや早いためにその構想はこれと全く異り、土の微視的機構に対する一つの物性論的な概念の設定とそれをもとにした統計力学的な解析手法によるものである。この研究の対象としている土は通常の砂や粘土であって特別に現実から離れるような条件はつけていない。外力条件については、土の変形特性のうち、平均有効主応力  $\sigma_m$  による変形特性は前述のようにかなり普遍的な実験結果がすでに知られているので、とりあえず従来未知の偏差応力による変形特性をまず解くようにしている。その際  $\sigma_m$  による変形成分が入ることを避けるため、 $\sigma_m$  一定のもとに偏差応力を与える場合を扱い、この応力条件下のせん断ひずみとダイラタンシーによる体積ひずみとを、土が弾性および塑性さらに破壊の各状態にある場合に対して求めようとするものである。また外圧は載荷だけでなく除荷の場合も扱うことができるので、くり返し荷重についても各過程のひずみ特性が求められる。

### 3. 砂の応力・ひずみ特性の解析

#### 3.1 解の条件と方針

砂を、「形・大きさ・配列の不規則な摩擦法則に従う固体粒子の集合体すなわち不規則な摩擦性粒子の random assembly」とし、これを前提条件として、砂が偏差応力をうけたときの応力・ひずみ特性を理論的に解こうとするものである。上記の前提には粒子の材料についての規定がないから砂以外の微粒子も解の対象になれるが、粒子自身が外圧によって破碎や磨耗する場合はここでは扱わない。また砂は、その変形に過剰間けき圧が影響しないことを想定して、排水状態にある飽和砂または乾燥砂を対象とする。

解に対する力学条件は、水平両軸の側圧が等しい三軸圧縮を想定するが、ひずみ特性の中に平均有効主応力  $\sigma_m$  の変動の影響が入らないように、 $\sigma_m$  は載荷時のみならず除荷時にもつねに一定に保っているものとする。

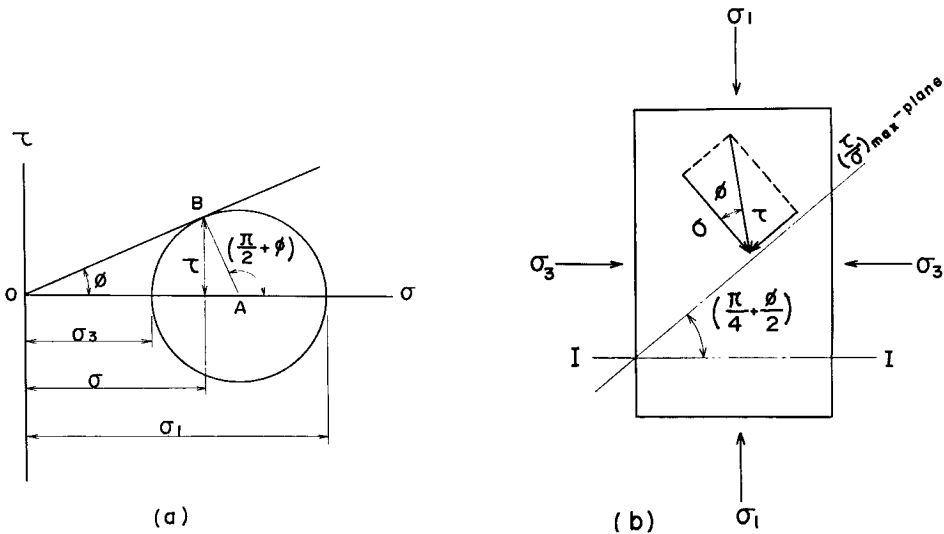
この解析では、砂粒子の微視的特性を解析し、その累積として砂の巨視的特性を誘導する方針である。微視的特性の解析には、粒子の状態や挙動に不規則性が入るので、統計学的あるいは統計力学的な手法を導入することにしたが、その取扱のため重要であり、苦心を要した点の第一は、粒子状態を評価するために用いる基準面とその評価を表示する確率変量の選定であった。これに対しては以下に定義する粒子の最大稼働面(plane of maximum mobilization)を基準面に採用し、この面に対してはかった粒子間力の方向角(direction

angle of inter-particle force) と接点方向角 (direction angle of sliding surface) を確率変数に選ぶことにした。

ついでこれらの確率変数の推移を粒子挙動に結びつけ微視的現象を解析するため、第二の苦心を要した点は、粒子挙動の背景となる粒子骨格の形態と機構の設定であった。この設定には新たな概念を用いたので、それに関する従来の知見はなく、またその設定の参考となる微視的現象を観測できるような実験的方法もまだ開発されていないため、この解析では、砂の規定に用いた前記の前提条件より出発して、演繹的な考察によって粒子骨格のパターンと機構を設定することとした。なおここでは微視的現象の解明に微視的レベルの実験を用いなかったが、それは現在考えられるような実験方法では、十分に測定できないような微視的現象があるためであって、微視的レベルの実験が不用であるという意味ではない。むしろそのための新しい実験方法を今後開発していかなければならないと考えているものである。

上述の粒子の最大稼働面と2つの確率変数についてのべる。最大稼働面は、砂に作用する有効主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  (ここでは  $\sigma_2 = \sigma_3$ ,  $\sigma_m = \text{一定}$ ) に変動が生じたとき、砂中のせん断応力の変動によって粒子の稼働 (相対移動, mobilization) が最も活発化する方向の面である。この面は、その面への有効垂直応力  $\sigma$  とその面のせん断応力  $\tau$  とが  $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$  を、したがって  $(\tau/\sigma)$  を最大にする方向の面であるから、この面を以下には  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面と略記する。この面にそっては砂の内部摩擦角の稼働も最大となり、このとき稼働された内部摩擦角を稼働内部摩擦角 (mobilized internal frictional angle) と称し、角  $\phi$  で記す。

角  $\phi$  は、 $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  (ただし  $\sigma_1 > \sigma_3$ ) に対して画いた図-1(a) の Mohr の応力円において、この円への原点からの切線が  $\sigma$ -軸となす角で与えられ、したがって  $\phi = \tan^{-1}(\tau/\sigma)$  となる。また  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面は、図-1(b)



図—1

に示すように、最大主応力面 I-I と  $\{(\pi/4) + (\phi/2)\}$  の傾きをなす面である。 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面は2有効主応力によって1面が決定されるから、三軸圧縮では3面が決定される。 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって集結している粒子個々に作用する粒子間力の大きさ、方向および粒子が滑動する方向は粒子ごとに区々である。図-2のようにある粒子に作用する粒子間力の  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に対する角を粒子間力の方向角  $\beta_i$  (添字 i は individual particle の意)、粒子が粒子間力によって隣接粒子表面を滑動する場合に摩擦斜面となる面 (図中の滑動接点 A が接する面) の  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面となす角を接点方向角  $\theta_i$  と称する。 $\beta_i$ ,  $\theta_i$  は粒子ごとで異なり一定ではない。また粒子間摩擦角も粒子ごとに異なり、これを  $\delta_i$  とすると、 $(\theta_i + \delta_i)$  は粒子の滑動に対する抵抗角とな

るから、滑動抵抗角ということにする。なお  $\delta_i$  の粒子ごとの不同を留意して  $(\theta_i + \delta_i)$  を確率変量とする扱いもできるが、 $\delta_i$  の不同はさほど大きくないから、ここでは便宜上各粒子間の  $\delta_i$  は全粒子の  $\delta_i$  の平均値  $\bar{\delta}$  に等しいと近似して扱う。いま  $\beta_i = x_1$ ,  $\theta_i + \bar{\delta} = x_2$  と書きかえ、 $x_1, x_2$  を確率変量にしてそれらの分布例を示せば、それぞれ図-3の曲線-1、-2となる。 $x_1$ -群と  $x_2$ -群はそれぞれ  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に作用する外力  $(\tau/\sigma)$  とこれに対する滑動抵抗に相当する。

$(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の粒子に滑動が生起する条件は、

$$x_2 - x_1 = y \leq 0 \quad (1)$$

であるから、上記の2曲線を1組とする図は、単に砂の粒子状態を示すだけでなく、この図に統計力学的な考察を加えることにより、粒子の滑動やひいては砂の変形特性を誘導することができる。ゆえにこの図は粒子の滑動に対する砂の統計力学モデルといえよう。

### 3.2 粒子間力

砂の粒径分布や粒子配列が均質・等方であり、また粒子が硬く、粒子間力によって粒子に生じる変形が粒子間力の分布に影響しなければ、多数粒子からなる集団においては粒子間力の大きさ、方向はそれら粒子間力の合力の左右に均等な分布をしていると考えるのが自然である。

いま粒子間力  $f_i$  を図-2のように、 $\sigma$  に起因する力  $f_{ni}$  と、 $\tau$  に起因する力  $f_{si}$  とに分解する。 $f_{ni}, f_{si}$  は粒子ごとで大きさ、方向は異なるが、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上の単位面積中にある  $N$  個の粒子に対して  $f_{ni}$  と  $f_{si}$  のそれぞれの合力は、 $N$  が十分大きければ、それぞれ  $\sigma, \tau$  と大きさ、方向とも一致するはずである。それぞれの合力を  $N$  で除した力 (平均値)  $f_n, f_s$  はそれぞれ  $\sigma, \tau$  と方向を同じくし、それぞれ  $\sigma, \tau$  の  $1/N$  の大きさとなる。また  $f_{ni}$  と  $f_{si}$  の合力  $f_i$  の大きさ、方向は  $f_n$  と  $f_s$  の合力  $f$  の左右に均等な確率で分布するとみて差支えないから、個々の  $f_i$  の方向角  $\beta_i$  の平均値  $\beta$  は、 $f$  が  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の法線となす角に等しくなる。ゆえに

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{f_s}{f_n} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\tau}{\sigma} \right)_{\max} = \phi \quad (2)$$

前述のことから  $f_i$  の方向角  $\beta_i$  の確率分布には種々の関数が考えられるが、ここでは計算の便宜上、両側有限ではないが、近似的に次式の正規確率関数で示されると仮定する。

$$\left. \begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\rho_1} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\rho_1^2} \right\} \equiv N(m_1, \rho_1^2) \\ \text{ここに} \quad x_1 &= \beta_i, \quad m_1 = \beta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

なお  $N(\quad)$  は正規確率関数を示し、 $\rho_1$  は  $x_1$  の標準偏差である。また  $f(x_1)$  は図-3の曲線-1に相当する。

