

K3 曲面の pencil もつ Calabi-Yau threefold

東工大・理 小林 正典

§ 1

以下、複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

ここでは、Calabi-Yau threefold (以下 CY3-fold と略す) は、3次元正規代数多様体で、射影的、標準因子 $K \sim 0$ 、不正則数 $\rho = 0$ であり、terminal Gorenstein singularity しかもたないものとする。

代数多様体の分類理論によると、3次元正規代数多様体は、単有理であるか (小平次元 $\kappa = -\infty$)、ある極小モデルと双有理になる ($0 \leq \kappa \leq 3$)。後者で $\kappa > 0$ の場合には更に、多重標準写像 $\pi_{|mK|}$ が $m \gg 0$ で標準モデルへの双有理正則写像となるか ($\kappa = 3$)、 $\kappa = 0$ の多様体の fibration を与え 2次元以下の多様体の構造に還元される ($\kappa = 1 \sim 2$)。([Ka2] など)

$\kappa = 0$ の多様体については、 $\rho > 0$ の時はさらに詳しく構造が分っている。即ち、一般次元で Albanese 写像が全射であ

り、 g が最大(=次元 n)の時はAbel多様体であり、 $0 < g < n$ の時は再びfibrationの構造が入る。([Ka])

よって、 $K=0$, $g=0$ の多様体は分類理論の立場では多様体の一つの構成要素であり、その構造を調べるのが問題となる。本稿ではこの類に属する多様体で、更に曲面のfibrationを持つものを調べる。

曲面論においては、この類にはK3曲面とEnriques曲面の2種があり、後者は前者を普遍被覆とした。そこで、まず、 $K \sim 0$ 、(時には単連結)を仮定する。特異点の条件は極小モデルであることに由来し、3次元では孤立cDV特異点と一致する。

尚、微分幾何的対象としてもCY3-foldは自然なものである。(但し、現段階では非特異単連結を更に仮定する)。いわゆるBogomolov分解([Be])によれば、Kähler多様体 X で、第1 Chern類 $c_1(X)=0 \in H^2(X, \mathbb{R})$ を満たすものは、あるétaleな有限被覆をとると、次の3種の多様体の直積に分解する：(i) 複素トーラス、(ii) シンプレクティック多様体、(iii) スペシャルユニタリー多様体。ここで、(iii)は単連結射影多様体で、 $K \sim 0$ 、Hodge数 $h^{p,0}=0$ ($0 < p < \text{次元}$)を満たすものであり、次元は3以上とする。単連結非特異CY3-foldは(iii)に属する3次元多様体と一致する。

また、超弦理論との関わりも見出されてきている。

§2

K3 曲面は互いに複素構造の変形でつながっていたが、CY 3-fold は事情が全く異なる。全ての CY 3-fold を構成する方法は知られておらず、主な構成法としては、(i) 重みつき射影空間（又はその直積）の中の超曲面の完全交叉、(ii) Fano 3-fold の 2 重被覆 (iii) Kummer K3 曲面の類似 ([Be2]), (iv) Weierstrass model ([Na1]) 等がある。

まず、上のような構成法を用いた、表題の多様体の例を 2 つ挙げる。

例 $\mathbb{P}^4$ の斉次座標を $(X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4)$ として、

P : 平面 $X_0 = X_1 = 0$, F_0, F_1 : 十分一般的な 4 次斉次式、

$V = \{X_0 F_0 + X_1 F_1 = 0\} \cap P$, H : V の超平面切断

とすると、 $|H - P|$ は V 上に K3 曲面の線形束を与える。一般に V は $\{F_0 = F_1 = 0\} \cap P$ の 16 個の孤立特異点をもつ CY 3-fold であるが、この small resolution $\tilde{V} \rightarrow V$ で、 $\tilde{V}$ が射影的になるものをもとることができる。

例 Y を Fano 3-fold とし、 $| - K_Y |$ に 2 つの非特異な member B_1, B_2 があり、 $B_1 + B_2$ が正規交叉にできたと仮定する。このとき、 $B_1 + B_2$ で分岐する Y の 2 重被覆をとり、特異点解消を

行、て、非特異 CY3-fold X を得ることができる。 B_i の strict transform が K3 曲面になり、次の命題によって X は K3 曲面の fibration を持つ。

命題 X : CY3-fold, D : X 上の effective divisor に対し、

- (1) 次は同値: (i) $\mathcal{N}_{D/X} \simeq \mathcal{O}_D$
 (ii) $D \sim \exists m \exists S \quad m: \text{自然数}, S: \text{K3 又は Abel 曲面}$
- (2) (1) のとき, $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{E}$ が存在して、次の可換図式を満たす:
- $$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^1 \\ \uparrow & \nearrow \varphi & \\ X & & \end{array}$$
- π : 標準的な射影影
 $\varphi: |S|$ は正則写像

(証明) (1) (i) $\Rightarrow$ (ii) のみ示す。次の完全列がある。

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_D(D)) \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} \text{SI} \\ H^0(\mathcal{O}_D) \end{array}$$

これより $|D|$ は free. $H^0(\mathcal{O}_D)$ の定数関数と $H^0(\mathcal{O}_X)$ に対応する pencil L をとる。 $|L|$ による全射 $\pi_L: X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ の Stein 分解を考えればよい。