標準偏差  $\rho_1$  はここで導入した新しい量であるから、その特性についての従来の知見はみられない。 $\rho_1$  は、砂が一定であっても粒子配列、したがって平均有効主応力  $\sigma_m$  や弾性限界 (後出) などによって変化するかも知れないと懸念されたので、 $\sigma_m$  = 一定、偏差応力 = 一定のくり返し載荷によって弾性状態にした砂について、加圧時の弾性係数を通して  $\sigma_m$  や偏差応力の種々の値が  $\rho_1$  におよぼす影響を調べた。その結果  $\sigma_m$  が一定であれば今のところ弾性限界による著しい影響はみとめられなかった。ゆえにここではとりあえず暫定的に、 $\rho_1$  は砂の材料とそれを拘束する  $\sigma_m$  が一定であれば、その砂の弾性限界の大きさには影響されず

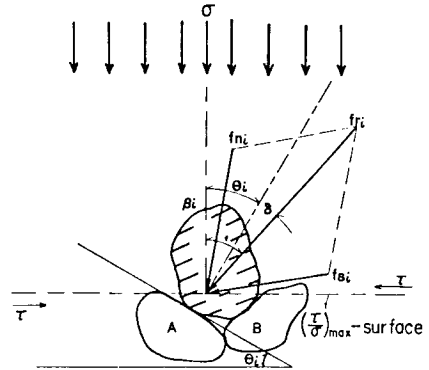


図-2

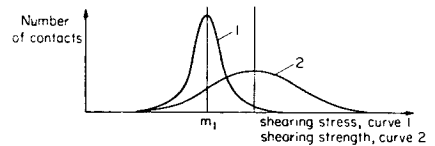


図-3

一定であるとしておく。すなわち

$$\rho_1 = \text{const.} \quad (\text{if } \sigma_m = \text{const.}) \quad (4)$$

$m_1$  は図-3の曲線-1の中央値であり、外圧の大きさを代表するものである。 $m_1$  の代りに  $\tan m_1$  を  $z$  と記し、 $z$  と外圧  $\sigma_1, \sigma_3$  との関係を式(2)および図-1の Mohr の応力円を用いて求めると、 $\sigma_1 > \sigma_3$  の場合に対しては

$$z \equiv \tan m_1 (= \tan \beta) = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_3}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} \right) \quad (5)$$

### 3.3 粒子構造の機構と外圧下の粒子挙動

砂に外圧を載荷すると、式(1)の条件にある滑動接点をもつ粒子は隣接粒子表面を摩擦斜面として滑動 (slide) するが、この条件以外の粒子は原位置にとどまり不動である。滑動した粒子の滑動後の挙動には次の2つの型が発生することが考えられる。

第一の型は、滑動粒子が斜面の途中で周囲にある粒子構造の壁に阻止されて、そこで停止してしまう場合である。この壁を potential 障壁と仮称する。

第二の型は、滑動粒子に作用していた粒子間力の滑動抵抗以上の余力が potential 障壁の強さより大きいときで、滑動粒子は potential 障壁を分解 (disintegrate) して障壁の領域内に押入る場合である。粒子がこのような potential 障壁を越える現象を活性化 (activation) と仮称する。これらの仮称は、他材料の極微粒子の挙動などに用いられる用語であるが、ここでは砂粒子の挙動の類似性を説明する便宜上用いることとした。通例 potential 障壁とは、極微粒子の移動経路にある potential の場の極値をいっているが、砂粒子の場合は、これに相当するような隣接粒子斜面の幾何学的な頂点を指すものとは必ずしも考えていない。砂粒子の場合の potential 障壁は、周囲に拘束圧をもつ粒子群を、粒子自体の性状とそれら粒子の構成状態とを变量とする状態確率をもつ体系とみたとき、その体系すなわちその粒子群が、そのとき保有している粒子構成状態を不可逆な状態に分解させられることに抵抗する体系の構造的強度 (または体系のもつ potential) と考えている。

砂粒子の挙動は砂の変形特性に反映するから、種々の巨視的性状を示す状態があらわれる。

#### (a) 弾性状態にある砂

第一の型の粒子は外圧を除荷すると、次式の条件にある滑動接点をもつ粒子は、停止位置から原斜面を降下して最初の位置に復帰する。

$$\beta_i + \delta < \theta_i \quad (6)$$

偏差応力の載荷によって隣接斜面を滑動した粒子が、この応力を除荷することによってすべて原斜面を降下して原位置に復帰するような粒子状態 (すなわち同一摩擦斜面を往復する粒子のみから構成されている粒子状態) にあるとき、この状態を弾性状態 (elastic state) という。弾性状態にある砂では、偏差応力の載荷、除荷によって接点方向角の確率分布は、粒子に破砕などの形状変化がない限り、変化しないから、砂の統計力学モデルからみた砂の弾性状態は、このモデルにおける  $x_1$  と  $x_2$  の両分布がそれぞれ独立で互いに無関係の場合の状態と定義することができる。

粒子の挙動は砂の巨視的な変形特性にも反映し、弾性状態にある砂では、砂に載荷と除荷の往復過程を与えたとき、除荷時に残留ひずみ (永久ひずみ) が発生しない状態となる。このような載荷と除荷の過程にみられる応力・ひずみ曲線の固定した hysteresis loop の発生や、砂のみかけの弾性係数が、砂粒子自身の弾性係数に比して非常に小さいこと理由は、上述の粒子挙動から理解されよう。なお砂の弾性状態では、加圧時と減圧時の応力・ひずみ曲線は一般に一致しないから、砂の弾性は Hooke の法則を満足するような真の弾性ではない。

弾性状態にある砂に、 $\sigma_m$  をそのまま保持しつつ偏差応力を増大すると、ある応力限度に達すると粒子の

活性化が生じる。この限度の偏差応力または応力比  $\alpha$  を弾性限界 (elastic limit) といひ、応力比で示した弾性限界の値を  $s_{el}$  であらわす。弾性限界の存在することは、potential 障壁が砂の粒子構造の形態をもって砂中に形成されるからであると考え、弾性限界値は、個々の粒子に対する potential 障壁の高さ (強さ) の平均値に相当することとなる。

(b) 塑性状態にある砂

外圧が弾性限界を超過すると、粒子間力の中にはその滑動抵抗以上の余力が potential 障壁の強さを超過するものが発生するので、活性化する粒子があらわれる。その際活性化しない粒子を弾性挙動粒子と称する。弾性挙動粒子は活性化していないから、弾性挙動粒子群中の相互の粒子状態や接点方向角の分布は、当初この砂が弾性状態にあったときのままの状態を保有しているはずである。ゆえに弾性状態にある砂の粒子もまた弾性挙動粒子といふことができる。

活性化現象は粒子構造の局部的な降伏であるから、活性化した粒子群が支持できる粒子間力の一粒子当りの平均の大きさは、potential 障壁の強さの平均値となる。ゆえに活性化粒子群が支持できる外圧は、この粒子群が弾性限界にあったとき支持していた外圧の分担分だけとなり、以外外圧は弾性挙動粒子に転嫁される。そのため弾性挙動粒子には上述したような、この粒子群への外圧転嫁前の一次的な滑動とその滑動粒子の活性化につづいて、二次的な滑動と活性化が発生する。弾性挙動粒子群が活性化粒子からの転嫁によって増大された粒子間力のもとでも、二次的な弾性挙動粒子群の活性化が有限の限度で終息してそのまま安定状態を保つとき、この状態を塑性状態 (plastic state) といふ。塑性状態にある砂の  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面において、単位面積中にある全粒子数を  $N$ 、活性化粒子数を  $N_p$ 、弾性挙動粒子数を  $N_e$  とすると、

$$N_e + N_p = N \quad (7)$$

活性化した粒子は摩擦斜面から potential 障壁を越えて障壁領域に入るから、偏差応力を除荷しても、原斜面を下降して原位置に復帰することはできない。ゆえに砂には除荷時残留ひずみが発生する。そのため砂の巨視的状态からみた塑性状態は、砂に偏差応力を載荷すると有限のひずみが生じ、この外圧を除荷すると残留ひずみが発生する状態と定義することができる。また砂を塑性状態に保つことのできる最大の偏差応力または応力比  $\alpha$  を破壊強度といふ。

弾性挙動粒子に二次的な滑動があると、それに連れられてそれまでに活性化した粒子はさらに移動するが、その過程の間により安定な接点方向角をとるように配向 (orientation) が促進される。図-4 は、弾性挙動粒

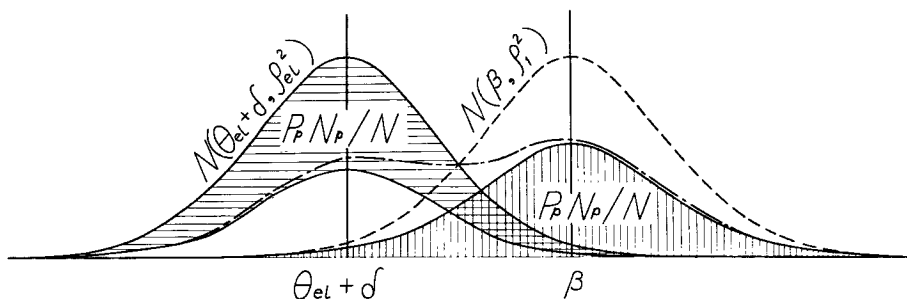


図-4

子が安定した時点で、活性化した  $N_p$  個の粒子のうち  $P_p \cdot N_p$  個 ( $P_p$ : 活性化粒子の安定化確率) が載荷応力による粒子間力に耐える方向に配向を終えた状態である。ゆえに塑性状態では、砂の統計力学モデルの  $x_1, x_2$  は弾性状態の場合と異なり無相関ではない。粒子はこのような配向すると以前より大きな接点方向角をもち、それだけ強固な構造になるから、砂のひずみ硬化 (strain hardening) の理由を上述の機構によって

説明することができる。

さらに一定の破壊強度以下の偏差応力をくり返し载荷すれば、ついに全粒子がその応力に耐える方向に配向するから、一定応力のくり返し载荷によって、その応力に耐える弾性限界値をもつ砂の弾性状態が得られる。図-5はこの一実験例であって、砂を排水三軸状態におき  $\sigma_m = 4.0 \text{ kg/cm}^2$  の一定値のもとで偏差応力を  $0 \sim 4.5 \text{ kg/cm}^2$  の範囲にくり返し载荷して、くり返し回数が23回に達したとき残留ひずみがほとんど認められなくなりほぼ弾性状態に達していく過程を示している。

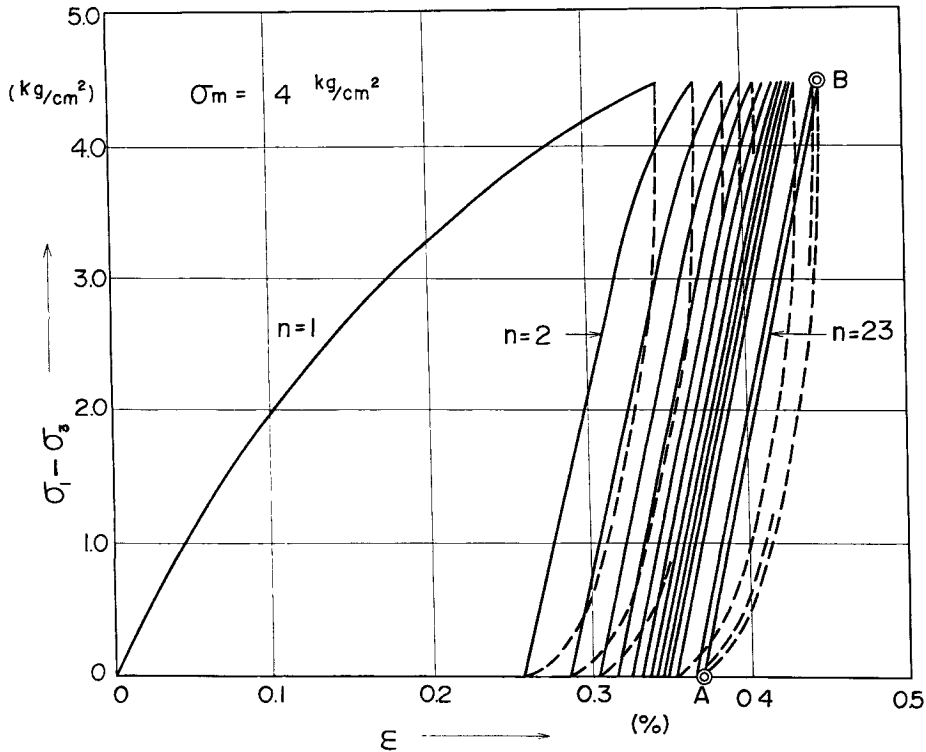


図-5

#### (c) 破壊状態にある砂

外圧が破壊強度に達すると、弾性挙動粒子群に生ずる二次的な活性化が終息せず、その外圧が存在する限り、際限なく続発するようになる。この状態を破壊状態 (failure state) という。ゆえに破壊強度はこの状態が発生し始めるときの最小の偏差応力または応力比ということもできる。破壊状態では弾性挙動粒子が外圧のために分解されて、弾性挙動粒子としてその粒子間力に耐えられなくなる結果であるから、外圧をそのときの粒子の支持力限度にまで低下させればそのままの状態で安定が得られる。砂の巨視的変形からみた破壊状態は、ひずみとその偏差応力の作用下では際限なく増大しようとする状態といえる。この状態をつづければ砂は遂に破壊するにいたる。

#### 3.4 粒子の接点方向角

砂は材料が一定であっても、各種の締め固めを与えることができるから、粒子の滑動抵抗角はそれぞれの締め固めに応じた分布形態をとることができる。

砂を一定の  $\sigma_m$  のもとで、一定の偏差応力のくり返し载荷によって弾性状態にした砂の滑動抵抗角  $x_2$  の確率分布  $\varphi(x_2)$  は、このとき与えた最大荷重による粒子間力の方向角の確率分布  $f(x_1)$  に一致する。 $f(x_1)$

が式(3)で示されるときは、 $\varphi(x_2)$ は

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho_2} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - m_2)^2}{2\rho_2^2} \right\} \equiv N(m_2, \rho_2^2) \\ m_2 &= m_1, \quad \rho_2 = \rho_1, \quad x_2 = (\theta_i + \delta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

このようにして弾性状態にした砂の弾性限界  $s_{el}$  は、載荷した最大偏差応力 (応力比  $z$ ) に等しくなるから、

$$s_{el} = \tan m_1 = \tan m_2 \quad (9)$$

$\varphi(x_2)$  の分布は実測することが可能であるから、 $\varphi(x_2)$  を測ることによって測定 of 困難な  $f(x_1)$  したがって  $\rho_1$  の分布特性などを実測することができよう。

また上記とは別に砂が 1 回限りの載荷をうけて活性化粒子が発生し新たな配向を得たとき、新たな配向を得た粒子群の滑動抵抗角の分布は、 $f(x_1)$  の確率分布の縦距を一定比率で縮小したものになると近似される。ゆえに過去に載荷をうけた土に新たな載荷をすると、過去の外圧のための配向の履歴はその後の外圧の載荷によって一部は消滅するがなおいくらかは残存する。いま第  $k$  回目の載荷により配向して得た接点方向角の第  $n$  回目の載荷後 (ただし  $n > k$ ) になお残存しているものを  $\theta_{ik}$  と記し、単位面積中の全粒子数  $N$  のうちこの分布に属する粒子数を  $N_k (= \alpha_k \cdot N)$  とする。またこの  $N_k$  個の粒子群の滑動抵抗角 ( $\theta_{ik} + \delta$ ) を  $x_{2k}$  と記し、この変数の確率分布関数、平均値および標準偏差をそれぞれ  $\alpha_k \cdot \varphi_k(x_{2k})$ ,  $m_{2k}$ ,  $\rho_{2k}$  とすると、この砂全体の滑動抵抗角の分布  $\varphi(x_2)$  は、各回の載荷による滑動抵抗角の第  $n$  回の載荷後の残存分の総和として次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_2) &= \sum_{k=1}^n \left\{ \alpha_k \cdot \varphi_k(x_{2k}) \right\} \\ \sum_{k=1}^n \alpha_k &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \cdots + \alpha_n = 1 \\ \varphi_k(x_{2k}) &= N(m_{2k}, \rho_{2k}^2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ゆえに  $\varphi(x_2)$  は先行載荷の影響をうけるものであり、その分布は一般には粒子間力の方向角分布のような対称分布にはならず、通常非対称になる。またもし砂の締固めに用いられた先行の偏差応力がつねに同一の  $\sigma_m$  のもとで与えられた場合には、式(4)の関係が成立するとみられるから、先行の外圧による粒子間力の方向角分布は  $N(m_{1k}, \rho_1^2)$  で示され、式(10)の  $\rho_{2k}$  はいずれも  $\rho_1$  に等しくなる。

$$\rho_{2k} = \rho_1 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

### 3.5 弾性状態にある砂粒子の滑動

#### (a) 粒子の滑動確率

弾性状態にある砂の粒子間力の方向角  $x_1$  および粒子の滑動抵抗角  $x_2$  の確率分布は、前述のように外圧と砂が与えられれば一義的に決定し、かつ  $x_1, x_2$  は互いに独立で無相関である。また  $x_1$  の標準偏差  $\rho_1$  は、 $\sigma_m$  が一定であれば、偏差応力の大きさに無関係に一定とみられる。ゆえに  $x_1, x_2$  の確率分布関数がそれぞれ式(3)の  $f(x_1)$  および式(8)の  $\varphi(x_2)$  で示されるとき、 $x_1$  および  $x_2$  の一次結合である式(1)に示す  $y$  の確率密度関数  $p(y)$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} p(y) &= N(m, \rho^2) \\ m &= m_2 - m_1, \quad \rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$(\tau/\sigma)_{\max}$ -面にそって存在する全粒子のうち滑動粒子が発生する確率  $P$  は、上式の  $p(y)$  についての  $y \leq 0$  の範囲の積分によって与えられ、この  $P$  を滑動確率 (probability of sliding particles) という。  $P$  の値は

$$P = \int_{-\infty}^0 p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-m/\rho} e^{-t^2/2} dt \equiv F\left(-\frac{m}{\rho}\right) \quad (13)$$

ここに

$$t = (y - m)/\rho, \quad m = m_2 - m_1$$

$F(-m/\rho)$  は  $N(0, 1^2)$  の確率積分であってその数値は確率積分表から求められる。式(13)の  $t$  と  $m_1$  は互いに独立な変数であるから、 $m_1$  と  $P$  との関係を計算すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dm_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \rho} \exp\left\{-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2\rho^2}\right\} \\ \therefore P &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \rho} \int_{-\infty}^{m_1} \exp\left\{-\frac{(m_1 - m_2)^2}{2\rho^2}\right\} dm_1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

上記の第1, 第2式の関係を  $m_1$  軸に対して画けば、それぞれ図-6の(b), (c)であらわされる。

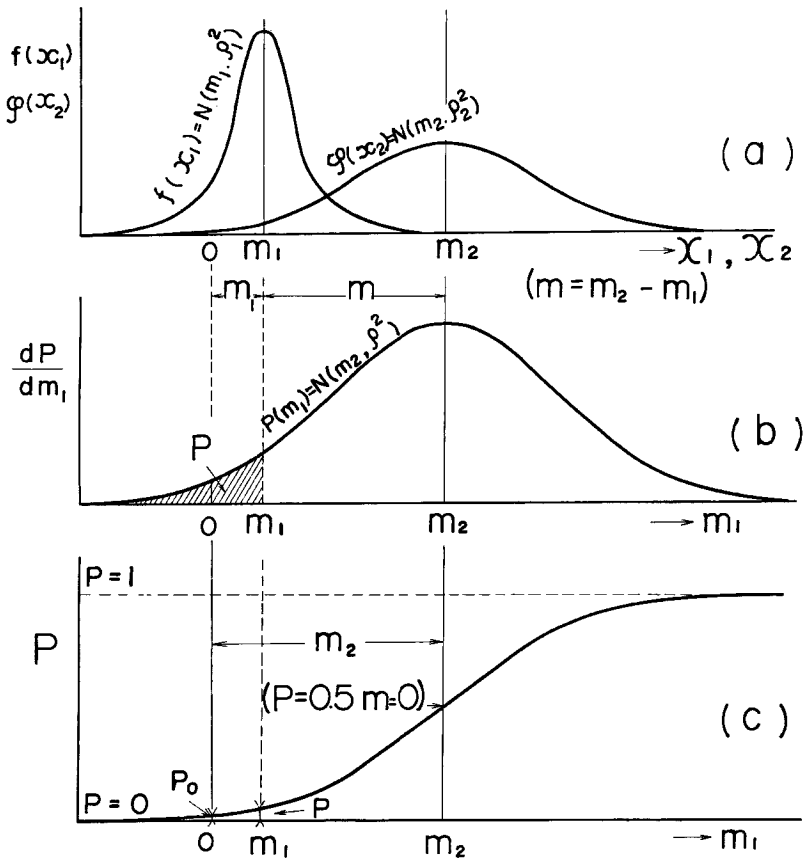


図-6

(b) 滑動粒子の滑動抵抗角

前式(3), (8)の  $f(x_1), \varphi(x_2)$  を、次式の  $t_1, t_2$  を用いて変数を置換して正規化し、それぞれの値を  $Z_1, Z_2$  とする。

$$t_1 = \frac{x_1 - m_1}{\rho_1}, \quad t_2 = \frac{x_2 - m_2}{\rho_2} \quad (15)$$