(2) (1) より $|S|$ は free. $\mathcal{E}$ としては、 X の十分 ample な line bundle の φ_* をとればよい。 ▣

§3

前節最後の命題より、以後、特に偏極K3曲面の pencil を扱う。偏極 Abel 曲面についても同様の取扱いが期待されるがここでは取り上げない。

S を射影的 K3 曲面、 L を S 上の ample divisor とするとき、 L^2 を 偏極 K3 曲面 (S, L) の degree という。degree は正の偶数であり、低い degree の 偏極 K3 曲面は構成法が良く分っている。これを利用して K3 曲面を含む CY 3-fold を作ることにする。尚、 L は free のもののみ考えることにする。

(1) degree 2

$\mathcal{E}$ を $\mathbb{P}^1$ 上の階数 3 のベクトル束、 $P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ とし、 $\mathbb{P}^1$ への自然な全射を π とする。もし $|-2K_P|$ に reduced member B が存在すれば、 B で分岐する 2 重被覆 $\sigma: X \rightarrow P$ がとれる。 B の特異点があまり悪くなければ、 X は CY 3-fold になり、 $\pi \circ \sigma$ が K3 曲面の pencil を与える。

$\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ ($0 \leq a \leq b$) と標準化しておくと、次の結果を得る。

定理 1 上の状況で、 a, b の条件として次は同値。

- (i) 非特異な B が存在する ($\Leftrightarrow X$ は非特異 CY 3-fold)
- (ii) X が CY 3-fold となる B が存在する。

(iii) $a \leq 1$ か、 $b \leq 2$

(2) degree 4

(1)と同様に、 $\mathbb{P}^3$ 上のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c)$ ($0 \leq a \leq b \leq c$) に対し、 $P = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1$ とおく。 $|-K_P|$ に既約で特異点が孤立 CDV 特異点のみしか持たない member X が存在すれば、 X は $CY3$ -fold になり、 $\pi|_X$ は $K3$ 曲面の pencil を与える。

定理2 上の状況で、次が成り立つ。

(i) 非特異 $CY3$ -fold X が存在する $\iff$

$a=b=0, c \leq 2$; $a=0, b=c=1$; $a=0, b=c=2$ または
 $a=b=1, c \leq 4$

(ii) $CY3$ -fold X が存在する $\iff$ (i) または $a=0, b=1, c=2$.

証明は、 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の relative な同次座標をとり、 $|-2K_P|$ (定理1)、 $|-K_P|$ (定理2) の base locus に特異点が現れるかどうか計算することにより、行う。尚、定理2において $a=0, b=1, c=2$ の場合、 $|-K_P|$ の一般の member には、3個の $\{xy+zw=0\} \subset \mathbb{C}^4$ 型の特異点がある。

上の定理2は $\mathbb{P}^3$ の4次曲面に対応する場合であるが、 $\mathbb{P}^3$ の

2次曲面の2重被覆に対応する場合の例も同様に構成できる。

(3) $\text{degree} \geq 6$

超曲面の完全交叉 ($\text{degree} = 6, 8$ の一般の場合) となる偏極K3曲面の pencil は、(1)(2) と同様に構成できる。また、 $\text{degree} = 10, 12, 14, 16, 18$ の一般の場合は、偏極K3曲面は等質空間の中の超曲面の完全交叉として実現される ([Mu]) ので、構成できる。

例えば、 $\text{degree} = 10$ の時を考える。 $\mathbb{C}^5$ の2次元線形部分空間をパラメトライズする Grassmann 多様体 $G := \text{Grass}(2, 5)$ を考える。 G は6次元多様体であり、Plücker 座標により $\mathbb{P}^9$ に埋め込まれる。 $\mathbb{P}^1$ との直積 $Y := G \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^9 \times \mathbb{P}^1$ をとり、 $\mathbb{P}^9$ (resp. $\mathbb{P}^1$) の超平面の Y への引き戻しを L (resp. H) とする。例えば、 $L_1, L_2, L_3 \in |L|$, $Q \in |2L + 2H|$ を一般にとれば、 $X := Y \cap L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap Q$ は求める性質を満たす CY3-fold になる。

特別なK3曲面を用いると、次の例もできる。

命題 k : 任意の正整数 に対し、非特異 CY3-fold X で、偏極K3曲面の pencil をもち、偏極が $\text{Pic}(X)$ の中で primitive であり degree が $6k-2$ となるものが存在する。

参考文献

- [Be1] Beauville, A., Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle, J. Diff. Geom. 18 (1983), 755-782
- [Be2] ———, Some remarks on Kähler manifolds with $C_1=0$, in "Classification of Algebraic and Analytic Manifolds (K. Ueno, ed.)", Progress in Math. 39, Birkhäuser, 1983, 1-26
- [Ka1] Kawamata, Y. Characterization of abelian varieties, Compositio Math. 43 (1981), 253-276
- [Ka2] ———; 高次元代数多様体の分類理論, 数学 40 (2), 岩波 1988, 1-18.
- [Mu] Mukai, S., Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10 , in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra," in Honor of Masayoshi NAGATA, 1987, 357-377
- [Na] Nakayama, N., On Weierstrass models, in "Algebraic Geometry and Commutative Algebra," in Honor of Masayoshi NAGATA, 1987, 405-431