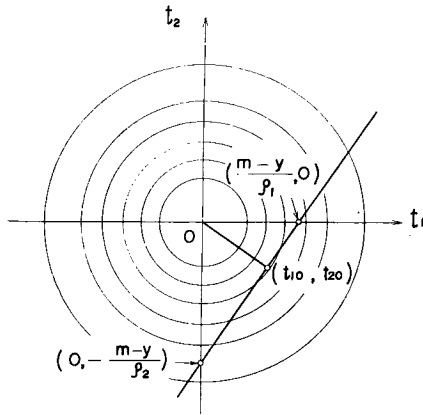


図-7

確率変数  $t_1, t_2$  は互いに独立であるから,  $Z_1, Z_2$  を  $t_1, t_2, Z$  の 3 軸上に画けば,  $Z$  軸に対称な正規確率曲面を得る。

図-7 の同心円はこの曲面の等確率線を  $(t_1, t_2)$ -面上に投影したものである。式(1)を, ある  $y$  の値を与えて,  $t_1, t_2$  の関数で示し,  $(t_1, t_2)$ -面上に画けば図の右上りの直線となる。この直線を底辺にもつ鉛直面と上記確率曲面との交線は正規確率曲線に似た対称で一つの mode をもつ曲線となり, この曲線が囲む面積は, その  $y$  に対する確率密度を与える。この mode の  $(t_1, t_2)$ -面への投影点を  $t_{10}, t_{20}$  とすれば,  $t_{10}, t_{20}$  はそれぞれ与えた  $y$  の値に対応する  $t_1$ -Z 面上の  $t_1$  の分布曲線の mode の値および  $t_2$ -Z 面上の  $t_2$  の分布曲線の mode の値に等しい。 $t_{10}, t_{20}$  を式(15)の  $t_1, t_2$  に代入したときの  $x_1, x_2$  の値をそれぞれ  $x_{10}, x_{20}$  とすると

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= (m_1 \rho_2^2 + m_2 \rho_1^2 - y \rho_1^2) / (\rho_1^2 + \rho_2^2) \\ x_{20} &= (m_1 \rho_2^2 + m_2 \rho_1^2 + y \rho_2^2) / (\rho_1^2 + \rho_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$x_{10}, x_{20}$  は, 与えた  $y$  の値を満たすような  $x_1$ -群中の  $x_1$  および  $x_2$ -群中の  $x_2$  の分布曲線のそれぞれの mode の値であるとともに, それぞれの群における滑動粒子に対する  $x_1, x_2$  の平均値を示している。

一方  $m_1$  で示される偏差応力をうけている砂に対して,  $m_1$  を  $dm_1$  だけ増加するとき, それに対応する  $y$  の値は  $y=0$  であるから, 砂の載荷過程において外圧が  $m_1$  に達したとき滑動を開始する粒子群が示す滑動抵抗角の平均値は, 式(16)の第 2 式に  $y=0$  を代入したものとなる。この滑動抵抗角の平均値を構成している接点方向角の平均値を  $\theta_s$  とすると,  $\theta_s$  は  $m_1$  において滑動を始める粒子群が滑動時  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面より上方に偏倚する角度の平均を示すことになる。 $\theta_s$  の関係は式(16)より,

$$(x_{20})_{y=0} = \theta_s + \delta = (m_1 \rho_2^2 + m_2 \rho_1^2) / (\rho_1^2 + \rho_2^2) \quad (17)$$

### 3.6 弾性状態にある砂の応力・ひずみ特性

外圧をうけた粒子が, 従来の静止位置から potential 障壁まで隣接粒子表面にそって図-8 のような滑動を

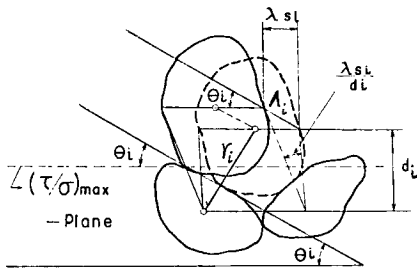


図-8

するとき, 滑動方向に測った滑動距離を  $A_i$ , 粒子間距離を  $r_i$  とし,  $A_i, r_i$  の全粒子に対する平均値をそれぞれ  $A, r$  とする。 $A_i, r_i$  は粒子ごとで異なるが, 両者の比  $A_i/r_i$  は  $A/r$  のまわりにある分布をする。そこで  $A_i/r_i = c_i \cdot A/r$  とおくと, 砂の粒子諸元と粒子配列が定まれば  $A, r$  は一定であるから, その比  $A/r$  は定数となり, また係数  $c_i$  の確率分布も一定となる。

#### (a) 砂のせん断ひずみ

$(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に生ずる砂の巨視的なせん断ひずみ  $r_\theta$  は, 上述のように粒子の相対移動の結果生じるから, 砂中に形

成されるせん断面は厚さのない面ではなく, むしろ厚さをもつ層となり, 砂全体に対してこのようなせん断層の厚さを  $b$  とする。 $b$  は砂の平均粒子間隔  $r$  に比例するとみられるので,  $b \doteq k \cdot r$  と近似する。比例係数  $k$  は, せん断機構からみて, せん断応力の大きさやせん断面の方向には無関係である。上記の  $r_\theta$  は, すべての滑動粒子の滑動が一ように  $r_\theta$  に寄与することで生ずるとすれば, 各滑動粒子の滑動距離  $A_i$  の累積と

して生じるが、 $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に対する  $A_i$  の方向は個々の粒子の接点方向角  $\theta_i$  だけ傾くから、個々の滑動粒子の  $r_\theta$  への寄与を  $A_i \cdot \cos \theta_i$  とすると、滑動確率の増分  $\Delta P$  によって生ずるせん断ひずみの増分  $\Delta \gamma_\theta$  は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \gamma_\theta &= \frac{1}{b} \sum_{P \cdot N}^{(P+\Delta P)N} A_i \cdot \cos \theta_i = \frac{A \cdot \cos \theta_s}{k \cdot r} \sum_{P \cdot N}^{(P+\Delta P)N} \left( \frac{c_i \cdot r_i}{r} \cdot \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_s} \right) \\ &= \frac{A \cdot N \cdot \cos \theta_s}{k \cdot r} \Delta P \int_{w_1} \int_{w_2} w_1 \cdot w_2 \cdot f(w_1, w_2) dw_1 \cdot dw_2 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに  $w_1 = c_i \cdot r_i / r$ ,  $w_2 = \cos \theta_i / \cos \theta_s$

上式中  $N$  は砂単位面積中の粒子数、角  $\theta_s$  は滑動した粒子群の  $\theta_i$  の平均値で式(17)により与えられる。また  $f(w_1, w_2)$  は互いに独立な  $w_1, w_2$  の同時確率分布関数で、外力  $m_1$  の大きさに無関係であるから、砂が一定であれば一定となる。ゆえにこの砂に与えられた  $c_i \cdot r_i, \theta_i$  の分布に対して、上式の  $w_1, w_2$  域内の二重積分は、この砂の  $w_1, w_2$  の積に対する期待値であって一定値となり、これを  $c_s$  と記す。

いま載荷時の平均有効主応力  $\sigma_m$  と同一の  $\sigma_m$  のもとで弾性状態になった砂を対象にすると、式(11)のように  $\rho_1 = \rho_2$  であるから、この砂の  $\theta_s$  は式(17)より  $\theta_s + \delta = (m_1 + m_2)/2$  となり、 $\theta_s$  は  $m_1, m_2, \delta$  の関数となる。しかし通常の砂粒子の  $m_2, \delta$  の値の範囲では、 $\cos \theta_s$  は  $m_1$  の小さい間を除けば次のように近似することができる。

$$\begin{aligned} \cos \theta_s &\doteq \cos \delta \cdot \cos m_1 \cdot \cos \{(m_2 - m_1)/2\} \\ &\doteq \cos \delta \cdot \cos m_1 \end{aligned} \quad (19)$$

上述と上式の関係を式(18)に代入して微分形でかくと、

$$\left. \begin{aligned} d\gamma_\theta &= A \cdot \cos m_1 \cdot dP \\ A &= c \cdot A \cdot N / r, \quad c = c_s \cdot \cos \delta / k \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式中の  $A$  を変位係数、 $c$  を寄与係数ということとする。

#### (b) ダイラタンシーによる体積ひずみ

粒子は滑動すると  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面からその粒子の接点方向角  $\theta_i$  だけ上方にそれるために、粒子間隔が拡大し、いわゆるダイラタンシーによる体積膨張が生じる。滑動確率が  $dP$  増加することによる  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の体積膨張を  $-d\epsilon_n$  ( $\epsilon_n$  は圧縮を正とする) とする。粒子の滑動が  $d\epsilon_n$  に寄与する過程は、この滑動粒子が  $d\gamma_\theta$  に寄与する過程と同一と考えられるから

$$-d\epsilon_n = \tan \theta_s \cdot d\gamma_\theta \quad (21)$$

上式の  $\theta_s$  は式(17)で与えられ、また  $(\theta_s + \delta)$  の正切を  $\tan \theta_s$  について Maclaurin 展開をし  $\tan^2 \theta_s$  以上の項を無視して近似値をとると次式となる。

$$\tan(\theta_s + \delta) \doteq (1 + \tan^2 \delta) \cdot \tan \theta_s + \tan \delta \quad (22)$$

式(17)、(21)を上式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \lambda \left( -\frac{d\epsilon_n}{d\gamma_\theta} \right) + \tan \delta &= \left\{ \frac{m_1 \rho_2^2 + m_2 \rho_1^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \right\} \\ \lambda &= 1 + \tan^2 \delta \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

上に求めた式(20)、(23)は、 $N(m_1, \rho_1^2)$  の外圧が  $N(m_2, \rho_2^2)$  で示される砂に載荷されているとき、さらに  $dm_1$  の偏差応力の増加のために  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面に生ずるせん断ひずみの増分  $d\gamma_\theta$  と体積増分  $(-d\epsilon_n)$  を与える式である。

## (c) 応力・ひずみ特性式

滑動確率  $P$  は式(13)で与えられ、その数値は数表から求められるが簡単に式示できない不便がある。そのため計算の便宜上  $P$  を次の正切関数  $P_a$  で近似する。

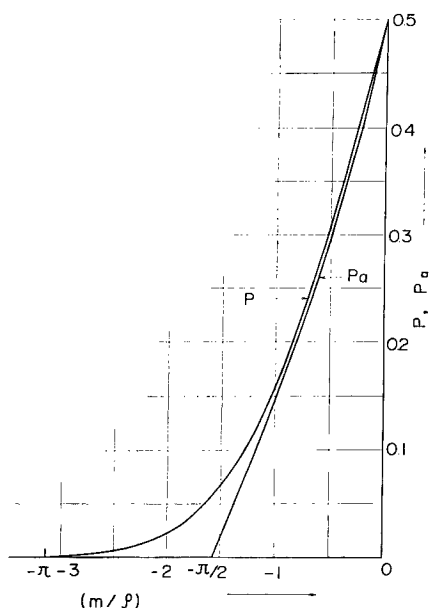


図-9

$$P \doteq P_a = \frac{1}{2} \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{m}{2\rho} \right), \quad m = m_2 - m_1 \quad (24)$$

$P$  と  $P_a$  の様相は図-9 に示すように  $P_a$  は  $m/\rho$  が小さい部分では近似性がよいが、 $m/\rho$  が大きくなると差が大きい。なお曲線  $P$  の分布範囲が無限遠におよぶことは元来式(3)、(8)の  $f(x_1)$ 、 $\varphi(x_2)$  を両側無限の正規確率関数によって近似したこと起因するものであるが、現実の砂ではこれらの分布関数は有限範囲のものである。また曲線  $P$  を使用する範囲は  $m_1 \geq 0$  の部分であるから、 $m/\rho$  の  $m_2/\rho$  より小さい部分は対象にならない。さらに曲線  $P$  では、 $P$  の絶対値を用いるよりも、 $m_1$  の載荷後の増分が必要である。これらのことから、 $P_a$  に代わるより適当な近似曲線を見出すまでは、上述の  $P_a$  を用いても、 $m_1$  の小さい部分を除いては実用上は差支えないと思われる。

砂が等方圧下にある載荷前の  $P_a$  は式(24)に  $m_1=0$  を代入したものであるから、これを  $P_{a0}$  とすれば、この砂に  $m_1$  で示される偏差応力を加えたときの滑動確率の増加  $P_e (= P_a - P_{a0})$  は、三角関数の展開にいくらかの近似計算を用いて次式のように示される。

$$\left. \begin{aligned} P_e &= P_a - P_{a0} = W_e \cdot z \\ \therefore dP &\doteq dP_a = W_e \cdot dz \\ W_e &= \tan \{m_2 / (2\rho)\} / (2 \tan m_2) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに

上式の  $W_e$  は、砂の粒子構造に関係するから、弾性状態にある砂の構造係数ということとする。 $W_e$  は弾性限界  $s_{el}(s_{el} = \tan m_2)$  と  $\rho$  の関数であるが、実際の砂の  $m_2$  の値の範囲ではほとんど  $m_2$  に無関係で、主として  $\rho$  の値に支配される。一方  $\rho$  は一定の砂では一定であるから、 $W_e$  はその砂に固有なほぼ一定の定数となる。

式(25)を式(20)に代入し、さらに式(2)、(3)の関係を用いると  $dr_\beta = \cos \phi (A \cdot W_e \cdot dz)$  となるが、これは外圧を  $m_1$  としたときにその  $m_1$  に対してできる  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面を基準とした場合の  $dz$  と  $dr_\beta$  の関係である。このときの最大せん断ひずみを  $\gamma$  とすれば、 $dr_\beta = d\gamma \cdot \cos \phi$  の関係があるから、

$$d\gamma = A \cdot W_e \cdot dz$$

なお、 $\cos \phi$  は Mohr の応力円の関係からも分るように  $\cos \phi = \sqrt{1+z^2}$  であるから、上式より  $\gamma$  と  $r_\beta$  は

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= A \cdot W_e \cdot z \\ r_\beta &= A \cdot W_e \cdot z / \sqrt{1+z^2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

砂が式(8)のように  $\rho_1 = \rho_2$  の場合には、この関係を式(23)に代入するとその右辺は次式のように展開される。

$$\tan \frac{m_1 + m_2}{2} = \frac{1}{2} (\tan m_1 + \tan m_2 - \alpha) \quad (27)$$

$\alpha$  は補正項であるが、実際の砂の  $m_1, m_2$  の値の範囲では、 $\alpha$  を無視しても大差がない。ゆえに  $\tan m_1 = z$ ,  $\tan m_2 = s_{el}$  および式(27)において  $\alpha \doteq 0$  とした関係を式(23)に代入すると次式(28)の第1式が得られる。ついでこの第1式に式(26)の第2式を微分した関係を代入すると次式の第2式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \lambda \left( -\frac{d\varepsilon_n}{d\gamma_\beta} \right) + \tan \delta &= \frac{s_{el} + z}{2} \\ \lambda \left( -\frac{\varepsilon_n}{\gamma_\beta} \right) + \tan \delta &= \frac{s_{el}}{2} + \frac{z}{4} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

式(26)第1式および式(28)はそれぞれ  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上のせん断ひずみと体積ひずみを与える式である。砂の弾性状態は、真の弾性状態でなく加圧時と減圧時の応力・ひずみ関係は一致せず、また粒子の配向の進展によっていくらか異方性が発生することが考えられるが、ここで砂を等方な弾性体とみなすならば、主応力方向と主ひずみ方向が一致するという条件のもとに式(26)、(28)の関係を周知の方法で主応力・主ひずみの関係に変換することができる。

### 3.7 塑性状態にある砂の応力・ひずみ特性

塑性状態における粒子の活性化は応力比  $z$  が砂の弾性限界  $s_{el}$  に達すると発生し、 $z$  が増すにつれて増大する。現実の砂では、 $z$  が破壊強度に達すると破壊が生じて粒子状態は一変するが、塑性状態における活性化の傾向が破壊強度を超えた領域にまで外挿できるとしたとき、全粒子が活性化する  $z$  の値を  $s_\infty$  とする。この  $s_\infty$  は、弾性状態にある砂のすべての粒子が載荷と同時に一次的な滑動を始める応力比、すなわち粒子の滑動確率  $P$  が  $P=1$  を満足する応力比である。

ある応力比  $z$  のもとで塑性状態にある砂中に存在する活性化粒子の数  $N_p$  は、砂が塑性状態へ移行後に生じた一次的な滑動粒子の数にほぼ比例するとみられるので、全粒子数  $N$  と、弾性挙動粒子数  $N_e$  の関係は次式のようになる。

$$N_p = \frac{z - s_{el}}{s_\infty - s_{el}} N, \quad N_e = N - N_p = \frac{s_\infty - z}{s_\infty - s_{el}} N \quad (29)$$

上式の  $(s_\infty - s_{el})$  は粒子の接点方向角の分布の実質上の上限値の正切とその分布の中央値の正切との差であるから、実際の砂粒子の接点方向角の分布の半幅に関係する。したがって  $s_\infty$  は  $s_{el}$  が変化するに応じて変化する。

砂に  $s_{el}$  以上の応力比  $z$  が載荷されて塑性状態に移行すると、 $z$  が一定であっても3.3(b)にのべたように、載荷とともに滑動した粒子の一部に第1次の滑動と活性化が発生し、その活性化の進展につれてさらに第2次の滑動と活性化が生じる。第1次の活性化が発生してから第2次の活性化が終息するまでの期間の任意の時点で、その時点までにすでに活性化を終了している粒子数を  $N_x$  とする。したがってその時点において砂中に存在する弾性挙動粒子数は  $(N - N_x)$  となる。 $N_x$  は第1次の活性化の始発以前は0であって、第2次の活性化終了時には  $N_p$  となる。第2次の活性化過程では、活性化した粒子の一部は配向して新たな接点方向角をとり、元来の接点方向角の分布系から除かれる。このように新たな配向に移る粒子は、弾性状態にあったときの元来の接点方向角が小さい粒子には配向の機会が少く、また接点方向角の大きい粒子は活性化する機会が少いので、結局弾性挙動粒子群の接点方向角分布は、確率分布の対象となる母集団を弾性挙動粒子群としたとき、この砂が保有していた元来の分布とほぼ等しいとみても大差がない。

#### (a) 砂のせん断ひずみ

弾性挙動粒子群の粒子構造は活性化粒子の発生によって影響をうけないとみられるから、この粒子群における粒子間力の分布についても同様とみなせば、この粒子群に属する粒子の滑動特性は、弾性挙動粒子が属する母集団の粒子の数における相異のほかに弾性状態にある砂に対して求めた考え方をそのまま適用することができる。いま砂が塑性状態に移行した以後に発生する最大せん断ひずみを  $\gamma^*$  (\*は塑性状態における値の意)とし、このうち弾性挙動粒子、活性化粒子に起因するひずみ成分にそれぞれ  $e, p$  の添字をつけ、

$\gamma_e^*$ ,  $\gamma_p^*$  と記す。

弾性挙動粒子の滑動による  $\gamma_e^*$  のうち、第 1 次、第 2 次の過程によるひずみ成分をそれぞれ  $\gamma_{e1}^*$ ,  $\gamma_{e2}^*$  とすれば、式 (26) の考え方を適用して

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{e1}^* &= A \cdot W_e \cdot (z - s_{el}) \cdot (N_e / N), \\ \gamma_{e2}^* &= \int_0^{N_p} \left\{ A \cdot W_e \cdot \frac{N - N_x}{N} \right\} \left\{ (z - s_{el}) \cdot \frac{1}{N - N_x} \right\} dN_x = A \cdot W_e (z - s_{el}) \frac{N_p}{N} \\ \therefore \gamma_e^* &= \gamma_{e1}^* + \gamma_{e2}^* = A \cdot W_e (z - s_{el}) \left( \frac{N_e}{N} + \frac{N_p}{N} \right) = A \cdot W_e (z - s_{el}) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

一方活性化粒子に起因する  $\gamma_p^*$  の発生過程中的のある時点についてみると、将来活性化する  $N_x$  個の粒子が静止位置から potential 障壁まで滑動することによるひずみ成分  $\gamma_{p1}^*$  とこの  $N_x$  個の粒子が活性化した後つづいて  $dN_x$  個の粒子の活性化のため、弾性挙動粒子の移動に連れられてさらに移動することに起因するひずみ成分  $\gamma_{p2}^*$  からなる。なお上述の  $N_x$  個の活性化粒子の弾性挙動粒子と同行するときの 1 粒子当りの移動距離の平均は、弾性挙動粒子群の 1 粒子当りの平均移動距離に等しい。ゆえに  $\gamma_{p1}^*$ ,  $\gamma_{p2}^*$  は

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{p1}^* &= \int_0^{N_p} A \cdot W_e \cdot (z - s_{el}) \frac{dN_x}{N} = A \cdot W_e \cdot (z - s_{el}) \cdot (N_p / N) \\ \gamma_{p2}^* &= \int_0^{N_p} \left\{ \frac{A \cdot W}{N} \cdot \frac{dN_x}{N - N_x} \right\} \cdot N_x \cdot (z - s_{el}) = \frac{A \cdot W_e}{N} (z - s_{el}) \int_0^{N_p} \frac{N_x}{N - N_x} dN_x \\ &\quad \div A \cdot W_e \cdot (z - s_{el}) \cdot N_p \cdot \{ (1/N_e - 1/N) \} \\ (\because N_p + N_e &= N, \quad N_p < N_e) \\ \therefore \gamma_p^* &= \gamma_{p1}^* + \gamma_{p2}^* = A \cdot W_e \cdot (z - s_{el}) (N_p / N_e) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

砂が塑性状態に移行した以後に発生する最大せん断ひずみ  $\gamma^*$  は式 (29), (30), (31) より

$$\left. \begin{aligned} \gamma^* &= \gamma_e^* + \gamma_p^* = A \cdot W_p \cdot (z - s_{el}) \\ \text{ここに } W_p &= W_e \cdot \frac{N}{N_e} = W_e \cdot \frac{s_{\infty} - s_{el}}{s_{\infty} - z} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

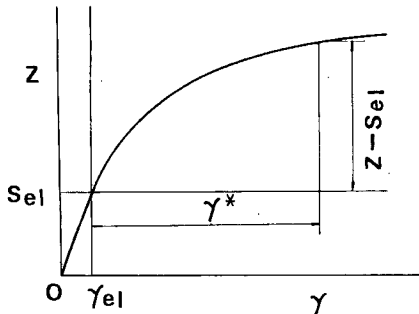


図-10

式(32)は砂が塑性状態に移行後の  $\gamma^*$  と  $z$  の関係を示す特性式で、これを図示すると図-10 のようになる。上式中  $W_p$  を塑性状態にある砂の構造係数といい、塑性状態における粒子状態を示す。 $W_p$  は  $z$  の関数で、 $z = s_{el}$  においては  $W_e$  と一致し、 $z$  が増すほど大きくなる。

また载荷の初期から測った最大せん断ひずみを  $\gamma$  とし、 $z$  が弾性限界  $s_{el}$  に達したときの  $\gamma$  を  $\gamma_{el}$  とすれば、 $\gamma$  および  $\gamma^*$ ,  $\gamma_{el}$  に相当する  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上のそれぞれのせん断ひずみ  $\gamma_{\beta}^*$ ,  $\gamma_{\beta el}$  は

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \gamma^* + \gamma_{el}, \quad \gamma_{\beta} = \gamma / \sqrt{1 + z^2} \\ \gamma_{el} &= A \cdot W_e \cdot s_{el}, \quad \gamma_{\beta el} = \gamma_{el} / \sqrt{1 + s_{el}^2} \\ \gamma_{\beta}^* &= \gamma^* / \sqrt{1 + z^2} = (\gamma - \gamma_{el}) / \sqrt{1 + z^2} \\ &\quad \div \gamma_{\beta} - \gamma_{\beta el} \quad (\text{if } \sqrt{1 + s_{el}^2} \div 1) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

式(32)を変形すると

$$\frac{z-s_{el}}{\gamma^*} = \frac{1}{A \cdot W_e \cdot (s_{\infty}-s_{el})} (s_{\infty}-z) \quad (34)$$

上式のような砂の応力・ひずみ関係の双曲線表示は Kondner ら<sup>18)</sup> が実験をもとにして1963年に提案している。しかし Kondner らの提案式と式(34)は根本的に次の3点で相異している。(1) Kondner らの式は応力・ひずみ曲線の起点を、応力・ひずみそれぞれのゼロの点としているが、式(34)ではこの起点を活性化の始発点においている。(2) Kondner らの式では応力として偏差応力を用いているが、式(34)では  $\tau/\sigma$  に相当する応力比を用いて  $\sigma_m$  の影響を排除している。(3) Kondner らは破壊強度としてひずみが無限大になる偏差応力を用いているが、式(34)は単に塑性状態の特性式としており、破壊強度は後述するようなこれと別の考え方から求めている。また Kondner らは彼らの式が応力・ひずみの小さい部分や破壊応力において実験値と一致しないことをのべているが、これは彼が弾性状態の存在や塑性状態と破壊状態の差異を看過して塑性状態にある砂の実験値を用いて作った式を砂の応力・ひずみ特性のすべてにわたって適用しようとしたところに不一致の原因があったものと思われる。

(b) ダイラタンシーによる体積ひずみ

弾性挙動粒子群の滑動において、それを支配する統計力学的要素が属する母集団をこの粒子群とし、かつこの母集団中の滑動抵抗角の標準偏差が粒子の活性化に無関係であるとみるならば、弾性挙動粒子群を母集団としたときのこの粒子群の滑動特性は、弾性状態にある砂の全粒子に対する滑動特性に等しい。一方活性化粒子の活性化後の移動は弾性挙動粒子に主導されることからこの粒子の移動特性は弾性挙動粒子群のそれと同一に扱うことができる。ゆえに塑性状態においても式(21), (23)が成立する。ただし式(23)の  $m_1, m_2$  は弾性挙動粒子を母集団としたものでなければならないから、 $\rho_1 = \rho_2$  の砂においては、式(27)右辺の  $\alpha = 0$  とした値はこの場合次式となる。

$$\begin{aligned} (1/2) \{ \tan m_1 + \tan m_2 \} &= (1/2) \{ (z-s_{el}) \cdot (N/N_e) + s_{el} + s_{el} \} \\ &= \{ (z-s_{el}) \cdot (s_{\infty}-s_{el}) \} / \{ 2(s_{\infty}-z) \} + s_{el} \equiv f_1(z) \end{aligned}$$

上式の曲線形は、 $z=s_{el}$  および  $z=(s_{\infty}+s_{el})/2$  において  $f_2(z)=z$  の直線上にあり、その中間ではこの直線に近接しているから  $f_1(z) \div z$  と近似し、この関係と式(21)とを式(22)に代入すると、ダイラタンシー特性式は

$$\left. \begin{aligned} \lambda \left( -\frac{d\epsilon_n}{d\gamma_\beta} \right) + \tan \delta &\div z \\ \text{これと式(26), (33)より} \\ \lambda \left( -\frac{\epsilon_n}{\gamma_\beta} \right) + \tan \delta - \lambda \left( -\frac{\epsilon_{nel}}{\gamma_{\beta el}} \right) &= z \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここに  $\gamma_{\beta el}$  と  $\epsilon_{nel}$  は  $z$  が加圧過程で弾性限界  $s_{el}$  に達したときの  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面のせん断ひずみと体積ひずみである。

上式の第1式、第2式は定数項以外は同形であるから、両式を示す2直線は互いに平行となり、これら2直線が横軸となす傾きは、式(28)第2式の直線の傾きの1/2となる。また式(35)第1式の直線が  $z$  軸を切る点の長さは  $\tan \delta$  を与える。なお式(35)が示す両直線は塑性状態に対するもの

であるから、 $z=s_{el}$  において弾性状態に対して得られた式(28)の両直線に接続する。これらの状態を示せば、図-11 のようになる。なお図中の  $z_0$  は式(28)第1式の直線が  $z$  軸を切る点の縦距であるが、式(28)

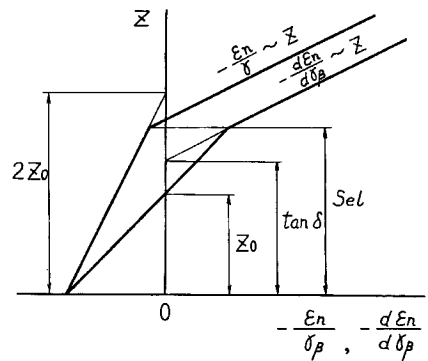


図-11

からも知られるように,  $\tan \delta = (s_{el} + z_0)/2$  となるから,  $z$  軸上に  $s_{el}, z_0$  の長さをとれば  $\tan \delta$  はその中点の縦距となる。

### (c) 主応力・主ひずみ関係

前記の式 (33), (35) で求めた  $\gamma_\beta, \varepsilon_n$  は塑性状態における  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面上のひずみである。これらひずみの中には, たとえば  $\gamma^*$  についてのべたように式 (30) の  $\gamma_e^*$  のような回復性のひずみと式 (31) の  $\gamma_p^*$  のような非回復性 (irreversible) のひずみからなっている。砂は粒子の配向の進展によっていくらかの異方性ができるが, これを等方性と仮定するならば, 可逆的な  $\gamma_e^*$  については前述した弾性状態にある砂の場合と同様に, 主応力の方向と主ひずみの方向が一致するとして  $\gamma_e^*$  による主ひずみ成分を求めることができる。非可逆的な塑性ひずみ  $\gamma_p^*$  については, 一般には主応力の方向と主ひずみ増分の方向が一致するとして,  $\gamma_p^*$  による主ひずみ成分を求めなければならない。しかし砂の三軸圧縮の場合のように, 主応力方向が固定され, また砂の塑性状態では, 粒子の一部が活性化して不安定になっても, その周囲に安定した粒子構造の弾性挙動粒子が存在しており, さらに弾性挙動粒子群を均質, 等方と仮定するならば, 主ひずみ方向も固定されるから, 主応力方向と主ひずみ方向が一致するとして主ひずみを求めることができる。

なお応力比  $z$  は, 前述のように  $(\tau/\sigma)_{\max}$ -面の応力比であるため概念上考えにくいかもしれないので  $z$  と通常用いる外圧との関係を求めてみる。主応力比  $\sigma_3/\sigma_1 = K$  とおけば,  $K$  が  $K=0.25 \sim 1.00$  の範囲であれば,  $100 \sim 105\%$  の精度で  $z \doteq \tau_{0el}/\sigma_m$  と近似することができる。

### (d) 理論式と実験値の対比

これまでに述べた応力・ひずみ特性式は, 砂を摩擦性粒子の random assembly とする前提のもとにすべて理論的に誘導したものであるが, その理論構成には 1, 2 仮定を導入したところがあり, また誘導過程には便宜上近似を用いたところがあるから, 理論解と実験値を対比させることは, 理論の妥当性と誘導の精度を確める上に有意義である。

実験値には松岡氏の行った三軸圧縮試験結果<sup>17)</sup>を借用する。この実験の砂試料は, 突棒で突固められた間げき比 0.899 のややゆるい豊浦砂で, 試験時の平均有効主応力  $\sigma_m$  は一定で  $\sigma_m = 1.0 \text{ kg/cm}^2$  とし, 体積変化の測定には membrane misfit の補正がなされ, 本文中の  $z, \varepsilon_n, \gamma_\beta$  は松岡氏の報文では  $\tau/\sigma_N, \varepsilon_n, \gamma$  として発表されている。この試料の作成は上述のように突固めによったものであるから, 本文でのべたように完全な弾性状態になっていないので, 弾性状態の部分について求めた関係はこの試料には適合しない。ゆえにここでは砂が完全に塑性状態に移行した部分だけを対象に理論との比較を行なう。なおこの試料は明確な弾性限界がないから, この砂が完全に塑性状態に移行するときの応力比を  $s_{el}$  として, この  $s_{el}$  を本文の弾性限界値と同様の取扱をすればよい。

$z$  と  $d\varepsilon_n/d\gamma_\beta$  および  $\varepsilon_n/\gamma_\beta$  の実験値をまとめて一枚の図にプロットすれば図-12(a) の○印および●印となる。式 (35) は  $z \geq s_{el}$  に対して成立するから, 両種のプロットに対してこの式に適合する直線を引くと

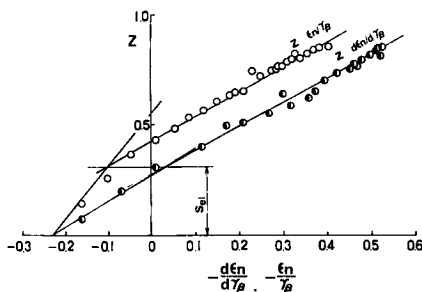


図-12 (a)

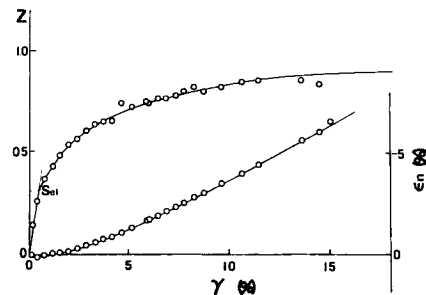


図-12(b)

同図の平行な2直線となり、それらの直線の下限から  $s_{el}$  の値、下側の直線の  $z$  軸の交点の値から  $\tan \delta$ 、平行2直線の傾斜から  $\lambda$  の値が次のように求められる。

$$s_{el}=0.31, \quad \tan \delta=0.28, \quad \lambda=1.08$$

図-12(b) の○印は、 $z, r_{\beta}, \varepsilon_n$  の実験値である。図より  $s_{el}=0.31$  に対応する  $r_{\beta}$  として  $r_{\beta el}=0.47\%$  を読みとる。式(34)を式(33)を用いてかきおすと

$$\frac{z-s_{el}}{(\gamma_{\beta}-\gamma_{\beta el})\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{A \cdot W_e (s_{\infty}-s_{el})} (s_{\infty}-z)$$

上式の左辺の値は実測値から求められるから、この値を縦軸に、実測値  $z$  を横軸にしてプロットすれば 図-12(c) のように各点は1直線上にあることがみとめられ、上式の特性が実証される。この直線は上式の右辺を示すものであり、図中の数値から次式右辺のように示される。

$$(s_{\infty}-z)/\{A \cdot W_e (s_{\infty}-s_{el})\} = 29.3 \{1-z/0.965\}$$

上式より  $s_{\infty}, A \cdot W_e$  の値は

$$s_{\infty}=0.966, \quad A \cdot W_e=0.05$$

つぎに上記のように求めた諸要素の値を式(32)、(35)に代入して  $z$  と  $r_{\beta}, \varepsilon_n$  の値を求め 図-12(b) の実測点の上に画くと同図の実線のようになる。

砂も粘土と同様にその変形特性は初期間げき比だけでなく応力履歴にも支配される。この試料は突棒の突固めで作成されていて、突固め時の応力条件が不明であるから、活性化以前の変形特性を関係づけることができない。そのため同じ豊浦砂をせん断開始時の間げき比を 0.672 として一定の  $\sigma_m$  で一定応力振幅の偏差応力をくり返し载荷して弾性状態にした砂の  $A \cdot W_e$  があるので参考に比較する。この弾性状態の砂の  $A \cdot W_e$  は偏差応力の振幅にはほとんど影響しないが、 $\sigma_m$  の大きさによって、 $\sigma_m=2, 3, 4 \text{ kg/cm}^2$  に対して、 $A \cdot W_e$  はそれぞれ 0.07, 0.04, 0.04 となった<sup>18)</sup>。この  $A \cdot W_e$  の値と前述で求めた  $A \cdot W_e=0.05$  とは初期間げき比が相異なるため、同列に比較しにくい、同一オーダーの似た値を示しており、妥当な値のように思われる。

### 3.8 塑性状態にある砂の回復ひずみ

砂が塑性状態にあるとき、载荷過程で移動した粒子の中で除荷時に往路にて滑動した斜面を下降して原位に復帰できる粒子は全粒子中、砂が弾性状態にあって粒子の活性化が発生する以前に滑動した粒子と、塑性状態に移行以後に滑動した弾性挙動粒子である。前者の滑動によって生じた砂の最大せん断ひずみ  $r_{el}$  は式(26)により

$$r_{el}=A \cdot W_e \cdot s_{el}$$

また後者のために生じたひずみは式(30)の  $r_e^*$  である。

$$r_e^*=A \cdot W_e (z-s_{el})$$

ゆえに応力比  $z$  を除荷した場合回復するひずみ  $r_r$  は、上記の  $r_{el}$  と  $r_e^*$  の和であるから

$$r_r=r_{el}+r_e^*=A \cdot W_e \cdot z \quad (36)$$

上式の  $r_r$  は式(26)で知られるように、弾性状態にある砂に  $z$  を载荷したときの最大せん断ひずみに等しい。ゆえに除荷によって回復するひずみ量は、除荷時の砂の状態が弾性状態、塑性状態に無関係に等しく、この

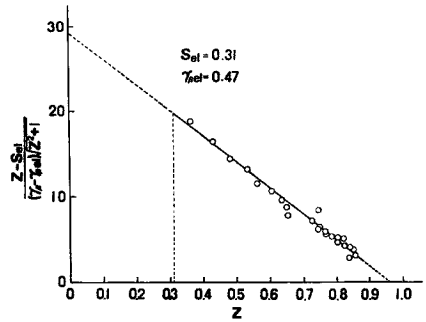


図-12(c)

回復のひずみ量は弾性状態にある砂をその除荷した応力まで載荷するときの弾性ひずみ量に等しいことが証明される。

除荷時の減圧曲線は、粒子間力の接点方向角と弾性挙動粒子の接点方向角の分布を知れば、載荷時に隣接粒子斜面を上昇した滑動粒子は減圧時には式(6)の条件をみたす粒子から順次往路の斜面を下降して載荷前の原点に復帰するとして、前述の統計力学的方法に準じて求めることができる。ここでは減圧曲線の解析については説明を省略するが、弾性挙動粒子群の接点方向角分布の標準偏差が除荷時の砂の塑性状態の粒子状況に無関係に一定であれば、減圧曲線の形はすべての除荷時に（ただし  $\sigma_m$  は一定）同形でかつ平行となるはずである。

いま図-5に示したくり返し載荷実験における減圧曲線は、除荷回数の多少にかかわらず、また砂が塑性状態のときも弾性状態に達した後も、いずれの場合もほとんど同形で互いに平行である。この事実からみて、さきに弾性挙動粒子の接点方向角分布に導入した仮定は十分妥当なものとも認められよう。

また塑性状態にある砂の除荷時のダイラタンシーの回復も、同様に滑動粒子の原位置への復帰に起因するから、除荷による体積ひずみの回復量は、弾性状態にある砂に除荷応力に等しい大きさの応力を加えたとき発生する体積ひずみと等しくなるはずである。

### 3.9 破壊状態にある砂の応力・ひずみ特性と破壊強度

砂が破壊状態に移行すると、前述した滑動や活性化などの諸現象のほかに弾性挙動粒子群の粒子間力による分解 (disintegration) が発生するから、この状態での粒子現象は一層複雑になる。従来の研究では、破壊現象を破壊までの応力・ひずみ関係と関連させて同時に論じたものがないので、この点の解明をここで詳述することを期待したが、すでに紙面も多く費やされているので、別の機会に発表することとして解析の結果だけを概述することとする。

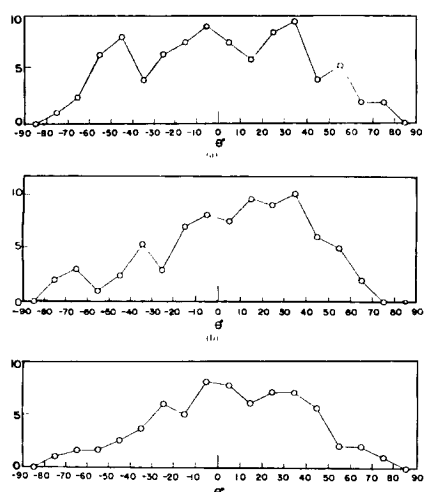


図-13

砂を一定の  $\sigma_m$  のもとで偏差応力を増加していくと、砂が塑性状態にあるときは、前述したように、活性化とともに粒子には配向が進み、粒子の接点方向角は増大してひずみ硬化を示した。偏差応力をさらに増加して破壊強度を超過すると、粒子構造に分解現象が発生する結果、粒子の接点方向角は逆に減少して砂の強度は低下をつづけ、粒子構造が完全に分解されたときには、与えられた  $\sigma_m$  のもとの最もゆるい砂の接点方向角にまで弱化する。これらの状態を実験的に示したものは図-13である。同図-(a)は作成した砂——ここでは実験試料に砂の代りにアルミ棒積層体を用いた<sup>12)</sup>——のせん断面上にある粒子（アルミ棒）の相互の接触面とせん断面との間の角  $\theta$  の分布であってほぼ対称な分布がみられる。同図-(b)は、この砂にせん断応力を与え、砂がピーク強度を示すときの  $\theta$  の分布で、最頻値を示す  $\theta$  は、外圧の  $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$  にほぼ一致している。さらにせん断応力を増加し、残留強度に達したときの  $\theta$  の分布は、同図-(c)のように対称分布となり、ゆるい状態の

分布の様相を示す。この図-(c)からも、前述した破壊状態における分解作用が接点方向角を低下させることが理解されよう。

砂は破壊状態においても、塑性状態のときと同様に活性化後安定化に向って配向して粒子構造にひずみ硬化の傾向を与えようとするであろうが、一方では粒子構造は分解のために弱化するから、粒子構造には強化と弱化の相反する変化が併発しつつ全体として弱化の方向に向うものと思われる。もしそうであれば、粒子構造はせん断の進行とともに粒子間力の支持と降伏が断続する結果、応力・ひずみ曲線には不規則な振動が

発生することが予想される。この現象の有無を検照するため、砂を三軸圧縮試験機で加圧したときの軸ひずみを測定した結果、破壊強度（ピーク強度）に達した頃から図-14のような振動が出現するのが観測され、この予想が実証された。

砂の粒子構造が完全に分解された状態では、砂の強度はいわゆる残留強度の状態となり、そのときの接点方向角の分布は前掲の図-13(c)となる。この分布の中央値を  $m_2$  とすれば、 $m_2$  はほとんどゼロであるから、この状態の砂の弾性限界  $s_{el}$  は  $s_{el}=0$  となり、またこの砂の  $s_{\infty}$  を  $s_{0\infty}$  と記すと、 $s_{0\infty}$  はこの状態の砂のせん断強度であって、 $s_{0\infty}$  は与えられた  $\sigma_m$  のもとでの最もゆるい砂のせん断強度に相当する。

一方同一の  $\sigma_m$  のもとで、一定偏差応力をくり返し載荷して弾性状態にした砂に、さらにこれより大きい一定の偏差応力をくり返し与えて弾性状態とし、この操作をくり返してその砂で作得る最高の接点方向角をもつ弾性状態の砂を作成したとき、この砂の弾性限界の値を  $s_m$  とする。このような  $s_m$  を有する砂は、与えられた  $\sigma_m$  のもとで、与えられた粒子性状と粒度配合からなる砂が作りうる最高の弾性限界をもつ粒子状態であり、またこの条件のもとでの最密の砂である。この  $s_m$  をもつ状態の砂に  $s_m$  以上の応力比を加えると、弾性状態から脆性破壊をして直ちに破壊状態に移行し、その中間には塑性状態が介在しない。

一般的なある弾性限界  $s_{el}$  をもつ砂では、応力比  $z$  を増大していくにつれて図-15の上側の曲線のように、弾性状態を経て塑性状態に移行し、ついで  $z$  が破壊強度  $z_f$  に達すると破壊状態に移行する。破壊状態では弾性挙動粒子群の粒子構造が分解されるに応じて、外圧の支持力も低下するから、ここの応力・ひずみ曲線は図-15の  $z_f$  より右側の部分のような曲線——この曲線はひずみ制御試験によって求められる——となり、図のようにひずみの増加とともにこの砂の残留強度に漸近する。一方これと同じ  $\sigma_m$  のもとで作成した最もゆるい砂をせん断すると、終始塑性状態を保ちつつ図-15の下側の曲線のように、 $z$  の増大とともにひずみを増し、上側曲線の残留強度の値に漸近する。

上述の破壊強度  $z_f$  の値および図-15の上下の曲線の特性式について理論的な解析を行ったが、その誘導を省略して結果だけを記すと次のようになる。

$$z_f = s_{0\infty} + \frac{s_m - s_{0\infty}}{s_m} s_{el} \quad (37)$$

砂の強度  $z_f$  は上式のように  $s_m$ ,  $s_{el}$ ,  $s_{0\infty}$  の強度要素からなるが、各要素のもつ意味についてのべる。 $s_{0\infty}$  は砂の材料がかわってもほとんど一定であるから、いわば材料が単に砂であることから得られる普遍的な強度要素といえる。 $s_m$  はその砂の粒子状態や粒度配合から決まる要素で、その砂だけがもついわば先天的な高強度への可能性を意味している。また  $s_{el}$  は、その砂に加える後天的な人為操作で作られる強度要素とみることができる。式(27)は砂の強度の関係式であるが、少し不まじめな考えをして、これを人間の能力（たと

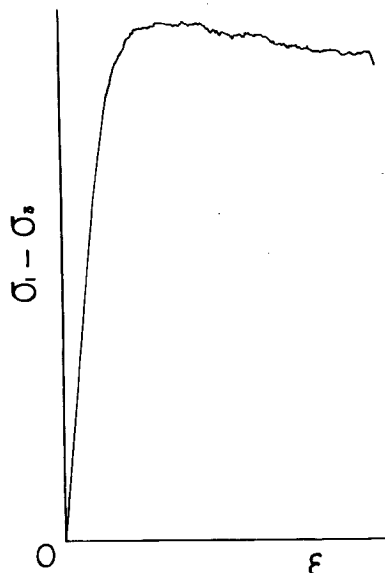


図-14

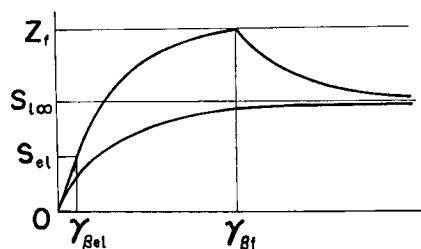


図-15

えばランニングの速さ)にたとえてみると何かそこに含蓄のある関連があるようにもみえまいか。その上せん断強度  $\tau_f(\tau_f = z_f \cdot \sigma_m)$  は、その砂の環境(拘束圧  $\sigma_m$ )にも支配されることも面白い関係といえよう。

閑話休題。

つぎに破壊強度  $z_f$  における最大せん断ひずみを  $\gamma_f$  とすれば、 $\gamma_f$  以上の応力・ひずみ曲線(図-15の上側の曲線の右半)および最もゆるい砂の応力・ひずみ曲線(図-15の下側の曲線)の特性式はそれぞれ次式の第1式、第2式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma - \gamma_f &= A \cdot B \cdot W_e \frac{z_f - z}{z - s_{0\infty}}, \quad \text{ここに} \quad B = \frac{(s_m - s_{0\infty}) \cdot (s_{0\infty} - s_{el})}{z_f - s_{0\infty}} \\ \gamma &= A \cdot W_e \cdot s_{0\infty} \frac{z}{s_{0\infty} - z} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

### 3.10 む す び

この研究の動機は、はじめにものべたようにまだ解明の不十分な土の構成特性を知るために、土に適した解析手法を工夫して理論体系を作成する必要性を感じたからである。またその解明には、今迄 black box 視されていた土内部の粒子構造を垣間見て、とりわけその中の粒子挙動を知ることが重要と思われた。

そこで、土を含めた摩擦性粒子の random assembly を対象として、物性論的な考察と統計力学的な手法を用いることによって一応ながら偏差応力に対する土(ここでは砂)の応力・ひずみ特性を破壊領域までも含めて論ぜられるようにすることができた。土の応力・ひずみ関係は一様ではないから、砂の特性を弾性、塑性、破壊の各状態に分けてそれぞれの加圧時の特性と前2者の状態下の減圧時の特性を求めた。具体的な関係については、弾性状態では式(26)、(28)、塑性状態では式(32)、(35)、(36)のように、破壊強度は式(37)により、また破壊以後のせん断ひずみは式(38)のように誘導した。またこれらの変形過程にあらわれる弾性、弾性限界、塑性、ひずみ硬化、破壊などの現象を、粒子の滑動、活性化や配向または構造の分解などの概念から物性論的に説明するとともにそれらに関する定量的な解析も試みた。

けれどもこれらの理論は単に頭の中だけで組立てたものであって、結果がでた最終段階の関係は、実験と対比してその適合性を検証しているものの、土の真実はさらに奥深いものがあろう。そのためこれだけではまだ荒削りのところも少なくないと思われるので、なお今後も究明をつづけなければならないであろう。それには、従来は土質力学関係ではあまり扱わなくてもすんでいたようなことまでも重要な要素となり、各位の一層のご教示を得たくお願いする次第である。今迄にも土質力学関係の諸氏のほかに角屋睦先生や野中泰二郎先生からも多大のお教えをいただき、ここに謹んでお礼を申し上げる次第である。

### 参 考 文 献

- 1) Coulomb, C. A. (1773): Essai sur une Application des Règles des Maximis et Minimis à quelques Problèmes de Statique Relatifs à l'Architectur, Mém. math. phys., présentés à l'Académie Royale des Sciences (Savants étrangers) Paris, Vol. 7.
- 2) Rankine, W. J. M. (1856): On the Stability of Loose Sand, Phil. Trans. Royal Society London, Vol. 147.
- 3) Hvorslev, M. J. (1960): Physical Components of Shear Strength of Saturated Clays, Proc. ASCE Research Conf. on Shear Strength of Cohesive Soils, pp. 169-273.
- 4) Terzaghi, K. (1923): Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, Vol. 132.
- 5) Skempton, A. W. (1954): The Pore-pressure Coefficients A and B, Géotechnique, Vol. 4, No. 4, pp. 143-147.
- 6) Terzaghi, K. (1925): Erdbaumechanik auf Bodenphysikalische Grundlage, Vienna, F. Deuticke.
- 7) 村山朔郎・柴田 徹 (1956): 粘土のレオロジー的特性について, 土木学会論文集, 40号, pp. 1-31.

- 8) 村山朔郎 (1962): 土質力学における最近の諸問題, とくに砂質土について, 日本材料試験協会編: 土質材料の力学と試験法, pp. 109-131.  
Murayma, S. (1966): A Theoretical Consideration on a Behavior of Sand, Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mech., Grenoble, 1964, Springer-Verlag. pp. 146-159.  
Murayama, S. (1969): Stress-Strain-Time Behavior of Soils Subjected to Deviatoric Stress, Proc. 7th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 1, pp. 297-306.
- 9) Newland, P. L. and B. H. Allely (1957): Volume Change in Drained Triaxial Tests on Granular Materials, Géotechnique, Vol. 7, No. 17, pp. 17-34.
- 10) Rowe, P. W. (1962): The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact, Proc. Royal Society, London, Series A, Vol. 269, pp. 500-527.
- 11) Mogami, T. (1965): A Statistical Approach to the Mechanics of Granular Materials, Soils and Foundations, Vol. V, No. 2, pp. 26-36.  
Mogami, T. (1969): Mechanics of Granular Material as a Particulated Mass, Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Eng., Vol. I, pp. 281-285.
- 12) 村山朔郎・松岡 元 (1970): 2次元モデルによる粒状体のせん断現象の微視的考察, 京大防災研究所年報13号-B, pp. 505-523.  
村山朔郎・松岡 元 (1971): 砂と粘土のせん断特性の類似性とそのメカニズムについて, 京大防災研究所年報14号-B, pp. 551-563.  
Murayama, S. and H. Matsuoka (1973): A Microscopic Study on Shearing Mechanism of Soils, Proc. 8th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Eng., Vol. 1, Part 2, pp. 293-298.
- 13) Roscoe, K. H., A. N. Schofield and A. Thurairajah (1963): Yielding of Clays in States Wetter than Critical, Géotechnique, Vol. 13, pp. 210-240.
- 14) Schofield, A. N. and P. C. Wroth (1968): Critical State Soil Mech., McGraw-Hill.
- 15) Roscoe, K. H., A. N. Schofield and P. C. Wroth (1958): On the Yielding of Soils, Géotechnique, Vol. 8, pp. 22-53.
- 16) Kondner, R. and J. Zelasco (1963): A Hyperbolic Stress-Strain Formulation for Sands, Proc. Second Panamerican Conf. on Soil Mech. and Found. Eng., Vol. 1, pp. 289-324.
- 17) Matsuoka, H. (1974): Stress-Strain Relationships of Sands, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2, p. 53, p. 55.
- 18) 村山朔郎・北村良介 (1974): くり返し載荷をうける砂の応力-ひずみ関係について, 第9回土質工学研究発表会講演集, pp. 203-206.